Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова т. LII, вып. 3, 1974 г.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВОКРУГ ГОРНОЙ ВЫРАБОТКИ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ВЛИЯНИЮ ОЧИСТНЫХ РАБОТ

А. Г. Протосеня

Подготовительные горные выработки обычно испытывают воздействие опорного давления, вызванного проведением очистных работ. Для решения ряда практических вопросов большое значение имеет качественная и количественная оценка этого воздействия на напряженное состояние пород вблизи них. Впервые влияние очистного забоя на распределение напряжений в окрестности выработки квадратной формы с гладким контуром исследовалось А. С. Космодамианским [5]. На практике, однако, они встречаются различных форм с гладкими и неровными контурами.

Исследуем напряженное состояние упругих изотропных горных пород вблизи незакрепленной полевой выработки круглого, квадратного, сводчатого, эллиптического поперечного сечения с гладким контуром и круглого с неровным, испытывающим воздействие очистных работ. Очистная выработка моделируется горизонтальной щелью, что соответствует режиму очистных работ до первой посадки непосредственной кровли [2, 6], а также при некоторых условиях режиму ее установившегося сдвижения. Рассмотрим случай, когда упругие свойства угольного пласта и вмещающих пород достаточно близки. Задача решается в рамках классической теории упругости.

В окрестности очистного забоя могут возникать зоны предельного равновесия, которые, по принципу Сен-Венана, вносят существенное изменение в напряженное состояние пород в непосредственной близости этого забоя и не сказываются на удалении от него.

Напряженное состояние вокруг выработки, как известно, можно смоделировать распределением напряжений в бесконечной плоскости [3], и, следовательно, наша задача — определить их в этой плоскости с горизонтальной щелью и отверстием, сжимаемой усилиями на бесконечности в вертикальном направлении γH и в горизонтальном $\lambda\gamma H$ (рис. 1). Здесь H — глубина заложения выработки; γ — средний объемный вес горных пород; λ — коэффициент бокового распора.

Рассмотрим случай, когда центры очистной и подготовительной выработок с контурами L_0 и L_1 лежат на одной линии и первая из них значительно больше второй. Задача решается методом Шварца, и при этом считается, что рассматриваемая выработка оказывает незначительное влияние на распределение напряжений в окрестности очистного забоя. Это положение наблюдается [4], если расстояние между выработками больше или равно двум диаметрам меньшей.

Сначала найдем распределение напряжений в бесконечной плоскости, ослабленной одной очистной выработкой. Нами используется метод, предложенный в работе [5].

Решение плоской задачи теории упругости, как известно, сводится к определению функций $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ комплексного переменного из следующего условия [5; 7]:

$$\varphi(t) + (t - \bar{t})\varphi'(t) + \chi(t) = \gamma H\left(-\frac{1+\lambda}{2}t + \frac{1-\lambda}{2}\bar{t}\right), \qquad (1)$$

где t — аффикс точки на контуре очистной выработки.

Горизонтальная щель с достаточной для практических расчетов точностью может быть описана отверстием эллиптической формы, в котором вертикальная полуось во много раз меньше горизонтальной.

Функция, отображающая внешность эллипса на внешность единичного круга λ_1, имеет вид

$$z - l = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{c_1}{\zeta}\right). \qquad (2)$$

Здесь

$$R = \frac{a+b}{2}; \qquad c_1 = \frac{a-b}{a+b}, \qquad (3)$$

где a и b — полуоси эллипса; l — расстояние между центрами выработок. На контуре λ_1 $\zeta = \sigma = e^{i\theta}$.

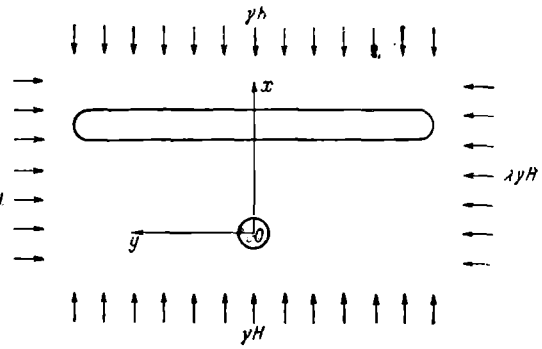


Рис. 1. Расчетная схема определения напряжения вокруг подготовительной выработки

Введем функции $\varphi_1^*(\zeta) = \varphi_1[\omega(\zeta)]$, $\chi_1(\zeta) = \chi_1[\omega(\zeta)]$. При этом граничное условие преобразуется к виду

$$\varphi_1^*(\sigma) + \frac{(1-c_1)\left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right)}{1 - c_1\sigma^2}\varphi_1^*(\sigma) + \chi_1^*(\sigma) = $$

$$= -\frac{\gamma HR}{2}(1-c_1)\left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right) - \frac{\lambda\gamma HR}{2}(1+c_1)\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right). \qquad (4)$$

