

К ВОПРОСУ О БИГАРМОНИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КРУГОВОГО СЕКТОРА

В. Г. Лабазин

Введем необходимые обозначения в связи с постановкой бигармонической задачи для кругового сектора. Пусть область D — круговой сектор радиуса a с центральным углом α ; (C) — контур этой области (см. рисунок).

Будем искать функцию W , удовлетворяющую в (D) бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 W = 0 \quad (1)$$

и на (C) краевым условиям

$$W|_{(C)} = f(s), \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \nu} \right|_{(C)} = g(s), \quad (3)$$

где $f(s)$ и $g(s)$ — данные функции дуги s контура (C) ; ν — единичный вектор внешней нормали к (C) .

Введем систему полярных координат. Тогда, учитывая, что контур (C) состоит из трех частей, краевые условия (2) и (3) можно записать в развернутом виде следующим образом:

$$W(\rho, \varphi) = \begin{cases} f_1(\rho) & \text{на } (C_1), & \varphi = 0, & 0 \leq \rho \leq a, \\ f_2(\varphi) & \text{на } (C_2), & \rho = a, & 0 \leq \varphi \leq \alpha, \\ f_3(\rho) & \text{на } (C_3), & \varphi = \alpha, & 0 \leq \rho \leq a; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial W}{\partial \varphi} &= g_1(\rho) & \text{на } (C_1), \\ \frac{\partial W}{\partial \nu} = \frac{\partial W}{\partial \rho} &= g_2(\varphi) & \text{на } (C_2), \\ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial W}{\partial \varphi} &= g_3(\rho) & \text{на } (C_3). \end{aligned} \quad (5)$$

В условиях (4) и (5) функции $f_1(\rho)$, $f_2(\varphi)$, $f_3(\rho)$, $g_1(\rho)$, $g_2(\varphi)$ и $g_3(\rho)$ предполагаются заданными для соответствующих пределов изменения своих аргументов.

Из (5) следует, что $\frac{\partial W}{\partial \varphi}$ удовлетворяет условиям

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = -\rho g_1(\rho), \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\alpha} = \rho g_3(\rho) \quad 0 \leq \rho \leq a.$$

В соответствии с методикой Гринберга [2, 3] и Рафальсона [5], заменим бигармоническое уравнение (1) системой уравнений

$$\Delta w = u; \quad (7)$$

$$\Delta u = 0. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) (Δ — оператор Лапласа) ищем в виде ряда

$$u = a_0 \psi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \psi_k^{(1)} + b_k \psi_k^{(2)}], \quad (9)$$

где $\psi_0 = N_0$;

$$\begin{aligned} \psi_k^{(1)} &= N_k \rho^{\frac{2\pi k}{a}} \cos \frac{2\pi k \varphi}{a}; \\ \psi_k^{(2)} &= N_k \rho^{\frac{2\pi k}{a}} \sin \frac{2\pi k \varphi}{a}. \end{aligned} \quad (10)$$

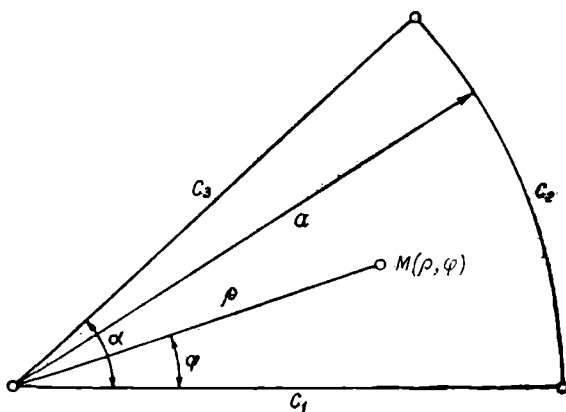
Нормировочные постоянные N_k выбраны так, чтобы

$$\int \int_{(D)} \psi_k^{(2)} d\sigma = 1; \quad \int \int_{(D)} [\psi_k']^2 d\sigma = 1; \quad \int \int_{(D)} [\psi_k^{(2)}]^2 d\sigma = 1.$$

Отсюда легко получить

$$\begin{aligned} N_0^2 &= \frac{2}{a^2 \alpha}; \\ N_k^2 &= \frac{2}{a} \cdot \frac{\frac{4\pi k}{a} + 2}{\frac{4\pi k}{a} + 2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, система функций (10) нормирована и, очевидно, ортогональна в круговом секторе (D).



