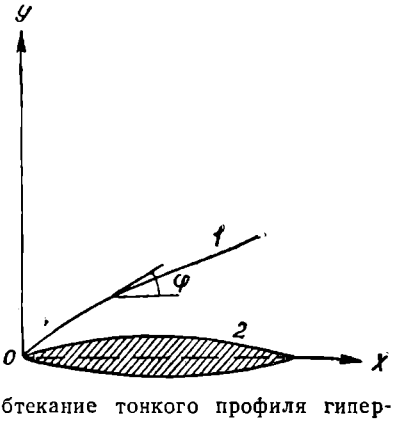
Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LII, вып. 3, 1974 г.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПОРЯДКОВ ВОЗМУЩЕНИЙ В РАВНОМЕРНОМ ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Р. Г. Баранцев, И. Н. Качаева

В нелинейных задачах механики широко распространен метод малых возмущений, заключающийся в отыскании решений, близких к уже известным. Пусть мы имеем дело с краевой задачей A в области D, ограниченной и замкнутой, для системы уравнений в частных производных любого порядка с любым числом неизвестных функций u_i и независимых x_j. Предполагается, что задача поставлена корректно, т. е. имеет место существование и единственность решения и непрерывная зависимость от всех входящих в задачу параметров. Пусть u_i в области D близки к заранее известным функциям u_i^0 в том смысле, что $|u_i - u_i^0|$ и $\left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}\right|$ в области D малы по сравнению с $|u_i^0|$ и $\left|\frac{\partial u_i^0}{\partial x_j}\right|$ соответственно. Тогда, пренебрегая членами более высокого порядка, можно свести краевую задачу A к упрощенной краевой задаче для упомянутых разностей (возмущений). Однако, прежде чем переходить к упрощению задачи, нужно решить вопрос о возможных порядках возмущений. Чаще всего предполагается, что все возмущения одинаковы во всей области D, одного порядка. Это предположение лежит в основе линейной теории малых возмущений. Во многих задачах линейная теория дает правильные результаты, например, теория тонкого крыла в дозвуковом и сверхзвуковом потоке, но известны случаи, когда предположение об одинаковости порядков возмущений приводит к парадоксам. Поэтому, если откуда-либо видно, что порядки возмущений различны, то прежде всего встает вопрос об определении этих порядков из постановки задачи. Обычно порядки возмущений угадываются на основе физических соображений, эксперимента или уже известных частных решений задачи.



Обтекание тонкого профиля гиперзвуковым потоком:
1—ударная волна; *2*—контур профиля

Применим методику априорного определения порядков возмущений функций u_i и производных $\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ во всей области D [1, 2] к задаче обтекания тонкого профиля равномерным гиперзвуковым потоком газа с бесконечно большим M (см. рисунок).

Пусть u, v, p, ρ — составляющие скорости, давление и плотность отнесены к v_∞, $\rho_\infty v_\infty^2$ и ρ_∞ соответственно, а линейные размеры отнесены к характерной длине профиля. Тогда уравнения движения в безразмерных величинах записываются в виде

$$\left.\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};\\ u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};\\ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}&=0;\\ u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho^{\varkappa}}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho^{\varkappa}}\right)&=0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Допустим, что уравнение профиля известно и имеет вид

$$\left.\begin{aligned} y=f(x,\varepsilon)&=\xi_0(\varepsilon)\,f_0(x,\varepsilon),\\ \xi_0(x,\varepsilon)\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0,\quad f_0(x,\varepsilon)&=0\,(1), \end{aligned}\right\} \tag{2а}$$

где ε — выбранный параметр малости, роль которого может играть относительная толщина профиля, угол наклона контура в носке и др. Аналогично примем

$$\left.\begin{aligned} y'_x&=\xi_1(\varepsilon)\,f_1(x,\varepsilon),\\ y''_x&=\xi_2(\varepsilon)\,f_2(x,\varepsilon),\\ \xi_i(\varepsilon)\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0,\quad f_i(x,\varepsilon)&=0\,(1),\qquad i=1,\ 2. \end{aligned}\right\} \tag{2б}$$

Уравнение ударной волны, форма которой заранее неизвестна, по аналогии с контуром профиля запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} y=l(x,\varepsilon)&=\delta_0(\varepsilon)\,l_0(x,\varepsilon);\\ l'_x(x,\varepsilon)&=\delta_1(\varepsilon)\,l_1(x,\varepsilon);\\ l''_x(x,\varepsilon)&=\delta_2(\varepsilon)\,l_2(x,\varepsilon);\\ \delta_l(\varepsilon)\underset{\varepsilon\to 0}{\to}0,\quad l_i(x,\varepsilon)&=0\,(1),\quad i=0,\ 1,\ 2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Граничные условия для системы (1) задаются:

на контуре тела $v=uy'$,

на ударной волне $(M_\infty=\infty)$,

$$\left.\begin{aligned} u&=1-\frac{2}{\varkappa+1}\sin^2\varphi \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} v&=\frac{2}{\varkappa+1}\cos\varphi\sin\varphi,\\ p&=\frac{2}{\varkappa+1}\sin^2\varphi,\\ \rho&=\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где φ — угол между нормалью к ударной волне и осью x;

$$\operatorname{tg}\varphi=l'_x,\quad \sin\varphi=\frac{l'_x}{\sqrt{1+l'^2_x}},\quad \cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+l'^2_x}}. \tag{6}$$

В качестве невозмущенного потока будем считать равномерный поток газа до ударной волны и предположим, что порядки возмущений ис-

комых функций u, v, p и ρ не зависят от координат. Тогда для u, v, p и ρ их производных можно записать

$$\left.\begin{aligned}
&u = 1 + \varepsilon_1(\varepsilon)\, u_1(x, y, \varepsilon);\\
&v = \varepsilon_2(\varepsilon)\, u_2(x, y, \varepsilon);\\
&p = \varepsilon_3(\varepsilon)\, u_3(x, y, \varepsilon);\\
&\rho = \varepsilon_4(\varepsilon)\, u_4(x, y, \varepsilon);\\
&\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{11}(\varepsilon)\, u_{11}(x, y, \varepsilon); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon_{12}(\varepsilon)\, u_{12}(x, y, \varepsilon);\\
&\frac{\partial v}{\partial x} = \varepsilon_{21}(\varepsilon)\, u_{21}(x, y, \varepsilon); \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{22}(\varepsilon)\, u_{22}(x, y, \varepsilon);\\
&\frac{\partial p}{\partial x} = \varepsilon_{31}(\varepsilon)\, u_{31}(x, y, \varepsilon); \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \varepsilon_{32}(\varepsilon)\, u_{32}(x, y, \varepsilon);\\
&\frac{\partial \rho}{\partial x} = \varepsilon_{41}(\varepsilon)\, u_{41}(x, y, \varepsilon); \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \varepsilon_{42}(\varepsilon)\, u_{42}(x, y, \varepsilon).
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Функции $\varepsilon_i(\varepsilon)$ и $\varepsilon_{ij}(\varepsilon)$ назовем порядковыми. Для их определения имеем систему уравнений (1) с граничными условиями (4) и (5). Так как порядковые функции не зависят от координат, то из условий на профиле и на ударной волне получим

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_1(\varepsilon)\, u_1(x, y, \varepsilon) = \frac{2}{\varkappa + 1} \frac{\delta_1^2(\varepsilon)\, l_1^2(x, \varepsilon)}{1 + \delta_1^2(\varepsilon)\, l_1^2(x, \varepsilon)};\\
&\varepsilon_2(\varepsilon)\, u_2(x, y, \varepsilon) = \frac{2}{\varkappa + 1} \frac{\delta_1(\varepsilon)\, l_1(x, \varepsilon)}{1 + \delta_1^2(\varepsilon)\, l_1^2(x, \varepsilon)};\\
&\varepsilon_3(\varepsilon)\, u_3(x, y, \varepsilon) = \frac{2}{\varkappa + 1} \frac{\delta_1^2(\varepsilon)\, l_1^2(x, \varepsilon)}{1 + \delta_1^2(\varepsilon)\, l_1^2(x, \varepsilon)};\\
&\varepsilon_4(\varepsilon)\, u_4(x, y, \varepsilon) = \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1};\\
&\varepsilon_2(\varepsilon)\, u_2(x, y, \varepsilon) = [1 + \varepsilon_1(\varepsilon)\, u_1(\varepsilon, x, y)]\, \xi_1(\varepsilon)\, f_1(x, \varepsilon).
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Решая эту систему относительно порядковых функций $\delta_1(\varepsilon)$, $\varepsilon_1(\varepsilon)$, $\varepsilon_2(\varepsilon)$, $\varepsilon_3(\varepsilon)$ и $\varepsilon_4(\varepsilon)$, получим

$$\delta_1(\varepsilon) = \xi_1; \quad \varepsilon_1(\varepsilon) = \xi_1^2; \quad \varepsilon_2(\varepsilon) = \xi_1; \quad \varepsilon_3(\varepsilon) = \xi_1^2; \quad \varepsilon_4(\varepsilon) = 1. \tag{9}$$

