Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LII, вып. 3, 1974 г.

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ЛАГРАНЖА В ПРИЛОЖЕНИИ К ИССЛЕДОВАНИЮ СТРУЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В. Я. Бриль

Решение задач, связанных с исследованием кинематики, динамики и энергетики свободных незатопленных жидкостных струй, сопряжено с рядом специфических трудностей. Эти струи отличаются от многих других видов движения сплошной среды наличием свободной поверхности, форма которой меняется с течением времени по некоторому заранее не известному закону.

Существуют два основных метода теоретического изучения движения сплошной среды — методы Эйлера и Лагранжа, однако ни один из них не отражает в должной мере специфики движения среды со свободной поверхностью, что приводит к серьезным, а подчас и непреодолимым трудностям. Например, метод Эйлера предполагает исследование полей всевозможных физических величин (давления, плотности, скорости и т. д.) в некоторой части пространства. Однако в струйных задачах рассматриваемого типа граница этой части пространства, как упоминалось, движется по закону, в свою очередь подлежащему определению. Возникает, таким образом, весьма сложная задача, относящаяся к классу задач с подвижными границами.

Несколько проще решается вопрос об изменяющейся форме границы струи в лагранжевых координатах: зная начальную форму поверхности (при $t = 0$) и закон движения граничных частиц жидкости, можно легко получить уравнение границы в любой момент времени $t > 0$. Но здесь, кроме формы начального объема, согласно теореме Ковалевской, необходимо знать начальное распределение скоростей и давлений в этом объеме.

К сожалению, ни теория, ни эксперимент не дают сколько-нибудь обоснованных рекомендаций относительно выбора указанных начальных условий.

В то же время, при отсутствии сил внешнего воздействия в наиболее интересном случае, когда движение имеет характер установившихся пульсаций, ясно, что все характеристики потока (да и сама форма поверхности, условно принятая за начальную) зависят от легко поддающихся оценке граничных «условий истечения» в плоскости $z = 0$, отделяющей стесненный участок струи от свободного.

Отсюда возникает мысль: нельзя ли, оставаясь в основном на точке зрения Лагранжа, т. е. продолжая изучать «историю жизни» отдельной жидкой частицы, вывести и решить уравнения несжимаемости и движения, для которых одна из пространственных координат и условия истечения играли бы такую же роль, какую время и начальные условия играют

для соответствующих уравнений Лагранжа. Уравнения движения и несжимаемости, полученные с помощью такого подхода, можно назвать «квазилагранжевыми». Кроме того, имеются соображения, общие для метода Лагранжа и предлагаемого квазилагранжевого метода.

Приведем эти соображения.

Пусть все величины, характеризующие движение сплошной среды (скорость, ускорение, давление, плотность и др.), зависят от $n+1$ пространственно-временной координаты, где $n=1,2,3$ в зависимости от того, является ли движение среды пространственно одномерным, двумерным или трехмерным. Обозначим эти координаты a_i $(i=1,2,\ldots, n+1)$. Каждая из этих координат имеет свою область изменения, естественно вытекающую из способа задания пространственно-временных связей и физического смысла задачи. Одну из них, например a_{n+1}, будем считать переменным параметром, от величины которого зависит каждая из оставшихся координат a_i $(i=1,2,\ldots,n)$ фиксированной жидкой частицы,

$$a_i = a_i(a_{n+1}), \qquad (i=1, \quad n). \tag{1}$$

Единственное требование, которому должен удовлетворять переменный параметр движения (ППД) a_{n+1}, — однозначность указанных зависимостей.

Пусть при некотором фиксированном значении ППД $a_{n+1}=a^*_{n+1}$ функции (1) принимают значения a^*_i, т. е. $a^*_i = a_i(a^*_{n+1})$. Единственное требование, которому должен удовлетворять комплекс чисел $\{a_i\}_1^n$, — однозначно определять индивидуальность частицы при выбранном значении ППД.

Если при движении фиксированной частицы ее координаты зависят только от значения a_{n+1}, то координаты произвольной частицы можно трактовать как функции от чисел $\{a^*_i\}_1^n$, характеризующих ее индивидуальность, и от ППД a_{n+1}. То есть, вообще говоря,

$$a_i = a_i(a^*_1, \qquad a^*_n, \ a_{n+1}), \qquad (i=1, \quad n); \tag{2}$$

причем

$$a^*_i = a_i(a^*_1, \qquad a^*_n, \ a^*_{n+1}). \tag{3}$$

Метод Лагранжа в качестве ППД всегда использует время, а в качестве чисел, характеризующих индивидуальность частицы, — либо пространственные (вообще говоря криволинейные) ее координаты в некоторый фиксированный момент времени, либо величины, связанные с пространственными координатами взаимно однозначными зависимостями. По-видимому, такое «распределение обязанностей» вовсе не является необходимым, более того, оно приводит к значительным трудностям при решении ряда конкретных задач.

