*Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LII, вып. 3, 1974 г.*

# О РАСПРЕДЕЛЕНИИ КОНЦЕНТРАЦИИ ВО ВЗВЕСЕНЕСУЩЕМ ПОТОКЕ

*Р. И. Шкадов*

Рассмотрим горизонтальный, достаточно широкий канал; влиянием вертикальных стенок можно пренебречь. Тогда можно считать, что имеется движение двухкомпонентной среды между двумя параллельными горизонтальными бесконечными плоскостями (рис. 1). Весом газа будем пренебрегать, а вес частиц учтем. Считая движение установившимся, а взаимодействие между компонентами среды учитывая по закону Стокса, напишем следующие дифференциальные уравнения движения и сплошности в векторной форме: [1]

$$(1-s)\rho_1\frac{d\bar v}{dt} = -(1-s)\operatorname{grad} p - \gamma\mu s(\bar v-\bar u) + \frac{\mu}{3}(1-s)\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar v + \mu(1-s)\Delta\bar v,$$

$$\rho_2\frac{d\bar u}{dt} = \gamma\mu(\bar v-\bar u) + \rho_2\bar g,$$

$$\operatorname{div}[(1-s)\bar v] = 0, \qquad \operatorname{div}(s\bar u) = 0,$$

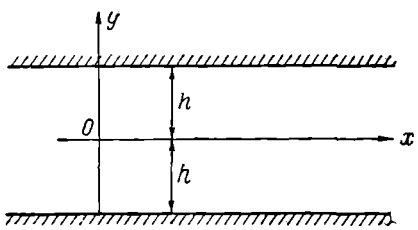



Рис. 1. Общий вид канала

где $\rho_1$ — плотность газа, $\rho_1 = \text{const}$; $\rho_2$ — плотность частиц, $\rho_2 = \text{const}$; $p$ — гидродинамическое давление; $\bar v$ — скорость газа; $\bar u$ — скорость частиц; s — коэффициент замутненности; $\mu$ — коэффициент вязкости газа; $g$ — ускорение силы тяжести; $\gamma$ — коэффициент пропорциональности, зависящей от крупности взвешенных частиц. Рассматриваемая задача по существу плоская, поэтому предыдущие уравнения могут быть переписаны так:

$$\rho_1(1-s)\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -(1-s)\frac{\partial p}{\partial x} - \gamma\mu s(v_x-u_x) + \frac{\mu}{3}(1-s)\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\,\partial y}\right) + \mu(1-s)\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2};$$

$$\rho_1(1-s)\left(v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = -(1-s)\frac{\partial p}{\partial y} - \gamma\mu s(v_y-u_y) + \frac{\mu}{3}(1-s)\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right) + \mu(1-s)\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}\right);$$

$$\rho_2\left(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \gamma\mu(v_x-u_x); \qquad (1)$$

[1] Эта система уравнений справедлива лишь при небольших числах Рейнольдса.

$$\rho_2\left(u_x\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)=\gamma\mu\,(v_y-u_y)-\rho_2 g;$$

$$(1-s)\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)-\left(v_x\frac{\partial s}{\partial x}+v_y\frac{\partial s}{\partial y}\right)=0; \qquad (1)$$

$$s\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)+\left(u_x\frac{\partial s}{\partial x}+u_y\frac{\partial s}{\partial y}\right)=0.$$

Принимается, что жидкость «прилипает» к ограничивающим плоскостям, а твердые частицы соприкасаются с верхней плоскостью без ударов. Поэтому граничные условия имеют вид

$$\text{при}\quad y=\pm h \qquad v_x=v_y=0,$$

$$\text{при}\quad y=h \qquad u_y=0.$$

Решим систему методом последовательных приближений. За малый параметр примем коэффициент замутненности, точнее его максимальное значение $s_0$ в начальном сечении $x=0$. Тогда

$$s=\underset{(1)}{s_0 s^{(2)}}(x,\ y);$$

$$v_x=v_x^{(1)}(x,\ y)+s_0 v_x^{(2)}(x,\ y).$$

Выражения для $v_y$, $u_x$, $u_y$, $p$ записываются аналогично.

Верхние индексы 1 и 2 указывают на принадлежность соответствующих элементов к первому и второму приближениям решения задачи.

