Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LII, вып. 3, 1974 г.

К ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ РАЗРАБОТКЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЕЙСТВИЕМ ВЗРЫВА НАКЛАДНОГО ЗАРЯДА

Д. Н. Климова, К. И. Огурцов

При взрывании заряда на какой-либо твердой деформируемой среде с целью уплотнения, образования углублений или разрушения интуитивно заботятся об обеспечении в соответствующих областях поверхности значительных величин вертикальных смещений или скоростей смещений частиц. Максимальные смещения (или скорости) ожидаются в тех областях граничной поверхности, на которых создаются наибольшие сжимающие нормальные напряжения. Касательные напряжения при свободном взрывании заряда на поверхности считаются значительно меньше нормальных, и ими часто пренебрегают. Пренебрегают и горизонтальными смещениями, которые вдали от пункта взрыва естественно убывают согласно принципу излучения, а в пункте взрыва при симметрии должны равняться нулю.

Эти пренебрежения в какой-то степени находят оправдание, особенно при переходе от сосредоточенного к достаточно плавно распределенному по поверхности воздействию.

Хотя довольно сложные динамические процессы, протекающие в среде при интенсивных воздействиях, как правило, не описываются линейной теорией упругости, ее применяют для оценок характера поля смещений и напряжений на первых этапах деформации среды. Эти оценки позволяют выявить области, в которых в первую очередь следует ожидать появления трещин (в случае хрупких материалов) или текучести с последующими остаточными деформациями (в случае пластических сред).

Динамические задачи теории упругости при взрывах накладных зарядов обычно формулируются как задачи на определение смещений при заданных (сосредоточенных или различным способом распределенных) нормальных и нулевых касательных напряжениях. При этом сталкиваются очень часто с довольно громоздкими вычислениями. С вычислительной точки зрения оправдана и другая формулировка граничных условий.

Представляется естественным задавать, кроме нулевых касательных напряжений, нормальные смещения (вместо нормальных напряжений). Теоремы существования и единственности решения по-прежнему остаются справедливыми. Формулы же их оказываются несколько проще. По ним легче оценивать некоторые величины, которыми можно пренебречь в той или иной области, а также нетрудно определить соответствующие нормальные напряжения на границе, позволяющие ориентироваться, как распределять заряды по границе, в каком порядке и с

каким замедлением их взрывать, чем качественно должны отличаться заряды друг от друга для обеспечения в разных точках границы давлений, зависимость от времени которых определяется строгим решением задачи динамики упругого тела.

Такого рода задачи существенно отличаются от более сложных задач о действии штампов, когда на одной части границы задаются смещения, а другая часть свободна от напряжений.

Рассмотрим примеры таких задач, демонстрируя попутно удобства некоторых приемов построения и исследования решений методом интегральных преобразований в форме, специфичной для работ Г И. Петрашеня и его учеников.

Предположим, что на границе упругого полупространства $z \geqslant 0$, находящегося первоначально в покое, задаются в момент времени $t = 0$ нормальные смещения w и касательные напряжения τ_{xz} в виде

$$\omega|_{z=0} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} f(t), \quad t > 0, \quad \tau_{xz}|_{z=0=0}, \tag{1}$$

где постоянная ε — некоторый параметр, выбор которого обеспечивает достаточно резкое изменение смещений в начале координат.

Ради краткости записи будем опускать несущественные постоянные множители, характеризующие размерность величин.

Поскольку воздействие не меняется вдоль оси y декартовой системы координат, в полупространстве будет осуществляться плоская деформация и динамическую задачу для полупространства при нулевых начальных данных и граничных условиях (1) можно решать как плоскую. При этом она, как известно, сводится к решению волновых уравнений для скалярного φ и векторного ψ потенциалов

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \end{aligned} \tag{2}$$

где a и b означают скорости распространения продольных и поперечных волн,

$$a = \frac{\sqrt{\lambda + 2\mu}}{\sqrt{\rho}}, \qquad b = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \qquad \gamma = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}},$$

а λ, μ и ρ — соответственно, упругие постоянные Ляме и плотность.