Альтернативой этому традиционному подходу может служить использование в качестве ППД одной из пространственных координат, лишь бы в процессе движения выполнялось требование однозначности зависимостей (1). Время же может служить одним из чисел комплекса, характеризующего индивидуальность частицы.

Рассмотрим выводы, которые можно сделать, если заранее не уточнять, какая именно из $n+1$ координат выбрана в качестве ППД.

Выделим ППД из других пространственно-временных координат специальным обозначением $a_{n+1}=q$, которого и будем придерживаться в дальнейшем.

Пусть теперь задана функция

$$f = f(a_1, \qquad a_n, \ q). \tag{4}$$

Это равенство можно понимать двояко: если $q = q^л$ и $a_i = a_i^л$ $(i = 1, \ldots, n)$, как и раньше, — пространственно-временные координаты фиксированной частицы среды, то налицо типичный лагранжев подход и (4) дает значение функции f для любой частицы в любой момент времени. Если же $q = q^э$ и $a_i = a_i^э$ $(i = 1, \quad n)$ пространственно-временные координаты фиксированной точки пространства, то (4) задает поле величины f в этом пространстве и мы имеем типичный эйлеров подход.

Чтобы установить связь между этими подходами, достаточно положить, что частица $\{a_i^*\}_1^n$ при $q^л = q^э$ находится в пространственно-временной точке

$$q^л = q^э = q,$$

$$a_i^л = a_i^э = a_i, \qquad (i = 1, \quad n). \tag{5}$$

Тогда (4) можно понимать и в трактовке Лагранжа и в трактовке Эйлера, т. е.

$$f(a_1^л, \quad a_n^л, \; q^л) = f(a_1^э, \quad a_n^э, \; q^э), \tag{6}$$

где $a_i^л$ — функции (2) от $\{a_i^*\}_1^n$ и $q^л$, точнее

$$f[a_1(a_1^*, \quad a_n^*, \; q), \quad a_n(a_1^*, \quad a_n^*, \; q), \; q] = f(a_1^э, \; \ldots, a_n^э, \; q). \tag{7}$$

Из равенств (6) и (7) следует, что значение функции f в пространственно-временной точке $(a_1^э, \ldots, a_n^э, \; q)$ — равно ее значению для той частицы среды, которая в данный момент находится в этой точке пространства.

При необходимости дифференцировать (4) получим

$$\frac{\partial f}{\partial a_i^*} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial a_k} \cdot \frac{\partial a_k}{\partial a_i^*}, \qquad (i = 1, \ldots, n); \tag{8}$$

$$\frac{df}{dq} = \frac{\partial f}{\partial q} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial a_k} \cdot \frac{\partial a_k}{\partial q}. \tag{9}$$

Формулы (8) дают выражение производных функции f по лагранжевым координатам a_i^* через производные этой функции по эйлеровым координатам $a_i = a_i^л = a_i^э$ (в предположении, что все рассматриваемые функции дифференцируемы).

Если, кроме того,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial a_1^*} & \dfrac{\partial a_n}{\partial a_1^*} \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial a_n^*} & \dfrac{\partial a_n}{\partial a_n^*} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{10}$$

то, решая систему (8) относительно эйлеровых производных $\frac{\partial f}{\partial a_i}$, получим по Крамеру их выражение через производные по лагранжевым координатам, причем решение будет единственным.