По методу Мусхелишвили [7] имеем

$$\varphi_1^*(\zeta) = \frac{\gamma HR}{2\zeta}(1-c_1) - \frac{\lambda\gamma HR}{2}(1+c_1)\frac{1}{\zeta}; \qquad (5)$$

$$\chi_1^*(\zeta) = \frac{\gamma HR}{2}(1-c_1)\frac{1+\zeta^2(c_1-2)}{\zeta(\zeta^2-c_1)} - \frac{\lambda\gamma HR}{2}(1+c_1)\frac{1-2c_1+c_1\zeta^2}{\zeta(\zeta^2-c_1)}. \qquad (6)$$

Перейдем к нахождению дополнительных напряжений, вызванных появлением подготовительной выработки. Функции $\varphi_1^*(\zeta)$ и $\chi_1^*(\zeta)$ являются аналитическими во внешности эллиптического отверстия, и их можно разложить в сходящийся ряд Тейлора в круге, который охватывает контур L_1. Это разложение справедливо и для точек контура L_1.

Рассмотрим случай действия только горизонтальных усилий. Для точек контура L_1 имеем

$$\varphi_1^* = -\frac{\lambda\gamma HR}{2}(1+c_1)\sum_{k=0}^{N} A_k z^k;$$

$$\chi_1^* = -\frac{\lambda\gamma HR}{2}(1+c_1)\sum_{k=0}^{N} B_k z^k, \qquad (7)$$

где

$$A_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k}\left(\frac{1}{\zeta}\right)_{z=0}; \qquad B_k = \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^k}{dz^k}\left[\frac{1 - 2c_1 + c_1\zeta^2}{\zeta(\zeta^2 - c_1)}\right]_{z=0} \tag{8}$$

Граничное условие на контуре L_1 для определения функций $\varphi_0(z)$ и $\chi_0(z)$, характеризующих дополнительные напряжения, которые появятся за счет образования горной выработки, имеет вид

$$\varphi_0(t) + (t - \bar{t})\overline{\varphi_0'}(t) + \overline{\chi_0}(t) = -\frac{\lambda\gamma H}{2}(t + \bar{t}) = \left[\varphi_1^* + (t - \bar{t})\overline{\varphi_1^{*\prime}} + \overline{\chi_1^*}\right]. \tag{9}$$

Для получения эффективного решения задачи достаточно в разложении (7), как показывают расчеты, удержать два члена. При этом граничное условие (9) будет

$$\varphi_0(t) + (t - \bar{t})\overline{\varphi_0'}(t) + \overline{\chi_0}(t) = -\frac{\lambda\gamma H}{2}(t + \bar{t}) +$$

$$+ \frac{\lambda\gamma HR}{2}(1 + c_1)[2A_1 t + A_2 t^2 + 2A_2 t\bar{t} + (B_1 - A_1)\bar{t}_1 + (B_2 + 2A_2)\bar{t}^2]. \tag{10}$$

В явном виде коэффициенты A_k и B_k $(k = 1,2)$ представятся так:

$$A_1 = -R^{-1}(g_0^2 - c_1)^{-1}; \quad A_2 = g_0^3 R^{-2}(g_0^2 - c_1)^{-3};$$

$$B_1 = -[C_2 g_0^4 - (3 - 6c_1 + c_1^2)g_0^2 + c_1](g_0^2 - c_1)^{-3} R^{-1};$$

$$B_2 = g_0^3[c_1 g_0^4 + (6 - 12C_1 + 4C_1^2)g_0^2 + c_1^3](g_0^2 - c_1)^{-5} R^{-2}, \tag{11}$$

где

$$g_0 = -\frac{l}{2R}\left(1 + \sqrt{1 - 4c_1 R^2 l^{-2}}\right). \tag{12}$$

Функцию, отображающую внешность контура подготовительной выработки на внешность единичного круга [1], примем в виде

$$z = \omega_1(\zeta) = R_1\left(\zeta + \frac{c_2}{\zeta^m}\right), \tag{13}$$

где R_1, c_2, m — величины, определяющие соответственно размеры, очертание и форму контура выработки (при $m = 0$ и $c_2 = 0$ — окружность; $m = 1{,}0 < c_2 < 1$ — эллипс; $m = 2$, $c_2 = 0{,}1$ — контур, близкий к сводчатому; $m = 3$, $c_2 = -\frac{1}{9}$ — квадрат). Выбор отображающей функции в виде (13) позволяет также исследовать распределение напряжений вокруг выработки круглой формы с неровным контуром. В этом случае c_2 — амплитуда возмущений в долях R_1; m — целое число возмущений без единицы.