Система обозначений

Для определения a_k из (9), пользуясь свойством ортонормировки функций (10), получим выражение

$$a_k = \int \int_{(D)} U \psi_k' d\sigma$$

или с учетом (7)

$$a_k = \int \int_D \Delta W \psi_k^{(1)} d\sigma.$$

Далее, применив к последнему равенству известную формулу Грина

$$\int \int_{(D)} (U \Delta V - V \Delta U) d\sigma = \int_{(C)} \left(U \frac{\partial V}{\partial \nu} - V \frac{\partial U}{\partial \nu} \right) ds,$$

получаем

$$a_k = \int \int_D W \Delta \psi_k^{(1)} d\sigma + \int_{(C)} \left(\psi_k^{(1)} \frac{\partial W}{\partial \nu} - W \frac{\partial \psi_k^{(1)}}{\partial \nu} \right) ds.$$

Так как W и $\frac{\partial W}{\partial \nu}$ заданы на (C) краевыми условиями (2) — (3) или (4) — (5), коэффициенты a_k оказываются выраженными через известные функции.

Аналогично определяются коэффициенты

$$a_k = \int_{(C)} \left(\psi_k^{(1)} \frac{\partial W}{\partial \nu} - W \frac{\partial \psi_k^{(1)}}{\partial \nu} \right) ds;$$

$$a_0 = \int_{(C)} \left(\psi_0 \frac{\partial W}{\partial \nu} - W \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} \right) ds;$$

$$b_k = \int_{(C)} \left(\psi_k^{(2)} \frac{\partial W}{\partial \nu} - W \frac{\partial \psi_k^{(2)}}{\partial \nu} \right) ds.$$

Для дальнейших вычислений находим нормальные производные от ψ_0 , $\psi_k^{(1)}$, $\psi_k^{(2)}$ на частях контура C_1 , C_2 , C_3 (см. рисунок). Затем используем краевые условия (4) и (5). После некоторых преобразований получим

$$a_0 = N_0 \int_0^a [g_1(\rho) + g_3(\rho)] d\rho + N_0 a \int_0^a g_2(\varphi) d\varphi;$$

$$a_k = N_k \int_0^a [g_1(\rho) + g_3(\rho)] \rho^{\frac{2\pi k}{a}} d\rho + \\ + N_k a^{\frac{2\pi k}{a}} \int_0^a \left[a g_2(\varphi) - \frac{2\pi k}{a} f_2(\varphi) \right] \cos \frac{2\pi k \varphi}{a} d\varphi; \quad (12)$$

$$b_k = N_k \int_0^a [f_1(\rho) - f_3(\rho)] \rho^{\frac{2\pi k}{a}-1} d\rho + N_k a^{\frac{2\pi k}{a}} \int_0^a \left[a g_2(\varphi) - \frac{2\pi k}{a} f_2(\varphi) \right] \sin \frac{2\pi k \varphi}{a} d\varphi.$$

Для упрощения этих формул положим

$$\begin{aligned} g_1(\rho) + g_3(\rho) &= g(\rho); \\ f_3(\rho) - f_1(\rho) &= f(\rho). \end{aligned} \quad (13)$$

Кроме того, введем в рассмотрение коэффициенты Фурье функций $f_2(\varphi)$ и $g_2(\varphi)$

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{2}{a} \int_0^a f_2(\varphi) \cos \frac{2\pi k \varphi}{a} d\varphi; \\ \beta_k &= \frac{2}{a} \int_0^a f_2(\varphi) \sin \frac{2\pi k \varphi}{a} d\varphi; \\ \alpha'_k &= \frac{2}{a} \int_0^a g_2(\varphi) \cos \frac{2\pi k \varphi}{a} d\varphi; \\ \beta'_k &= \frac{2}{a} \int_0^a g_2(\varphi) \sin \frac{2\pi k \varphi}{a} d\varphi, \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (14)$$