В частности, для рассматриваемого ниже случая $n = 2$ имеем

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = \frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial a_1^*} & \frac{\partial a_2}{\partial a_1^*} \\ \frac{\partial f}{\partial a_2^*} & \frac{\partial a_2}{\partial a_2^*} \end{vmatrix}; \tag{11}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_2} = \frac{1}{\Delta_2}\begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial a_1^*} & \frac{\partial f}{\partial a_1^*} \\ \frac{\partial a_1}{\partial a_2} & \frac{\partial f}{\partial a_2^*} \end{vmatrix}, \tag{12}$$

где

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial a_1^*} & \frac{\partial a_2}{\partial a_1^*} \\ \frac{\partial a_1}{\partial a_2^*} & \frac{\partial a_2}{\partial a_2^*} \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Наконец, решая (9) относительно частной производной по ППД, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{df}{dq} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial a_k}\frac{\partial a_k}{\partial q} = \frac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix} \frac{df}{dq} & \frac{\partial a_1}{\partial q} & \frac{\partial a_n}{\partial q} \\ \frac{\partial f}{\partial a_1^*} & \frac{\partial a_1}{\partial a_1^*} & \frac{\partial a_n}{\partial a_1^*} \\ \frac{\partial f}{\partial a_n^*} & \frac{\partial a_1}{\partial a_n^*} & \frac{\partial a_n}{\partial a_n^*} \end{vmatrix}, \tag{14}$$

где $\left\{\frac{\partial f}{\partial a_k}\right\}_1^n$ — решение системы (8).

Приведенные соображения являются, если можно так выразиться, «суперлагранжевыми», ибо в них не конкретизируется ни переменный параметр движения, ни комплекс чисел, характеризующих индивидуальность частицы. Как частные случаи отсюда могут быть получены и уравнения Лагранжа и упомянутые квазилагранжевы уравнения.

Покажем их вывод на примере вращательно-симметричного незакрученного потока идеальной жидкости в среде, плотность которой пренебрежимо мала по сравнению с плотностью жидкости ρ, без влияния внешних массовых сил. Такие потоки удобно рассматривать в цилиндрической системе координат (r, θ, z), ось oz которой совпадает с осью симметрии потока и направлена вниз по нему, положение плоскости $\theta = 0$ безразлично в связи с вращательной симметрией.

Искомые функции: $u(r, z, t)$ — осевая составляющая скорости, $v(r, z, t)$ — радиальная составляющая скорости, $p(r, z, t)$ — давление — удовлетворяют известным [1] эйлеровым уравнениям движения и несжимаемости, которые в рассматриваемом случае примут вид

$$\left.\begin{aligned} v\frac{\partial v}{\partial r} + u\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r} \\ v\frac{\partial u}{\partial r} + u\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} \\ v + r\frac{\partial v}{\partial r} + r\frac{\partial u}{\partial r} &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{15}$$

[1] Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розин. Теоретическая гидромеханика. Гостехиздат, 1948.
Г. Ламб. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947.

Для получения из этих соотношений соответствующих квазилагранжевых уравнений движения и несжимаемости достаточно одну из независимых переменных выбрать в качестве ППД и эйлеровы производные преобразовать по формулам (11)—(14). Параллельно, пользуясь тем же методом, легко получим известные лагранжевы уравнения движения и несжимаемости в цилиндрических координатах.

Квазилагранжев подход	*Лагранжев подход*

Переменный параметр движения

$q = z,$ (16)	$q = t,$ (16′)
где z — расстояние от плоскости начального сечения $z = 0$.	где t — время, прошедшее от начального момента $t = 0$.

Комплекс чисел $\{a_i^*\}_1^n$, характеризующих индивидуальность частицы:

$a_1^* = r^*$, $a_2^* = t^*$, (17)	$a_1^* = r_0$, $a_2^* = z_0$, (17′)
где r^* — расстояние частицы от оси при $z = 0$ (в случае свободной незатопленной струи, истекающей из круглого отверстия радиусом R, имеем $0 \leqslant r^* \leqslant R$); t^* — момент прохождения частицы сквозь начальную плоскость $z = 0$.	где r_0 — расстояние частицы от оси при $t = 0$; в случае свободной незатопленной струи имеем $0 \leqslant r_0 \leqslant \bar{r}_0(z)$ ($r = \bar{r}_0(z)$ — уравнение поверхности в начальный момент); z_0 — расстояние частицы от начальной плоскости при $t = 0$.

Начальное расстояние частицы от оси симметрии потока, как уже отмечалось, имеет при квазилагранжевом подходе четкую, фиксированную верхнюю границу — R, тогда как при подходе Лагранжа эта граница, вообще говоря, неизвестна.

Это обстоятельство особенно существенно при решении задачи численными методами (в частности, методом конечных разностей).