Введем функции

$$\varphi_0^*(\zeta) = \varphi_0[\omega_1(\zeta)]; \qquad \chi_0^*(\zeta) = \chi_0[\omega_1(\zeta)]. \tag{14}$$

Из граничного условия (10) методом Мусхелишвили найдем уравнение для определения функции $\varphi_0^*(\zeta)$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \zeta^{-j} - c_2 \sum_{j=1}^{m-2} j\bar{\alpha}_j \zeta^{1+j-m} = \frac{\lambda\gamma H}{2} R_1\left(\frac{c_2}{\zeta^m} + \frac{1}{\zeta}\right) +$$

$$+ \frac{\lambda\gamma HR(1 + c_1)}{2}\left[2A_1 R_1 \frac{c_2}{\zeta^m} + A_2 c_2 R_1^2\left(\frac{2}{\zeta^{m-1}} + \frac{c_2}{\zeta^{2m}} + \frac{2}{\zeta^{m+1}}\right) +\right.$$

$$\left. + (B_1 - A_1) R_1 \frac{1}{\zeta} + (B_2 + 2A_2) R_1^2 \frac{1}{\zeta^2}\right], \tag{15}$$

где α_j — коэффициенты, подлежащие определению.

Сравнивая в уравнении (15) коэффициенты при одинаковых степенях ζ до $2-m$ степени получим систему из $m-2$ уравнений. Отделяя действительные и мнимые части, разбиваем ее на две системы. При этом считается, что определители этих систем отличны от нуля. Указанное условие, как показывают расчеты, обычно выполняется. Обозначим определитель первой системы через Λ. Тогда вторая система имеет нулевое решение, а решение первой представляется в виде

$$\alpha_j = \frac{\Lambda_j}{\Lambda}, \qquad j = 1,\ 2, \qquad m-2. \tag{16}$$

Здесь Λ_j — определитель, полученный из Λ заменой столбца j в матрице столбцом из свободных членов.

Внеся коэффициенты (16) во вторую сумму выражения (15), найдем значение функции

$$\varphi_0^*(\zeta) = c_2 \sum_{j=1}^{m-2} j \frac{\Lambda_j}{\Lambda} \cdot \frac{1}{\zeta^{m-j-1}} - \frac{\lambda\gamma H}{2} R_1 \left(\frac{c_1}{\zeta^m} + \frac{1}{\zeta}\right) + \\ + \frac{\lambda\gamma HR\,(1+C_1)}{2} \left[2A_1R_1 \frac{c_2}{\zeta^m} + A_2C_2R_1^2 \left(\frac{2}{\zeta^{m-1}} + \frac{c_2}{\zeta^{2m}} + \frac{2}{\zeta^{m+1}}\right) + \right. \\ \left. + (B_1 - A_1)\, \bar{R}_1 \frac{1}{\zeta} + (B_2 - 2A_2)\, R_1^2 \frac{1}{\zeta^2}\right]. \tag{17}$$

Функция $\chi_0^*(\zeta)$, определенная из граничного условия, сопряженного (3), представится так

$$\chi_0^*(\zeta) = \left(c_2 - \frac{\zeta^{m-1} + c_2^{2m} - \zeta^{m+1} - c_2}{\zeta^{2m} - mc_2\zeta^{m-1}}\right) \left\{ - C_2 \sum_{j=1}^{m-2} j\,(m-j-1) \frac{\Lambda_j}{\Lambda} \zeta^j + \right. \\ + \frac{\lambda\gamma HR_1}{2} \zeta^{m-2} - \frac{\lambda\gamma HR}{2} (1+c_1) \left[2A_2c_2\,(m-1)\, R_1^2\zeta^2 + (B_1 - A_1)\, R_1\zeta^{m-2} + \right. \\ \left. \left. + 2\,(B_2 - 2A_2)\, R_1^2\zeta^{m-3}\right]\right\} - \frac{\lambda\gamma HR_1}{2} \left(\frac{c_2}{\zeta^m} + \frac{1}{\zeta}\right) + \frac{\lambda\gamma HR}{2} (1+c_1) \left[2A_1R_1 \frac{1}{\zeta} + \right. \\ \left. + A_2R_1^2 \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{2c_2}{\zeta^{m+1}}\right) + \frac{(B_1 - A_1)\, R_1C_2}{\zeta^m} + (B_2 - 2A_2)\, c_2 \left(\frac{2}{\zeta^{m-1}} + \frac{c_2}{\zeta^{2m}}\right)\right]. \tag{18}$$