Обратимся к первому приближению. Его получим, считая, что на движение жидкой компоненты не влияют взвешенные частицы, т. е. примем, что $s=0$. Будем иметь

$$\rho_1\left(v_x^{(1)}\frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial x}+v_y^{(1)}\frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x}+\frac{\mu}{3}\left(\frac{\partial^2 v_x^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y^{(1)}}{\partial x\,\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 v_x^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial y^2}\right);$$

$$\rho_1\left(v_x^{(1)}\frac{\partial v_y^{(1)}}{\partial x}+v_y^{(1)}\frac{\partial v_y^{(1)}}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p^{(1)}}{\partial y}+\frac{\mu}{3}\left(\frac{\partial^2 v_x^{(1)}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 v_y^{(1)}}{\partial y^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 v_y^{(1)}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y^{(1)}}{\partial y^2}\right);$$

$$\rho_2\left(u_x^{(1)}\frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x}+u_y^{(1)}\frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial y}\right)=\gamma\mu\,(v_x^{(1)}-u_x^{(1)});$$

$$\rho_2\left(u_x^{(1)}\frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial x}+u_y^{(1)}\frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial y}\right)=\gamma\mu\,(v_y^{(1)}-u_y^{(1)})-\rho_2 g;$$

$$\frac{\partial v_x^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial v_y^{(1)}}{\partial y}=0.$$

Первое, второе и пятое уравнения можно решать независимо от остальных. Этим уравнениям и поставленным граничным условиям (при $y=\pm h$ $v_x^{(1)}=v_y^{(1)}=0$) можно удовлетворить следующим решением [1]:

$$p^{(1)}=ax+p_0;$$

$$v_x^{(1)}=\frac{a}{2\mu}(y^2-h^2);$$

$$v_y^{(1)}=0,$$

где $a$ — постоянная, характеризующая падение давления по оси потока; $p_0$ — давление в сечении $x=0$.

Оставшиеся уравнения перепишутся так:

$$\rho_2\left(u_x^{(1)}\frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x}+u_y^{(1)}\frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial y}\right)=\gamma\mu\,(v_x^{(1)}-u_x^{(1)});$$

$$\rho_2\left(u_x^{(1)}\frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial x}+u_y^{(1)}\frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial y}\right)=-\gamma\mu u_y^{(1)}-\rho_2 g.$$

Удовлетворим этой системе решением $u_x^{(1)} = u_x^{(1)}(y)$, $u_y^{(1)} = u_y^{(1)}(y)$. Тогда предыдущие уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \rho_2 u_y^{(1)} \frac{du_x^{(1)}}{dy} &= \gamma\mu\left(v_x^{(1)} - u_x^{(1)}\right); \\ \rho_2 u_y^{(1)} \frac{du_y^{(1)}}{dy} &= -\gamma\mu u_y^{(1)} - \rho_2 g. \end{aligned} \tag{2}$$

Второе уравнение не содержит $u_x^{(1)}$, поэтому его можно решить сразу. При условии, что $u_y^{(1)}\big|_{y=h} = 0$, получим

$$y = h + \frac{\rho_2^2 g}{\gamma^2\mu^2} \ln\left(1 + \frac{\gamma\mu u_y^{(1)}}{\rho_2 g}\right) - \frac{\rho_2}{\gamma\mu} u_y^{(1)}. \tag{3}$$

Первому уравнению системы (2) можно придать вид

$$\frac{du_x^{(1)}}{du_y^{(1)}} = -\frac{\gamma\mu\left(v_x^{(1)} - u_x^{(1)}\right)}{\gamma\mu u_y^{(1)} + \rho_2 g}. \tag{4}$$

С помощью соотношения (3) $v_x^{(1)}$ можно выразить через $u_y^{(1)}$. Значит, уравнение (4) — это линейное уравнение для функции $u_x^{(1)}$, решая которое, получим зависимость между $u_x^{(1)}$ и $u_y^{(1)}$.

Итак, система уравнений для первого приближения полностью решена. Получена аналитическая зависимость для всех элементов. Перейдем ко второму приближению. В соответствующих уравнениях используем соотношения для элементов первого приближения.

В данной работе ставится задача об отыскании закона распределения замутненности по длине канала. Поэтому приводим только одно из уравнений второго приближения для нахождения $s^{(2)}$

$$s^{(2)}\left(\frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial y}\right) + u_x^{(1)}\frac{\partial s^{(2)}}{\partial x} + u_y^{(1)}\frac{\partial s^{(2)}}{\partial y} = 0.$$

Учтем в этом уравнении, что $\dfrac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} = 0$. Тогда получим

$$s^{(2)}\frac{\partial u_y^{(1)}}{\partial y} + u_x^{(1)}\frac{\partial s^{(2)}}{\partial x} + u_y^{(1)}\frac{\partial s^{(2)}}{\partial y} = 0.$$

В это уравнение входит только одна неизвестная функция $s^{(2)} = s^{(2)}(x, y)$, ибо $u_x^{(1)}$ и $u_y^{(1)}$ найдены ранее. Введем новую функцию $\psi(x, y) = \ln s^{(2)}$. Уравнение перепишется так:

$$u_x^{(1)}\frac{\partial\psi}{\partial x} + u_y^{(1)}\frac{\partial\psi}{\partial y} = -\frac{du_y^{(1)}}{dy}. \tag{5}$$

В правой части написана полная производная вместо частной потому, что $u_y^{(1)}$ зависит только от $y$.