Искомые функции

$p = p[r(r^*, t^*, z),\ t(r^*, t^*, z),\ z]$, $a_1 = r = r(r^*, t^*, z)$, $a_2 = t = t(r^*, t^*, z)$, (18)	$p = p[r(r_0, z_0, t),\ z(r_0, z_0, t),\ t]$, $a_1 = r = r(r_0, z_0, t)$, $a_2 = z = z(r_0, z_0, t)$, (18′)
где r — расстояние частицы от оси при ее прохождении сквозь плоскость $Z = z$; t — момент прохождения частицы сквозь плоскость $Z = z$; p — давление.	где r — расстояние частицы от оси к моменту времени $T = t$; z — расстояние частицы от начальной плоскости к моменту времени $T = t$; p — давление.
При $z = 0$ имеем $r(r^*, t^*, 0) = r^*$, $t(r^*, t^*, 0) = t^*$, $p(r^*, t^*, 0) = p^*(r^*, t^*)$ (19)	При $t = 0$ имеем $r(r_0, z_0, 0) = r_0$, $z(r_0, z_0, 0) = z_0$, $p(p_0, z_0, 0) = p_0(r_0, z_0)$ (19′)

Радиальная и осевая составляющие скорости, входящие в эйлеровы уравнения (15), могут быть представлены следующим образом:

$$v = \frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\dfrac{\partial r}{\partial z}}{\dfrac{\partial t}{\partial z}} = \frac{\tilde{r}}{\tilde{t}} \qquad (20)$$

(так как для фиксированной частицы система (18) дает зависимость r от t через параметр z, волнистой чертой обозначена производная по ППД — z),

$$u = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{\tilde{t}} \qquad (21)$$

по правилу дифференцирования обратной функции (18).

$$v = \frac{\partial r}{\partial t} = \dot{r}, \qquad (20')$$

где точкой обозначена производная по ППД — t.

$$u = \frac{\partial z}{\partial t} = \dot{z}. \qquad (21')$$

Учитывая соотношения (11)—(14), (16)—(21) и (16′)—(21′) и заметив, что слева от знака равенства в первых двух уравнениях системы (15) стоят полные производные по времени соответственно функций v и u, получим для этих уравнений

$$\frac{1}{\tilde{t}}\left(\widetilde{\frac{\tilde{r}}{\tilde{t}}}\right) = -\frac{1}{\rho\Delta_2^*}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial r^*} & \dfrac{\partial t}{\partial r^*} \\ \dfrac{\partial p}{\partial t^*} & \dfrac{\partial t}{\partial t^*} \end{vmatrix}, \qquad (22)$$

$$\frac{1}{\tilde{t}}\left(\widetilde{\frac{1}{\tilde{t}}}\right) = -\frac{1}{\rho}\left(\tilde{p} - \frac{\tilde{r}}{\Delta_2^*}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial r^*} & \dfrac{\partial t}{\partial r^*} \\ \dfrac{\partial p}{\partial t^*} & \dfrac{\partial t}{\partial t^*} \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \frac{\tilde{t}}{\Delta_2^*}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial r^*} & \dfrac{\partial p}{\partial r^*} \\ \dfrac{\partial r}{\partial t^*} & \dfrac{\partial p}{\partial t^*} \end{vmatrix}\right), \qquad (23)$$

где

$$\Delta_2^* = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial r^*} & \dfrac{\partial t}{\partial r^*} \\ \dfrac{\partial r}{\partial t^*} & \dfrac{\partial t}{\partial t^*} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (24)$$

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = -\frac{1}{\rho\Delta_2^0}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial r_0} & \dfrac{\partial z}{\partial r_0} \\ \dfrac{\partial p}{\partial z_0} & \dfrac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix}, \qquad (22')$$

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = -\frac{1}{\rho\Delta_2^0}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial r_0} & \dfrac{\partial p}{\partial r_0} \\ \dfrac{\partial r}{\partial z_0} & \dfrac{\partial p}{\partial z_0} \end{vmatrix}, \qquad (23')$$

где

$$\Delta_2^0 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial r_0} & \dfrac{\partial z}{\partial r_0} \\ \dfrac{\partial r}{\partial z_0} & \dfrac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (24')$$

