Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LII, вып. 3, 1974 г.

ОБТЕКАНИЕ КОНУСА ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОГО ИЗЛУЧАЮЩЕГО ГАЗА

Г. А. Колтон

При движении тела в газе с большой сверхзвуковой скоростью газ, находящийся в области между поверхностью тела и ударной волной, нагревается до температуры нескольких тысяч градусов. При такой температуре на параметры потока может оказывать существенное влияние теплообмен излучением между частицами газа, а также между газом и поверхностью обтекаемого тела. Теплоизлучение газа в ударном слое приводит к понижению его температуры и увеличению плотности. Поэтому представляется целесообразным использовать для решения задачи об обтекании тела потоком излучающего газа метод «пограничного слоя» [1; 2; 3], основанный на предположении, что отношение плотностей газа до и после ударной волны является малой величиной. В настоящей работе исследуем лишь «предельное» течение, соответствующее бесконечно большому сжатию газа в ударном слое.

Для описания «предельного» течения вязкого излучающего газа в ударном слое прямого кругового конуса выберем в качестве независимых переменных $x = \sqrt{r}$ и $t = \frac{2\psi}{r\sqrt{r}}$, где r — расстояние точки обтекаемого конуса до оси симметрии, ψ — функция тока. Искомыми величинами будем считать u — скорость, отнесенную к ее значению на фронте ударной волны, в предельном случае совпадающей с поверхностью конуса, и

$$i = \frac{i_1 - i_{1w}}{\frac{1}{2} v_0^2 \sin\alpha - i_{1w}},$$

где i_1 — энтальпия газа; $i_{1w} = \text{const}$ — значение энтальпии на поверхности конуса; v_0 — скорость набегающего потока; α — угол полураствора конуса.

В этих переменных уравнения, описывающие предельное течение,

$$\begin{gathered}\varepsilon_1 \sqrt{w}\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{3}{2} t \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{2} x \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad p = \sin^2\alpha; \\ \varepsilon_2 u \frac{\partial}{\partial t}\left(u \frac{\partial i}{\partial t}\right) + \frac{3}{2} t u \frac{\partial i}{\partial t} - \frac{1}{2} x u \frac{\partial i}{\partial x} = -\varepsilon_3 u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - n x^2 q, \quad w = u^2,\end{gathered} \tag{1}$$

где q — скорость притока лучистой энергии к единице массы газа; p — давление газа, отнесенное к скоростному напору;

$$\varepsilon_1 = 4h_0 \operatorname{ctg} \alpha; \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{\mathrm{Pr}};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{4h_0 \cos^3 \alpha}{\sin \alpha \left(\frac{1}{2} v_0^2 \sin^2 \alpha - i_{1w} \right)} v_0^2;$$

$$n_1 = \frac{n_0}{\cos \alpha \left(\frac{1}{2} v_0^2 \sin^2 \alpha - i_{1w} \right)} v_0^2.$$

Выражения для безразмерных параметров h_0 и n_0, а также интегральное представление величины q для предельного течения приведены в работах [4; 5]. Как показывает расчет, безразмерные параметры ε_1 и ε_2 всегда намного меньше единицы. Граничные условия для системы (1) имеют вид:

а) на фронте ударной волны при $t = x$

$$u = i = 1; \tag{2}$$

б) на поверхности обтекаемого конуса при $t = 0$

$$u = i = 0. \tag{3}$$

Обратимся к первому уравнению системы (1)

$$\varepsilon_1 \sqrt{w} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{3}{2} t \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{2} x \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \tag{4}$$

Положим

$$w = w_0 w_1, \tag{5}$$

где w_0 — решение краевой задачи;

$$\begin{gathered} \varepsilon_1 \sqrt{w_0} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} + \frac{3}{2} t \frac{\partial w_0}{\partial t} = 0, \\ w_0(0, x) = 0, \quad w_0(x, x) = 1. \end{gathered} \tag{6}$$

Уравнение для w_1 получим, подставляя (5) в (4) и используя (6), при этом в полученном уравнении пренебрегаем членами, содержащими малый параметр ε_1. В результате получим

$$3t \frac{\partial w_1}{\partial t} - x \frac{\partial w_1}{\partial x} - 3t \frac{\partial \ln w_0}{\partial t} w_1^{3/2} + w_1 \left[3t \frac{\partial \ln w_0}{\partial t} - x \frac{\partial \ln w_0}{\partial x} \right] = 0, \tag{7}$$

$$w_1(x, x) = 1.$$

Решением задачи Коши (7) является функция

$$w_1 = \left\{ 1 - \sqrt{w_0} \int_{\sqrt[4]{x^3 t}}^{x} \varphi \left(\frac{x^3 t}{\eta^3}, \eta \right) d\eta \right\}^{-2} \tag{8}$$

где

$$\varphi(t, x) = \frac{\partial \left(\frac{1}{\sqrt{w_0}} \right)}{\partial x}.$$