Мы получили линейное уравнение в частных производных относительно функции $\psi$. Оно может быть решено с помощью двух обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида [2]:

$$\frac{dx}{u_x^{(1)}} = \frac{dy}{u_y^{(1)}} = -\frac{d\psi}{\dfrac{du_y^{(1)}}{dy}}.$$

Решение этих уравнений таково:

$$\psi + \ln u_y^{(1)} = c_3;$$

$$x - \int \frac{u_x^{(1)}}{u_y^{(1)}}\, dy = c_4.$$

Тогда общее решение уравнения (5) можно представить так:

$$\psi + \ln u_y^{(1)} = \ln \Phi \left[ x - \int \frac{u_x^{(1)}}{u_y^{(1)}}\, dy \right]$$

Или после потенцирования

$$s^{(2)} u_y^{(1)} = \Phi \left[ x - \int \frac{u_x^{(1)}}{u_y^{(1)}}\, dy \right], \tag{6}$$

где $\Phi$ — произвольная функция, вид которой можно получить из граничных условий, т. е. из распределения замутненности по сечению $x = 0$.

Заменим подынтегральное выражение (6) таким

$$\frac{u_x^{(1)}}{u_y^{(1)}}\, dy = -\frac{\rho_2 u_x^{(1)}\, du_y^{(1)}}{\gamma\mu u_y^{(1)} + \rho_2 g}.$$

После интегрирования получим

$$-\int \frac{u_x^{(1)}}{u_y^{(1)}}\, dy = \frac{\rho_2^2 g}{\gamma\mu} \{A_0 w + A_1 [(1+w)\ln(1+w) - w] +$$

$$+ \frac{A_2}{\rho_2 g} \ln(1+w) + \frac{A_3}{2\rho_2 g} \ln^2(1+w) + \frac{A_4}{3\rho_2 g} \ln^3(1+w) +$$

$$+ A_5 [1+w)\ln^2(1+w) - 2(1+w)\ln(1+w) + 2w] +$$

$$+ \frac{\rho_2 g}{2\gamma\mu} A_6 w^2 \Big\} + C = f(w) + C,$$

где $f(w)$ — известная функция от $w$, написанная выше,

$$w = \frac{\gamma\mu u_y^{(1)}}{\rho_2 g};$$

$A_0, A_1, \ldots, A_6$ — некоторые постоянные.

Подставим полученную функцию в (6)

$$s^{(2)} u_y^{(1)} = \Phi [x + f(w) + C]. \tag{7}$$

Зададим распределение замутненности в сечении $x = 0$ по линейному закону, т. е. положим

$$s_0^{(2)} = k(h + y).$$

Подставляя в (7) $x = 0$, получим

$$u_y^{(1)} k(h + y) = \Phi [f(w) + C]$$

или, учитывая зависимость $u_y^{(1)}$ и $y$ от $w$, имеем

$$w[H + \ln(1+w) - w] = \Phi [f(w) + C], \tag{8}$$

где

$$H = \frac{2\gamma^2\mu^2 h}{\rho_2^2 g}.$$

Разложим в ряд функцию $f(w)$, а также левую часть равенства (8), ограничиваясь в разложении логарифма двумя членами. Разложение возможно, ибо

$$|w| = \left| \frac{\gamma\mu u_y^{(1)}}{\rho_2 g} \right| < 1,$$

что следует из (3).

Условие (8) примет вид

$$w\left(H-\frac{w^2}{2}\right)=\Phi\left(B_1w+B_2w^2+C\right), \tag{9}$$

где

$$B_1=\frac{\rho_2^2g}{\gamma\mu}A_0+\frac{\rho_2A_2}{\gamma\mu};$$

$$B_2=\frac{\rho_2^2g}{2\gamma\mu}A_1-\frac{\rho_2}{2\gamma\mu}A_2+\frac{\rho_2}{\gamma\mu}A_3+\frac{\rho_2^3g^2}{2\gamma^2\mu^2}A_6.$$

Выражение, стоящее под знаком произвольной функции, можно представить в виде полного квадрата (при $B_2\neq 0$). Примем $C=\frac{B_1^2}{4B_2}$. Тогда

$$B_1w+B_2w^2+C=B_2\left(w+\frac{B_1}{2B_2}\right)^2$$

откуда

$$w=\pm\sqrt{\frac{B_2\left(w+\frac{B_1}{2B_2}\right)^2}{B_2}}-\frac{B_1}{2B_2}. \tag{10}$$

Знак плюс соответствует положительному значению дроби $\frac{B_1}{2B_2}$, так как минус — отрицательному значению, так как $w<0$.