Соотношения (12) с учетом обозначений (13) и (14) запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} a_0 &= N_0 \int_0^a g(\rho) d\rho + \frac{N_0 a \alpha \alpha'_0}{2}; \\ a_k &= N_k \int_0^a g(\rho) \rho^{\frac{2\pi k}{\alpha}} d\rho + \frac{N_k \alpha}{2} a^{\frac{2\pi k}{\alpha}} \left(\alpha \alpha'_k - \frac{2\pi k}{\alpha} \alpha_k \right); \\ b_k &= -N_k \int_0^a \frac{2\pi k}{\alpha} f(\rho) \rho^{\frac{2\pi k}{\alpha}-1} d\rho + \frac{N_k \alpha}{2} a^{\frac{2\pi k}{\alpha}} \left(\alpha \beta'_k - \frac{2\pi k}{\alpha} \beta_k \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Итак, для $U = \Delta W$ получено выражение в виде ряда (9) или, что то же самое, в виде ряда

$$U = \Delta W = a_0 N_0 + \sum_{k=1}^{\infty} N_k \left(a_k \cos \frac{2\pi k \varphi}{\alpha} + b_k \sin \frac{2\pi k \varphi}{\alpha} \right) \rho^{\frac{2\pi k}{\alpha}} \quad (16)$$

Коэффициенты последнего ряда определяются по формулам (11), (13), (14), (15) через известные краевые условия и другие входные данные задачи.

Дальнейшая работа по определению функции $W(\rho, \varphi)$ — решения бигармонической задачи — сводится к решению уравнения Пуассона (7)

$$\Delta W = U,$$

где U определяется рядом (16). Г. А. Гринберг [3] рекомендует в связи с этим решать задачу Дирехле или Неймана для функции W с использованием условия (2) или (3). В работе [4] решение этой задачи получено при помощи второй формулы Грина, однако вычислительные трудности оказались весьма значительными и получить решение для полукруга в достаточно обобщимой форме не удалось.

Ниже предлагается способ определения функции W из уравнения $\Delta W = U$ с одновременным использованием условий Дирехле и Неймана. При этом сразу решается неоднородное уравнение Лапласа приемом, аналогичным методу Гринберга [1].

Будем искать решение уравнения $\Delta W = U$ в виде ряда Фурье

$$W(\rho, \varphi) = \frac{a_0(\rho)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k(\rho) \cos \frac{2\pi k \varphi}{\alpha} + b_k(\rho) \sin \frac{2\pi k \varphi}{\alpha} \right]. \quad (17)$$

Коэффициенты $a_0(\rho)$, $a_k(\rho)$, и $b_k(\rho)$ определим следующим образом. Уравнение для W в развернутом виде

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} = U(\rho, \varphi), \quad (18)$$

где $U(\rho, \varphi)$ — известная функция, определяемая рядом (16). Умножим (18) на $\frac{2}{\alpha} \cos \frac{2\pi k \varphi}{\alpha}$ и проинтегрируем от 0 до α по переменной φ

$$\begin{aligned} \frac{2}{\alpha} \frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2} \cos \frac{2\pi k \varphi}{\alpha} d\varphi + \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial W}{\partial \rho} \cos \frac{2\pi k \varphi}{\alpha} d\varphi + \\ + \frac{1}{\rho^2} \int_0^{\alpha} \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \cos \frac{2\pi k \varphi}{\alpha} d\varphi = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} U(\rho, \varphi) \cos \frac{2\pi k \varphi}{\alpha} d\varphi. \end{aligned}$$

Преобразуем это равенство, применив к интегралу, содержащему $\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2}$, дважды правило интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \cdot \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} W(\rho, \varphi) \cos \frac{2\pi k \varphi}{\alpha} d\varphi + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} W(\rho, \varphi) \cos \frac{2\pi k \varphi}{\alpha} d\varphi + \\ + \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\partial W}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{2\pi k}{\alpha} \right)^2 \int_0^{\alpha} W(\rho, \varphi) \cos \frac{2\pi k \varphi}{\alpha} d\varphi = \\ = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} U(\rho, \varphi) \cos \frac{2\pi k \varphi}{\alpha} d\varphi. \quad (19) \end{aligned}$$