Аналогичным образом находятся функции $\varphi_0^{**}(\zeta)$ и $\chi_0^{**}(\zeta)$, характеризующие дополнительные напряжения, возникшие за счет образования горной выработки в случае действия только вертикальных усилий. Они имеют вид

$$\varphi_0^{**}(\zeta) = c_2 \sum_{j=1}^{m-2} j \frac{\Lambda' j}{\Lambda} \cdot \frac{1}{\zeta^{m-j-1}} + \frac{\gamma H}{2} R_1 \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{c_2}{\zeta^m}\right) - \\ - \frac{\gamma HR\,(1-c_1)}{2} \left[2A_1R_1 \frac{c_2}{\zeta^m} + A_2R_1^2c_2 \left(\frac{2}{\zeta^{m-1}} + \frac{c_2}{\zeta^{2m}} + \frac{2}{\zeta^{m+1}}\right) + \right. \\ \left. + (B_1^* - A_1)\, R_1 \frac{1}{\zeta} + (B_2^* - 2A_2)\, R_1^2 \frac{1}{\zeta^2}\right]; \tag{19}$$

$$\chi_0^{**}(\zeta) = \left(C_2 - \frac{\zeta^{m-1} + c_2\zeta^{2m} - \zeta^{m+1} - c_2}{\zeta^{2m} - mc_2\zeta^{m-1}}\right) \left\{ - c_2 \sum_{j=1}^{m-2} j \frac{\Lambda' j}{\Lambda} (m-j-1)\, \zeta^j - \right. \\ - \frac{\gamma H}{2} R_1\zeta^{m-2} + \frac{\gamma HR}{2} (1-c_1) \left[2A_2R_1^2\,(m-c_1)\, c_2\zeta^2 + (B_1^* - A_1)\, R_1\zeta^{m-2} + \right. \\ \left. \left. + 2\,(B_2^* - 2A_2)\, R_1^2\zeta^{m-3}\right]\right\} - \frac{\gamma HR}{2} \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{c_2}{\zeta^m}\right) - \\ - \frac{\gamma HR}{2} (1+c_1) \left[2A_1R_1 \frac{1}{\zeta} + A_2R_1^2 \left(\frac{1}{\zeta^2} + \frac{2c_2}{\zeta^{m+1}}\right) + \right. \\ \left. + \frac{(B_1^* - A_1)\, R_1C_2}{\zeta^m} + (B_2^* - 2A_2)\, R_1^2 \left(2c_2 \frac{1}{\zeta^{m-1}} + \frac{c_2^2}{\zeta^{2m}}\right)\right]. \tag{20}$$

Здесь определители Λ, Λ_j' находятся из уравнения (21), аналогичного (15),

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \zeta^{-j} - c_2 \sum_{j=1}^{m-2} j\bar{\alpha}j \frac{1}{\zeta^{m-j-1}} = \frac{\gamma H R_1}{2}\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{c_2}{\zeta^m}\right) -$$

$$- \frac{\gamma H R}{2}(1-c_1)\left[2A_1 R_1 \frac{c_2}{\zeta^m} + A_2 R_1^2 c_2\left(\frac{2}{\zeta^{m-1}} + \frac{c_2}{\zeta^{2m}} + \frac{2}{\zeta^{m+1}}\right) + \right.$$

$$\left. + (A_1^* - B_1) R_1 \frac{1}{\zeta} + (B_2^* - 2A_2) R_1^2 \frac{1}{\zeta^2}\right]. \qquad (21)$$

Поэтому имеем

$$\alpha_j = \frac{\Lambda_j}{\Lambda}; \quad j = 1, 2, \quad m-2, \qquad (22)$$

где Λ_j' — определитель, полученный из Λ заменой столбца j в матрице столбцом из свободных членов системы (21).