Подстановкой (10) левую часть условия (9) можно преобразовать к виду

$$\left[\pm\sqrt{\frac{B_2\left(w+\frac{B_1}{2B_2}\right)^2}{B_2}}-\frac{B_1}{2B_2}\right]\left\{H-\frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{\frac{B_2\left(w+\frac{B_1}{2B_2}\right)^2}{B_2}}-\frac{B_1}{2B_2}\right]^2\right\},$$

т. е. произвольная функция

$$\Phi(\varphi)=\left(\pm\sqrt{\frac{\varphi}{B_2}}-\frac{B_1}{2B_2}\right)\left[H-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\varphi}{B_2}}-\frac{B_1}{2B_2}\right)^2\right].$$

В случае, если $B_2=0$, $B_1\neq 0$, условие (9) примет вид

$$w\left(H-\frac{w^2}{2}\right)=\Phi\left(B_1w+C\right).$$

Здесь следует положить $C=0$ и рассмотреть функцию от $\frac{B_1w}{B_1}$. Произвольная функция $\Phi(\varphi)$ получится такой

$$\Phi(\varphi)=\frac{\varphi}{B_1}\left(H-\frac{1}{2}\cdot\frac{\varphi^2}{B_1^2}\right).$$

Равенство (6) может быть переписано

$$s^{(2)}=\frac{D}{w}\Phi\left[x+f(w)+C\right],$$

где постоянная $D$ подбирается так, чтобы получилось необходимое распределение замутненности в начальном сечении. Для случая $B_2\neq 0$ получим

$$s^{(2)}=\frac{k\rho_2^2g}{\gamma^2\mu^2}\cdot\frac{1}{w}\left[\pm\sqrt{\frac{x}{B_2}+\left(w+\frac{B_1}{2B_2}\right)^2}-\frac{B_1}{2B_2}\right]\times$$
$$\times\left\{H-\frac{1}{2}\left[\pm\sqrt{\frac{x}{B_2}+\left(w+\frac{B_1}{2B_2}\right)^2}-\frac{B_1}{2B_2}\right]^2\right\}. \tag{11}$$

Если же $B_2=0$, $B_1\neq 0$, то

$$s^{(2)}=\frac{k\rho_2^2g}{\gamma^2\mu^2}\cdot\frac{1}{w}\left(\frac{x}{B_1}+w\right)\left[H-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{B_1}+w\right)^2\right].$$

Полученные выражения для $s^{(2)}$ выполняются только при не очень больших $x$. Для больших $x$ необходимо рассмотреть асимптотические решения.

Заметим, что обычно замутненность достигает санитарной нормы недалеко от источника пыли, поэтому выведенные формулы имеют практическое значение. С их помощью можно найти границы опасной зоны.

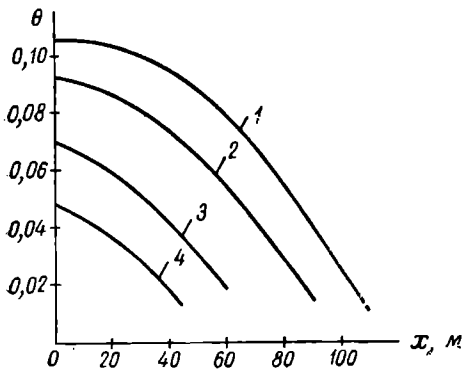



Рис. 2. График зависимости между θ и $x$ для разных значений $w$:
1 — $w = -0{,}30$; 2 — $w = -0{,}34$; 3 — $w = 0{,}40$; 4 — $w = -0{,}45$

Применим (11) для случая: $h = 1$ *м*, $\mu = 1{,}73 \cdot 10^{-4} \frac{г}{см \cdot сек}$ (воздух), $\gamma = 1 \quad 10^4 \frac{1}{см^2}$ (крупность частиц $r \approx 2 \cdot 10^{-2}$ *см*) [3], $\rho_2 = 2 \frac{г}{см^3}$, $a = -5 \quad 10^{-6} \frac{г}{см^2 сек^2}$ (средняя скорость воздуха по сечению выработки $v_{ср} = 1$ *м/сек*) [1], $u_{x0} = 1$ *м/сек*. Тогда $B_1 \simeq -20\,000$ *см*, $B_2 = 31\,500$ *см*, $H = 0{,}15$. В формуле (11) перед радикалом нужно взять знак минус.

Найдена зависимость величины

$$\theta = s^2 \frac{\gamma^2 \mu^2}{k \rho_2^2 g}$$

от $x$ (рис. 2). Взятые значения $w$ соответствуют значениям $y$, равным 25, 0, —47, —96 *см*.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кибель И. А. Кочин Н. Е., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II. Гостехиздат, 1948.

2. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. IV. Гостехиздат, 1951.

3. Шкадов Р. И. О движении взвешенных частиц в потоке газа. Зап. ЛГИ, т. XXXVI, вып. 3, 1958.