Заметим, что $a_k(\rho)$ можно найти из (17) непосредственно как коэффициент Фурье функции $W(\rho, \varphi)$

$$a_k(\rho) = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} W(\rho, \varphi) \cos \frac{2\pi k \varphi}{\alpha} d\varphi. \quad (20)$$

Далее, $\frac{\partial W}{\partial \varphi}$ при $\varphi = 0$ и $\varphi = \alpha$ задается краевыми условиями (6). С учетом (6) и (20) уравнение (19) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_k(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{da_k(\rho)}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{2\pi k}{\alpha} \right)^2 a_k(\rho) = \\ = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} U(\rho, \varphi) \cos \frac{2\pi k \varphi}{\alpha} d\varphi - \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{1}{\rho} [g_3(\rho) + g_1(\rho)]. \end{aligned}$$

Согласно (16), аналогично

$$\begin{aligned} b_k(\rho) \big|_{\rho=a} &= \beta_k; \\ a_0(\rho) \big|_{\rho=a} &= \alpha_0. \end{aligned}$$

Далее, продифференцируем (20) по ρ

$$\frac{da_k}{d\rho} = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} \frac{\partial W}{\partial \rho} \cos \frac{2\pi k \varphi}{\alpha} d\varphi.$$

Положив здесь $\rho = a$ и учитывая условие (5),

$$\frac{\partial W}{\partial \rho} \bigg|_{\rho=a} = g_2(\varphi),$$

получим

$$\frac{da_k}{d\rho} \bigg|_{\rho=a} = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} g_2(\varphi) \cos \frac{2\pi k \varphi}{\alpha} d\varphi = \alpha'_k.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{db_k}{d\rho} \bigg|_{\rho=a} &= \beta'_k; \\ \frac{da_0}{d\rho} \bigg|_{\rho=a} &= \alpha'_0; \end{aligned}$$

числа α_0 , α_k , β_k , α'_0 , α'_k , β'_k находятся по формулам (14).

Таким образом, для определения функций $a_k(\rho)$ ($k = 0, 1, \dots$) и $b_k(\rho)$ ($k = 1, 2, \dots$) составлены уравнения (21), (22), (23) с начальными условиями

$$\begin{aligned} a_k|_{\rho=a} &= \alpha_k; \\ \frac{da_k}{d\rho} \Big|_{\rho=a} &= \alpha'_k; \\ b_k|_{\rho=a} &= \beta_k; \end{aligned}$$

$$\frac{2}{a} \int_0^a U(\rho, \varphi) \cos \frac{2\pi k}{a} d\varphi = a_k N_k \rho^{\frac{2\pi k}{a}}$$

(по свойству ортогональности тригонометрической системы функций). Далее, учитывая обозначение (13), $g(\rho) = g_1(\rho) + g_3(\rho)$, окончательно получаем следующее уравнение для $a_k(\rho)$:

$$\frac{d^2 a_k}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{da_k}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{2\pi k}{a} \right)^2 a_k = a_k N_k \rho^{\frac{2\pi k}{a}} - \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{\rho} g(\rho). \quad (21)$$

Аналогично составляются уравнения для $b_k(\rho)$ и $b_0(\rho)$. Опуская вычисления, приводим результат

$$\frac{d^2 b_k}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{db_k}{d\rho} - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{2\pi k}{a} \right)^2 b_k = b_k N_k \rho^{\frac{2\pi k}{a}} + \frac{2}{a} \left(\frac{2\pi k}{a} \right) \frac{1}{\rho^2} f(\rho); \quad (22)$$

$$\frac{d^2 a_0}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{da_0}{d\rho} = 2a_0 N_0 - \frac{2}{a} \cdot \frac{1}{\rho} g(\rho). \quad (23)$$

Уравнения (21), (22) представляют собой неоднородные уравнения Эйлера. Для составления начальных условий (20) положим $\rho = a$ и учтем, что при этом $W = f_2(\varphi)$. Согласно (4), получим

$$a_k(\rho)|_{\rho=a} = \frac{2}{a} \int_0^a f_2(\varphi) \cos \frac{2\pi k \varphi}{a} d\varphi = \alpha_k$$

(использованы обозначения (14)).