Коэффициенты B_1^*, B_2^* в явном виде записываются так:

$$B_1^* = [g_0^4(c_1-2) + g_0^2(3-2c_1+c_1^2) - c_1](g_0^2 - c_1)^{-3} R^{-1}; \qquad (23)$$

$$B_2^* = [g_0^7(2-c_1) + 2g_0^5(3-4c_1+2c_1^2) + g_0^4 c_1^2(2-c_1)](g_0^5 - c_1)^{-5} R^{-2}.$$

В данной задаче наибольший интерес представляет нахождение напряжений на контуре выработки. Они могут быть определены по известной формуле [7]

$$\sigma_\theta + \sigma_\rho = 4 \operatorname{Re} \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \qquad (24)$$

где σ_ρ, σ_θ — соответственно радиальное и окружное нормальные напряжения.

Напряжение σ_θ на контуре горной выработки при действии только горизонтальных усилий найдем, внеся в формулу (24) функции основного (25) и дополнительных полей (5), (17), значение отображающего функции (13) и отделив действительные и мнимые части, учтя при этом, что $\sigma_\rho = 0$, $\rho = 1$

$$\varphi^0(z) = \frac{\lambda}{4}\gamma H z; \qquad (25)$$

$$\sigma_\theta = \lambda\gamma H + \frac{4}{1 - 2mc_2\cos(m+1)\theta + m_2 c_2^2}\left\{ - \frac{c_2}{R_1}\sum_{j=1}^{m-2} j \frac{\Lambda_j}{\Lambda}(m-j-1) \times \right.$$

$$\times [\cos(m-j)\theta - mc_2\cos(j+1)\theta] + \frac{\lambda\gamma H}{2}[M_0 + A_2 R_1 R M_1(1+c_1)\cos\theta +$$

$$+ M_2\cos 2\theta - 2RR_1(1+c_1)(B_2 - A_2)\cos 3\theta + M_{m-1}\cos(m-1)\theta +$$

$$\left. + M_{m-2}\cos(m-2)\theta + mc_2(m+1)\theta - 2RR_1 A_2 c_2(1-c_1)\cos(m+2)\theta]\right\}, \qquad (26)$$

где

$$M_0 = -m^2c_2^2 - A_1 R(1+c_1) + A_1 R m^2 c_2^2(1+c_1);$$

$$M_1 = 2(-1 + mc_2^2 + m^2c_2^2);$$

$$M_2 = 1 - R(1-c_1)(B_1 - A_1);$$

$$M_{m-2} = 2RR_1 mC_2(1+c_1)(B_2 - 2A_2);$$

$$M_{m-1} = -mc_2 + mc_2 R(1+c_1)(B_1 - A_1).$$

Напряжение на контуре горной выработки в случае действия только вертикальных усилий

$$\sigma_\theta = \gamma H + \frac{4}{1 - 2mc_2\cos(m+1)\theta + m^2c_2^2}\left\{ -\frac{c_2}{R_1}\sum_{j=1}^{m-2} j\frac{\Lambda'_j}{\Lambda}(m-j-1)\times\right.$$

$$\times[\cos(m-j)\theta - mc_2\cos(j+1)\theta] + \frac{\gamma H}{2}[M_0^* - RR_1A_2M_1(1-c_1)\cos\theta +$$

$$+ M_2^*\cos 2\theta + 2RR_1(1-c_1)(B_2^* - 2A_2)\cos 3\theta + M_{m-1}^*\cos(m-1)\theta +$$

$$\left. + M_{m-2}^*\cos(m-2)\theta + mc_2\cos(m+1)\theta + M_{m+2}^*\cos(m+2)\theta]\right\},$$

где

$$M_0^* = m^2c_2^2 + A_1R(1-c_1) - A_1Rm^2c_2^2(1-c_1);$$

$$M_2^* = -1 + R(1-c_1)(B_1^* - A_1);$$

$$M_{m-1}^* = mc_2 - mc_2R(1-c_1)(B_1^* - A_1);$$

$$M_{m-2}^* = -2RR_1mc_2(B_2^* - 2A_2);$$

$$M_{m+2}^* = 2RR_1A_2c_2(1-c_1).$$

Найдем значение напряжений σ_θ на контуре выработки круглой формы с гладким и неровным контурами, расположенной на расстоянии от очистного забоя, равном семи полумощностям угольного пласта. Исходные данные для расчета: $\frac{l}{a} = 7$; $\frac{b}{a} = 20$; $\lambda = 1$; $c_1 = \frac{19}{21}$; $\frac{R}{a} = 10{,}5$; $\frac{R_1}{a} = 1$, $c_2 = 0$ и $m = 0$ — при гладком контуре; $m = 7$ и $c_2 = 0{,}0715$ — при неровном (рис. 2). Для гладкого контура произведем еще расчет напряжений σ_θ при тех же исходных данных, но при другом расстоянии выработки от очистного забоя, а именно $\frac{l}{a} = 15$.