Уравнения движения (22), (23) и (22′), (23′) могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) = \frac{1}{\Delta_2^*}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial r^*} & \dfrac{\partial t}{\partial r^*} & \dfrac{\partial p}{\partial r^*} \\ \dfrac{\partial r}{\partial t^*} & \dfrac{\partial t}{\partial t^*} & \dfrac{\partial p}{\partial t^*} \\ \dfrac{\partial r}{\partial z} & 0 & 0 \end{vmatrix}. \qquad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho u^2}{2}\right) = \frac{1}{\Delta_2^*}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial r^*} & \dfrac{\partial t}{\partial r^*} & \dfrac{\partial p}{\partial r^*} \\ \dfrac{\partial r}{\partial t^*} & \dfrac{\partial t}{\partial t^*} & \dfrac{\partial p}{\partial t^*} \\ \dfrac{\partial r}{\partial z} & \dfrac{\partial t}{\partial z} & \dfrac{\partial p}{\partial z} \end{vmatrix}. \qquad (26)$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho\Delta_2^0}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial r_0} & \dfrac{\partial p}{\partial r_0} \\ \dfrac{\partial z}{\partial z_0} & \dfrac{\partial p}{\partial z_0} \end{vmatrix}, \qquad (25')$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho\Delta_2^0}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial r_0} & \dfrac{\partial p}{\partial r_0} \\ \dfrac{\partial r}{\partial z_0} & \dfrac{\partial p}{\partial z_0} \end{vmatrix}. \qquad (26')$$

Для третьего уравнения (несжимаемости) системы (15) имеем

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\tilde{r}}{\tilde{t}}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{t}}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\tilde{t}}\right)=0. \quad (27)$$

$$\frac{\dot{r}}{r}+\frac{\partial\dot{r}}{\partial r}+\frac{\partial\dot{z}}{\partial z}=0. \quad (27')$$

Преобразовав эйлеровы производные по формулам (11)—(14), получим

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\tilde{r}}{\tilde{t}}+\frac{1}{\Delta_2^*}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial r^*} & \left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{t}}\right) & \frac{\partial t}{\partial r^*}\\ \frac{\partial}{\partial t^*} & \left(\frac{\tilde{r}}{\tilde{t}}\right) & \frac{\partial t}{\partial t^*}\end{vmatrix}+$$

$$+\left(\frac{1}{\tilde{t}}\right)-\frac{\tilde{r}}{\Delta_2^*}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial r^*} & \left(\frac{1}{\tilde{t}}\right) & \frac{\partial t}{\partial r^*}\\ \frac{\partial}{\partial t^*} & \left(\frac{1}{\tilde{t}}\right) & \frac{\partial t}{\partial t^*}\end{vmatrix}-$$

$$-\frac{\tilde{t}}{\Delta_2^*}\begin{vmatrix}\frac{\partial r}{\partial r^*} & \frac{\partial}{\partial r^*} & \left(\frac{1}{\tilde{t}}\right)\\ \frac{\partial r}{\partial t^*} & \frac{\partial}{\partial t^*} & \left(\frac{1}{\tilde{t}}\right)\end{vmatrix}=0 \quad (28)$$

$$\frac{\dot{r}}{r}+\frac{1}{\Delta_2^0}\begin{vmatrix}\frac{\partial\dot{r}}{\partial r_0} & \frac{\partial z}{\partial r_0}\\ \frac{\partial\dot{r}}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0}\end{vmatrix}+$$

$$+\frac{1}{\Delta_2^0}\begin{vmatrix}\frac{\partial r}{\partial r_0} & \frac{\partial\dot{z}}{\partial r_0}\\ \frac{\partial r}{\partial z_0} & \frac{\partial\dot{z}}{\partial z_0}\end{vmatrix}=0 \quad (28')$$

или, раскрывая определители и проведя тождественные преобразования,

$$\frac{\tilde{r}}{r}-\frac{\tilde{\tilde{t}}}{\tilde{t}}+\frac{1}{\Delta_2^*}\left(\frac{\partial\tilde{r}}{\partial r^*}\cdot\frac{\partial t}{\partial t^*}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\tilde{r}}{\partial t^*}\cdot\frac{\partial t}{\partial r^*}+\frac{\partial\tilde{t}}{\partial t^*}\cdot\frac{\partial\tilde{t}}{\partial r^*}-\frac{\partial\tilde{t}}{\partial r^*}\cdot\frac{\partial r}{\partial t^*}\right)=0.$$

$$\frac{\dot{r}}{r}+\frac{1}{\Delta_2^0}\left(\frac{\partial\dot{r}}{\partial r_0}\cdot\frac{\partial z}{\partial z_0}-\frac{\partial\dot{r}}{\partial z_0}\cdot\frac{\partial z}{\partial r_0}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial r}{\partial r_0}\cdot\frac{\partial\dot{z}}{\partial z_0}-\frac{\partial r}{\partial z_0}\cdot\frac{\partial\dot{z}}{\partial r_0}\right)=0.$$

