Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LII, вып. 3, 1974 г.

ЗАДАЧА ОБ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЯЗКОСТИ ДЛЯ КВАЗИСТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА

А. М. Луценко

Для установления соотношений между деформациями и напряжениями вязкоупругого тела на основе его статистической микронеоднородности была построена система уравнений: [1]

$$\mu\dot{\varepsilon}^b_{ij} + m\varepsilon^b_{ij} = \langle\sigma_{ij}\rangle + m\langle\varepsilon^b_{ij}\rangle,$$

$$\varepsilon^y_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2G}, \quad \varepsilon^y_{ij} + \varepsilon^b_{ij} = \varepsilon_{ij},$$

$$\langle\sigma_{ij}\rangle = \int_0^\infty \sigma_{ij}(t, \mu)\, df(\mu), \tag{1}$$

$$\langle\varepsilon_{ij}\rangle = \int_0^\infty \varepsilon^b_{ij}(t, \mu)\, df(\mu),$$

где $f(\mu)$ — интегральная функция распределения вязкости; σ_{ij} — тензор напряжений; ε^y_{ij} — тензор упругих деформаций; ε^b_{ij} — тензор вязких деформаций; m — характеристика материала; $2G$ — модель упругости материала; t — время. Угловыми скобками показаны осредненные величины.

Решение системы (1) для одномерного случая преобразованием Лапласа можно записать в виде

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{2G} + \int_0^t \sigma(\tau) F(t-\tau)\, d\tau, \tag{2}$$

где $F(t)$ — оригинал функции,

$$\varphi(p) = \frac{f(p)}{1 - mf(p)}, \tag{3}$$

а

$$f(p) = \int_0^\infty \frac{df(\mu)}{\mu p + m}, \tag{4}$$

[1] А. М. Луценко и др. Квазистатистическая модель вязкоупругого тела. Изв. вузов «Технология легкой промышленности», № 5, 1969.

т. е. решение (1) полностью зависит от функций распределения вязкости (p — комплексная переменная в преобразовании Лапласа).

Соотношения между деформациями и напряжениями (2) установлены для частного случая задания ступенчатой функции распределения и совпадали по форме с соотношениями для n-мерной реологической модели в классе экспоненциальных ядер.

Интеграл (4) предъявляет ряд требований к интегральной функции распределения: отсутствие особенностей при $m = 0$; реализация оригинала $F(t)$ и т. д. Изображение (4) по формуле Меллина с учетом обобщенной теоремы о перемене порядка интегрирования под знаком двойного интеграла [1] записывается как

$$f(t) = \int_0^t \frac{e^{-\frac{m}{\mu}t}}{\mu} df(\mu). \tag{5}$$

Выражение (5) определяет выбор интегральной функции распределения.

Зададим плотность распределения относительно обратной вязкости в виде

$$p(\mu) = \frac{1}{(\alpha-2)!}\left(\frac{1}{\mu}\right)^{\alpha} e^{-\frac{1}{\mu}} \qquad 0 \leqslant \mu < \infty, \quad \alpha \geqslant 2, \tag{6}$$

известном под названием гаммы-распределения [1]. Для нее выполняются все перечисленные условия.

Для установления функции $F(t)$, являющейся ядром интегрального уравнения (2), необходимо в силу соотношения (3) определить резольвенту ядра

$$f(t-\tau) = \frac{\alpha - 1}{[1 + m(t-\tau)]^{\alpha}}, \tag{7}$$

которая достигается аппроксимацией монотонно убывающей функции (7) суммой экспонент целого и дробного порядков.

Для различных вязкоупругих материалов, естественно, разными будут параметры m и $\alpha(m)$, определяемые, например, из опытов на растяжение. Поэтому искомая функция $F(t)$, соответствующая функции распределения, взятой в виде гаммы-распределения, может быть представлена суммой n затухающих экспоненциальных функций.

Любую убывающую функцию нетрудно разложить в ряд по затухающим показательным функциям с конечным или бесконечным числом членов. Поэтому суммой экспоненциальных ядер можно аппроксимировать любое ядро, полученное в результате различного задания интегральной функции распределения. Если функция распределения случайной величины вязкости μ задана в виде гаммы-распределения, то связь между напряжениями и деформациями (2) вязкоупругого тела может быть установлена в зависимости от аппроксимации функции (7) экспонентами целого или дробного порядка для любого пути напряжения с учетом статистической неоднородности материала.

---

[1] Д. Худсон. Статистика для физиков. «Мир», 1967.