$$\frac{db_k}{d\rho} \Big|_{\rho=a} = b'_k.$$

Эти уравнения можно проинтегрировать при любых функциях $f(\rho)$ и $g(\rho)$ методом вариации произвольных постоянных. Опуская достаточно громоздкие вычисления, приведем окончательные выражения $a_k(\rho)$ и $b_k(\rho)$

$$a_0(\rho) = \alpha_0 + a\alpha'_0 \ln \frac{a}{\rho} - \frac{a_0 N_0}{a} \left(a^2 \rho - \frac{\rho^3}{a} + \frac{2}{3} a^3 \right) + \frac{2}{aa} \int_0^a g(z) (\rho - z) dz; \quad (24)$$

$$\begin{aligned} a_k(\rho) = & \frac{a}{2\gamma_k} \left[a^{\gamma_k-1} (\alpha_k \gamma_k - \alpha'_k a) \rho^{-\gamma_k} + a^{-\gamma_k-1} (\alpha_k \gamma_k + \alpha'_k a) \rho^{\gamma_k} \right] - \\ & - \frac{\rho^{\gamma_k}}{2\gamma_k} \left[a_k N_k \frac{\rho^{2\gamma_k+2} - a^{2\gamma_k+2}}{2\gamma_k+2} \right] + \\ & + \frac{\rho^{\gamma_k}}{2\gamma_k} \left[a_k N_k \frac{(\rho^2 - a^2)}{2} \right] - \frac{\rho^{-\gamma_k}}{2\gamma_k} \int_0^a \frac{g(\rho)}{\rho} \rho^{\gamma_k+1} d\rho + \\ & + \frac{\rho^{\gamma_k}}{2\gamma_k} \cdot \frac{2}{a} \int_0^a \frac{1}{\rho} g(\rho) \rho^{-\gamma_k+1} d\rho; \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_k(\rho) = & \frac{a}{2\gamma_k} \left[a^{\gamma_k-1} (\beta_k \gamma_k - \beta'_k a) \rho^{-\gamma_k} + \right. \\
& + a^{-\gamma_k-1} (\beta_k \gamma_k + \beta'_k a) \rho^{\gamma_k} - \frac{\rho^{-\gamma_k}}{2\gamma_k} \left[b_k N_k \frac{\rho^{2\gamma_k+2} - a^{2\gamma_k+2}}{2\gamma_k + 2} \right] + \\
& + \frac{\rho^{\gamma_k}}{2\gamma_k} \left[b_k N_k \frac{(\rho^2 - a^2)}{2} \right] + \frac{\rho^{-\gamma_k}}{2\gamma_k} \cdot \frac{2}{a} \gamma_k \int_{\rho}^a \frac{1}{\rho^2} f(\rho) \rho^{\gamma_k H} d\rho - \\
& - \frac{\rho^{\gamma_k}}{2\gamma_k} \cdot \frac{2}{a} \gamma_k \int_{\rho}^a \frac{1}{\rho^2} f(\rho) \rho^{-\gamma_k+1} d\rho. \quad (26)
\end{aligned}$$

В формулах (24)–(26) положено $\gamma_k = \frac{2\pi k}{a}$, величины a_0 , a_k и b_k определяются формулами (15), N_0 и N_k — согласно (11), $g(\rho)$, $f(\rho)$, α_k , β_k , α'_k , β'_k — по формулам (13) и (14).

Итак, коэффициенты ряда (17), дающего решение бигармонической задачи для кругового сектора, определяются формулами (24)–(26).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. АН СССР, 1948.
2. Гринберг Г. А. О решении плоской задачи теории упругости и задачи об изгибе тонкой плиты с закрепленным контуром. ДАН СССР, т. XXVI, 1951.
3. Гринберг Г. А., Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С. Метод решения общей бигармонической задачи для прямоугольной области. Прикладная математика и механика, т. XVII, вып. 1, 1953.
4. Лабазин В. Г., Федорова Г. М. Об одном общем методе решения бигармонической задачи. Зап. ЛГИ, т. XLIII, вып. 3, 1964.
5. Рафальсон З. Х. К вопросу о решении бигармонического уравнения. ДАН СССР, т. LXIV, № 8, 1964.