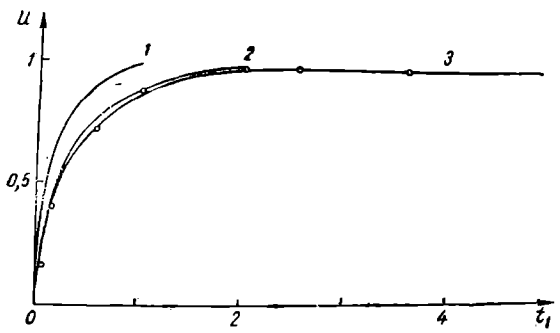
Краевая задача (6) эквивалентна нелинейному интегральному уравнению

$$w_0(t_1, x_1) = \frac{\int\limits_0^{t_1} \exp\left(-\frac{3}{2}\int\limits_0^{\zeta} \frac{\zeta\, d\zeta}{\sqrt{w_0(\zeta, x_1)}}\right) d\zeta}{\int\limits_0^{x_1} \exp\left(-\frac{3}{2}\int\limits_0^{\zeta} \frac{\zeta\, d\zeta}{\sqrt{w_0(\zeta, x_1)}}\right) d\zeta}, \tag{9}$$

где

$$t = \frac{t}{\sqrt{\varepsilon_1}}; \quad x_1 = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon_1}}.$$

Из (9) следует, что $w_0(t_1, x_1)$,— монотонно возрастающая функция t_1 в промежутке $[0, x_1]$. Производя оценку интегралов, стоящих в правой части формулы (9), легко показать, что для любого $\delta > 0$ найдется такое значение $t^* = \sqrt{-\frac{4}{3}\ln\delta}$, не зависящее от x_1, что для $t_1 \geqslant t_1^*$ $1 - \delta \leqslant w_0 \leqslant 1$. Это означает, что при $x_1 \geqslant t_1^*$ можно считать величину $w_0(t_1, x_1)$ не зависящей от x_1 с точностью до величин порядка δ. При этом производная $\frac{\partial w_0}{\partial x}$ имеет порядок $e^{-\frac{x^2}{\varepsilon_1}}$



Распределение скорости $u(t_1)$ газа в ударном слое:

1 — $x_1 = 1$; *2* — $x_2 = 2$; *3* — $x_3 = 3$; 4; 5; 10; кружками обозначено приближенное решение (14)

Тогда из (9) следует, что при $x_1 \geqslant t_1^*$, $w_1 = 1$ и, следовательно,

$$w = w_0(t_1)$$

и

$$u = u_0(t_1) = \sqrt{w_0(t_1)}.$$

Краевая задача (6) решалась численно на ЭВМ для $x_1 = 1, 2, 3, 4, 5, 10$. Из результатов расчета в виде графиков (см. рисунок) следует, что при $x_1 \geqslant 3$ функция u_0 практически не зависит от x_1 в соответствии с приведенными оценками.

Можно указать приближенное аналитическое решение уравнения (6).

Положим

$$v = \int\limits_0^{t_1} \frac{dt_1}{u_0}; \quad \bar{v} = \int\limits_0^{x_1} \frac{dt_1}{u_0}, \quad \varphi(v) = t_1(v) = \int\limits_0^{v} u_0\, dv. \tag{10}$$

Тогда (6) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u_0}{\partial v^2} + \frac{3}{2}\varphi(v)\frac{\partial u_0}{\partial v} = 0; \\ u_0 = 0 \quad \text{при} \quad v = 0; \\ u_0 = 1 \quad \text{при} \quad v = \bar{v}. \end{gathered} \tag{11}$$

Заменим краевую задачу (11) интегральным уравнением

$$u_0 = \frac{\int\limits_0^{v_1} \exp\left(-\frac{3}{2}\int\limits_0^{v} \varphi(v)\, dv\right) dv}{\int\limits_0^{\bar{v}} \exp\left(-\frac{3}{2}\int\limits_0^{v} \varphi(v)\, dv\right) dv}. \tag{12}$$

Применяя к (12) метод итераций, в качестве нулевого приближения возьмем

$$u_0^0 = 1, \quad \varphi^0(v) = v. \tag{13}$$

Тогда в первом приближении для u_0 и t_1 получим при $\bar{v} \gg 1$

$$u_0' = \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} v\right), \tag{14}$$

$$t_1 = v \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} v\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left[1 - \exp\left(-\frac{3}{4} v^2\right)\right].$$

Функция $u_0^{(1)}(t_1)$, определенная формулами (14), вполне удовлетворительно (погрешность 1—2%) совпадает при $x_1 \geqslant 3$ с численным решением краевой задачи (6) (см. рисунок).