Для определения оставшихся порядковых функций $\varepsilon_{ik}(\varepsilon)$ и $\delta_2(\varepsilon)$ необходимо девять уравнений. Четыре уравнения получим, записав систему уравнений движения (1) для порядковых функций,

$$\left.\begin{aligned}
&(1 + \varepsilon_1 u_1)\, \varepsilon_{11} u_{11} + \varepsilon_2 u_2 \varepsilon_{12} u_{12} = -\frac{1}{\varepsilon_4 u_4}\, \varepsilon_{31} u_{31};\\
&(1 + \varepsilon_1 u_1)\, \varepsilon_{21} u_{21} + \varepsilon_2 u_2 \varepsilon_{22} u_{22} = -\frac{1}{\varepsilon_4 u_4}\, \varepsilon_{32} u_{32};\\
&(1 + \varepsilon_1 u_1)\, \varepsilon_{31} u_{31} + \varepsilon_2 u_2 \varepsilon_{32} u_{32} - \frac{\varkappa \varepsilon_3 u_3}{\varepsilon_4 u_4}[(1 + \varepsilon_1 u_1)\, \varepsilon_{41} u_{41} + \varepsilon_2 u_2 \varepsilon_{42} u_{42}] = 0;\\
&(1 + \varepsilon_1 u_1)\, \varepsilon_{41} u_{41} + \varepsilon_2 u_2 \varepsilon_{42} u_{42} + \varepsilon_4 u_4 (\varepsilon_{11} u_{11} + \varepsilon_2 u_{22}) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Продифференцируем по x условие на профиле, тогда

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\, y'_x = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y'_y\right) y'_x + u y''_x\\
&\text{или}\\
&\varepsilon_{21} u_{21} + \varepsilon_{22} u_{22} \xi_1 f_1 = \varepsilon_{11} u_{11} \xi_1 f_1 + \varepsilon_{12} u_{12} \xi_1^2 f_1^2 + \xi_2 f_2.
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Чтобы получить полную систему уравнений для определения девяти неизвестных порядковых функций, продифференцируем по x также и условия на ударной волне

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}l'_x=-\frac{2}{\varkappa+1}\frac{2l'_xl''_x}{\left(1+l'^2_x\right)^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}l'_x=\frac{2}{\varkappa+1}\frac{1-l'^2_x}{\left(1+l'^2_x\right)^2}l''_x;$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}l'_x=\frac{2}{\varkappa+1}\frac{2l'_xl''_x}{\left(1+l'^2_x\right)^2};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x}+\frac{\partial \rho}{\partial y}l'_x=0$$

или в порядковых функциях

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{11}u_{11}+\varepsilon_{12}u_{12}\delta_1l_1&=-\frac{4}{\varkappa+1}\frac{\delta_1l_1\delta_2l_2}{\left(1+\delta_1^2l_1^2\right)^2};\\
\varepsilon_{21}u_{21}+\varepsilon_{22}u_{22}\delta_1l_1&=\frac{2}{\varkappa+1}\frac{1-\delta_1^2l_1^2}{\left(1+\delta_1^2l_1^2\right)^2}\delta_2l_2;\\
\varepsilon_{31}u_{31}+\varepsilon_{32}u_{32}\delta_1l_1&=\frac{4}{\varkappa+1}\frac{\delta_1l_1\delta_2l_2}{\left(1+\delta_1^2l_1^2\right)^2};\\
\varepsilon_{41}u_{41}+\varepsilon_{42}u_{42}\delta_1l_1&=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

Решая совместно уравнения (10), (11) и (12), для искомых порядковых функций получим

$$\varepsilon_{11}=\varepsilon_{31}=\xi_1\xi_2,\quad \varepsilon_{21}=\varepsilon_{12}=\varepsilon_{32}=\xi_2;$$

$$\varepsilon_{41}=\varepsilon_{22}=\frac{\xi_2}{\xi_1},\quad \varepsilon_{42}=\frac{\xi_2}{\xi_1^2},\quad \delta_2=\xi_2.$$

Таким образом, получены следующие порядки возмущений искомых функций:

	u_l	$\frac{\partial u_l}{\partial x}$	$\frac{\partial u_l}{\partial y}$
u	ξ_1^2	$\xi_1\xi_2$	ξ_2
v	ξ_1	ξ_2	$\frac{\xi_2}{\xi_1}$
p	ξ_1^2	$\xi_1\xi_2$	ξ_2
ρ	1	$\frac{\xi_2}{\xi_1}$	$\frac{\xi_2}{\xi_1^2}$

Эти результаты являются обоснованием и обобщением (при $\xi_1\neq\xi_2$) известных предположений гиперзвуковой теории тонких тел [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранцев Р. Г., Михайлова И. А., Цителов И. М. К определению возмущающих функций в методе малых возмущений. Инженерный журнал, т. 1, вып. 2. 1961.
2. Баранцев Р. Г Лекции по трансзвуковой газовой динамике. ЛГУ, 1965.
3. Хейз З. У., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. ИЛ, 1962.