В числителях последних дробей стоят производные Δ_2^* и Δ_2^0 по ППД в предположении непрерывности частных производных, откуда

$$\frac{\tilde{r}}{r}+\frac{\tilde{\Delta}_2^*}{\Delta_2^*}-\frac{\tilde{\tilde{t}}}{\tilde{t}}=0 \quad (29)$$

$$\frac{\dot{r}}{r}+\frac{\dot{\Delta}_2^0}{\Delta_2^*}=0 \quad (29')$$

или, потенцируя,

$$\frac{\partial}{\partial z}\ln\left|\frac{r}{\tilde{t}}\Delta_2^*\right|=0.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln|r\Delta_2^0|=0.$$

Интегрируя по ППД,

$$\frac{r}{\tilde{t}}\Delta_2^*=C(r^*, t^*). \quad (30)$$

$$r\Delta_2^0=C(r_0, z_0). \quad (30')$$

Полагая в этом равенстве ППД $=0$ и заметив, что

$$\Delta_2^*|_{z=0}=\begin{vmatrix}\frac{\partial r^*}{\partial r^*} & \frac{\partial t^*}{\partial r^*}\\ \frac{\partial r^*}{\partial t^*} & \frac{\partial t^*}{\partial t^*}\end{vmatrix}=1,$$

$$\Delta_2^0|_{t=0}=\begin{vmatrix}\frac{\partial r_0}{\partial r_0} & \frac{\partial z_0}{\partial r_0}\\ \frac{\partial r_0}{\partial z_0} & \frac{\partial z_0}{\partial z_0}\end{vmatrix}=1,$$

имеем

$$C(r^*, t^*) = \left(r \frac{1}{\tilde{t}} \Delta_2^*\right)_{z=0} = \frac{r^*}{\tilde{t}^*}, \quad (31)$$

где r^*, t^* — из граничных условий.

Подставляя (31) в (30), получим искомое квазилагранжево уравнение несжимаемости

$$\frac{r}{r^*} \frac{\tilde{t}^*}{\tilde{t}} \Delta_2^* = 1. \quad (32)$$

Для однозначного решения полученной системы квазилагранжевых уравнений движения (25), (26) и несжимаемости (32), согласно теореме Ковалевской, достаточно задать следующие граничные условия:

$$r(r^*, t^*, z)|_{z=0} = r^*,$$

$$t(r^*, t^*, z)|_{z=0} = t^*,$$

$$\tilde{r}(r^*, t^*, z)|_{z=0} = \tilde{r}^*(r^*, t^*) = \frac{v^*}{u^*};$$

$$\tilde{t}(r^*, t^*, z)|_{z=0} = \tilde{t}^*(r^*, t^*) = \frac{1}{u^*};$$

$$p(r^*, t^*, z)|_{z=0} = p^*(r^*, t^*),$$

причем область определения граничных функций $0 \leqslant r^* \leqslant R$, $t^* \geqslant 0$.

$$C(r_0, z_0) = (r\Delta_2^0)_{t=0} = r_0, \quad (31')$$

где r_0 — из начальных условий.

Подставляя (31′) в (30′), получим известное лагранжево уравнение несжимаемости

$$\frac{r}{r_0} \Delta_2^0 = 1. \quad (32')$$

Для однозначного решения полученной системы лагранжевых уравнений движения (25′), (26′), и несжимаемости (32′), согласно теореме Ковалевской, достаточно задать следующие начальные условия:

$$r(r_0, z_0, t)|_{t=0} = r_0,$$

$$z(r_0, z_0, t)|_{t=0} = z_0,$$

$$\dot{r}(r_0, z_0, t)|_{t=0} = \dot{r}_0(r_0, z_0) = v_0,$$

$$\dot{z}(r_0, z_0, t)|_{t=0} = z_0(r_0, z_0) = u_0,$$

$$p(r_0, z_0, t)|_{t=0} = p_0(r_0, z_0),$$

причем область определения начальных функций $0 \leqslant r_0 \leqslant \bar{r}_0(z)$, $z_0 \geqslant 0$.

Если решены квазилагранжевы уравнения, то, в частности, найдена и форма свободной поверхности струи.

Действительно, в этом случае имеем

$$r_{\text{пов}} = r_{\text{пов}}(t^*, z) = r(r^*, t^*, z)|_{r^*=R}.$$

Решение же уравнений Лагранжа не дает возможности непосредственного отыскания этой поверхности.