Решение второго уравнения системы (1) будем искать в виде

$$i = i_0 + n_1 x^2 i_r, \tag{15}$$

где i_0 удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon_2 u \frac{\partial}{\partial t}\left(u \frac{\partial i_0}{\partial t}\right) + \frac{3}{2} t u \frac{\partial i_0}{\partial t} - \frac{1}{2} x u \frac{\partial i_0}{\partial x} = -\varepsilon_3 u^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2; \tag{16}$$

$$i_0(0, x) = 0, \quad i_0(x, x) = 1.$$

Тогда для i_r получим краевую задачу

$$\varepsilon_2 u \frac{\partial}{\partial t}\left(u \frac{\partial i_r}{\partial t}\right) + \frac{3}{2} t u \frac{\partial i_r}{\partial t} - \frac{1}{2} x u \frac{\partial i_r}{\partial x} - u i_r = -q, \tag{17}$$

$$i_r(0, x) = i_r(x, x) = 0.$$

Анализ краевой задачи (16) показывает, что для достаточно больших x_1 ($x_1 \geqslant 3$) функция i_0, как и скорость частиц u, зависит только от $t_{\text{ш}}$. Полагая для простоты Pr = 1, найдем

$$i_0 = u_0\left(\frac{2+k}{2} - \frac{k}{2} u_0\right), \tag{18}$$

где

$$k = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}.$$

Решение краевой задачи (17)

$$i_r = i_{0r} + i_{1r}, \tag{19}$$

где i_{0r} удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 i_{0r}}{\partial v^2} + \frac{3}{2} \varphi(v) \frac{\partial i_{0r}}{\partial v} - \varphi'(v) i_{0_r} = -q \tag{20}$$

и граничным условиям

$$i_{0r} = 0 \text{ при } v = 0 \text{ и } v = \bar{v}. \tag{21}$$

Здесь v, $\bar{v}$ и $\varphi(v)$ по-прежнему определяются формулами (10).

Пусть $G(v, v', \bar{v})$ — функция Грина краевой задачи (20), (21). Тогда (20), (21) могут быть сведены к интегральному уравнению

$$i_{0r} = -\int_0^{\bar{v}} G(v, v', \bar{v})\, q\, dv'. \tag{22}$$

Построение функции Грина $G(v, v', \bar{v})$ в общем случае требует применения численных методов. При некоторых упрощающих предположениях можно найти функцию Грина в конечном виде. Положим

$$\varphi(v) = v, \quad \varphi'(v) = 1. \tag{23}$$

Аппроксимация (23) использовалась при отыскании приближенного решения (14) уравнения для скорости частиц.

С учетом соотношения (23) вместо уравнения (22) получим

$$i_{0r} = \Phi(v) \int_0^v QF(v)\,dv + \dot{F}(v) \int_v^{\bar{v}} Q\Phi(v)\,dv, \tag{24}$$

где

$$\Phi(v) = F\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}v^2\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} vF\left(\frac{1}{6}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}v^2\right);$$

$$F(v) = vF\left(\frac{1}{6}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}v^2\right), \quad Q = q\exp\left(\frac{3}{4}v^2\right);$$

$F(a, b, x)$ — вырожденные гипергеометрические функции Похгаммера.

Подставив (15), (20) в (17) и отбросив в полученном выражении члены, содержащие малый параметр ε_2, придем к уравнению для функции i_{1r}, решение которого, удовлетворяющее граничным условиям (21), имеет вид

$$i_{1r} = \begin{cases} \frac{1}{3} x \int\limits_{\left(\frac{t^*}{x}\right)^3}^{1} \Phi\left(x\zeta^{\frac{1}{3}}, \frac{t}{\zeta}\right) d\zeta & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \left(\frac{t^*}{x}\right)^3 t^* \\ \frac{1}{3} x \int\limits_{\left(\frac{t^*}{x}\right)^{3/4}}^{1} \Phi\left(x\zeta^{\frac{1}{3}}, \frac{t}{\zeta}\right) d\zeta & \text{при} \quad x \geqslant t \geqslant \left(\frac{t^*}{x}\right)^3 t^* \end{cases} \tag{25}$$

где

$$\Phi(x, t) = \frac{\partial i_{0r}}{\partial x}.$$

Таким образом, энтальпия излучающего газа в ударном слое конуса определяется из системы интегральных уравнений (24), (25) с учетом соотношений (15), (18), (19). Решение этой системы можно искать методом итераций, причем для обеспечения лучшей сходимости процесса, как показали расчеты, в качестве исходного приближения удобно выбрать некоторую функцию с одним или несколькими неопределенными параметрами, которые подбираются так, чтобы при подстановке указанной функции в (24), (25) эти уравнения точно выполнялись при некоторых значениях переменной v. После этого вычисляется первое приближение для энтальпии. Следующие приближения строятся обычным путем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.

2. Любимов Г. А. Обтекание тел потоком неидеального газа с большими сверхзвуковыми скоростями. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 1.

3. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. ИЛ, 1962.

4. Колтон Г. А. Течение излучающего газа в окрестности критической точки тупоносого тела. Вестник ЛГУ, 1964, № 13.

5. Колтон Г. А. Обтекание конуса гиперзвуковым потоком невязкого излучающего газа. Вестник ЛГУ, 1965, № 7.