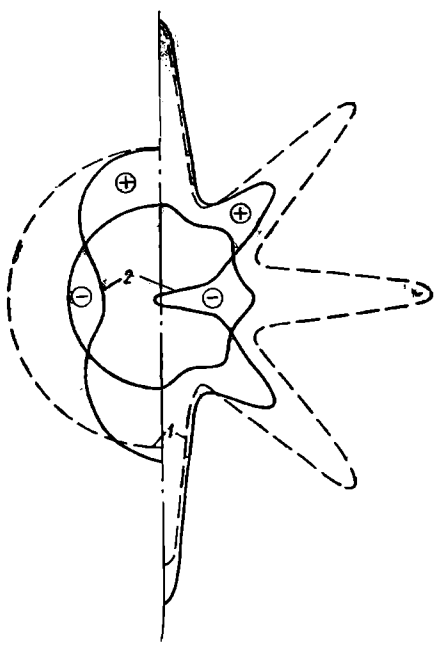


Рис. 2. Эпюры распределения напряжений σ_θ по гладкому и неровному контурам горной выработки круглого поперечного сечения:
1 — без влияния очистных работ; *2* — при расстоянии от очистной выработки $l = 7a$

При расчетах (см. таблицу) учитывалось, что усилия в горизонтальном направлении при данном расположении очистной выработки весьма незначительно влияют на величину напряжений вокруг подготовительной [5].

Значения напряжений σ_θ^* относятся к одиночной выработке, т. е. случаю отсутствия очистного забоя.

Анализ результатов расчета показывает, что на расстоянии $l = 7a$ влияние очистной выработки существенно. При этом в боках подготовительной выработки возникают растягивающие напряжения, коэффициент концентрации которых значителен. С увеличением расстояния воздействие очистного забоя уменьшается. Неровности контура приводят к весьма неравномерному распределению напряжений σ_θ по нему.

Напряжения σ_θ на контуре горной выработки

$\theta°$	$\frac{l}{a}=7$				$\frac{l}{a}=15$
	Гладкий контур		Неровный контур		Гладкий контур
	$\sigma_\theta/\gamma H$	$\sigma^*_\theta/\gamma H$	$\sigma_\theta/\gamma H$	$\sigma^*_\theta/\gamma H$	$\sigma_\theta/\gamma H$
0	1,94	2,00	6,10	6,00	1,10
22,5	1,70	2,00	0,69	0,67	1,20
45	0,70	2,00	2,23	6,00	1,24
67,5	—0,80	2,00	—0,43	0,67	1,12
90	—1,08	2,00	—3,37	6,00	1,00
112,5	—0,81	2,00	—0,67	0,67	0,96
135	0,40	2,00	2,20	6,00	1,12
157,5	1,84	2,00	0,79	0,67	1,36
180	2,24	2,00	7,35	6,00	1,50

Предложенный метод определения напряжений σ_θ вблизи подготовительной выработки может быть использован для выбора рационального расположения ее относительно очистной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баклашов И. В., Руппенейт К. В. Прочность незакрепленных горных выработок. Недра, 1965.
2. Борисов А. А. Расчеты горного давления в лавах пологих пластов. Недра, 1964.
3. Динник А. Н., Моргаевский А. Б., Савин Г. Н. Распределение напряжений вокруг подземных горных выработок. Труды совещания по управлению горным давлением. АН СССР, 1938.
4. Космодамианский А. С. О напряженном состоянии упругого изотропного массива, в котором пройдены выработки круглого сечения. Сб. тр. ВНИМИ, т. 42, 1961.
5. Космодамианский А. С. Растяжение изотропной пластинки с двумя неодинаковыми криволинейными отверстиями. Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений, равновесии и колебаниях упругих тел. Изд. Саратовского ун-та, 1964.
6. Кузнецов С. В. Некоторые закономерности и соотношения, определяющие посадку лавы. «Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых». 1965, № 5.
7. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Наука, 1966.