Параллельная граница u и нормальная к ней w составляющие вектора смещений выражаются через потенциалы равенствами

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}; \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{3}$$

а нормальные σ_x, σ_z и касательные τ_{xz} напряжения по формулам обобщенного закона Гука и формулам (3) равенствами

$$\sigma_x = \mu \left[\frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1 - 2\gamma^2}{\gamma^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \cdot \partial z} \right]; \tag{4}$$

$$\sigma_z = \mu \left[\frac{1 - 2\gamma^2}{\gamma^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \cdot \partial z} \right]; \tag{5}$$

$$\tau_{xz} = \mu \left[2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right], \tag{6}$$

в которых введено отношение скоростей распространения волн, зависящее лишь от коэффициента Пуассона ν.

Согласно равенствам (1), (6) и второму из равенств (3), граничные условия для потенциалов запишутся в виде

$$\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]_{z=0}=0; \tag{7}$$

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]_{z=0}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}f(t)=\frac{f(t)}{\pi}\int_0^\infty e^{-k\varepsilon}\cos kx\,dk. \tag{8}$$

Здесь правая часть граничных условий (1) для удобства дальнейших преобразований представлена в интегральном виде косинус-преобразования Фурье.

Начальные же условия будут нулевыми

$$\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\psi=\frac{\partial\psi}{\partial t}=0 \quad \text{при} \quad t=0. \tag{9}$$

Решение поставленной задачи легко находится методом интегральных преобразований. Учитывая, что при граничных условиях (7), (8) φ четно, а ψ нечетно относительно переменной x (поскольку в формулах (3) левая часть первого равенства нечетна, а вторая четна в силу симметрии воздействия), будем искать потенциалы в виде интегралов

$$\varphi=\int_0^\infty A(z,t,k)\cos kx\,dk, \quad \psi=\int_0^\infty B(z,t,k)\sin kx\,dk, \tag{10}$$

в которых функции A и B подлежат определению.

Подставляя эти интегралы в равенства (2), (7), (9) и приравнивая подынтегральные выражения (интегралы Фурье равны лишь при условии равенства подынтегральных выражений), получим уравнения, а также граничные и начальные условия для неизвестных функций A и B

$$\frac{\partial^2A}{\partial z^2}-k^2A=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2A}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2B}{\partial z^2}-k^2B=\frac{1}{b^2}\cdot\frac{\partial^2B}{\partial t^2}; \tag{11}$$

$$\left[-2k\frac{\partial A}{\partial z}-k^2B-\frac{\partial^2B}{\partial z^2}\right]_{z=0}=0, \quad \left[\frac{\partial A}{\partial z}+kB\right]_{z=0}=\frac{1}{\pi}e^{-k\varepsilon}f(t); \tag{12}$$

$$A=\frac{\partial A}{\partial t}=B=\frac{\partial B}{\partial t}=0 \quad \text{при} \quad t=0. \tag{13}$$

Применяя теперь к уравнениям (11) и граничным условиям (12) одностороннее преобразование Лапласа и вводя новые неизвестные функции

$$P=\int_0^\infty A(z,t,k)\,e^{-st}\,dt; \quad S=\int_0^\infty B(z,t,k)\,e^{-st}\,dt, \tag{14}$$

получим, попутно используя равенства (13), уравнения

$$\frac{d^2P}{dz^2}-\left(k^2+\frac{s^2}{a^2}\right)P=0; \quad \frac{d^2S}{dz^2}-\left(k^2+\frac{s^2}{b^2}\right)S=0, \tag{15}$$

которые следует решать при граничных условиях

$$\left[-2k\frac{dP}{dz}-k^2S-\frac{d^2S}{dz^2}\right]_{z=0}=0, \quad \left[\frac{dP}{dz}+kS\right]_{z=0}=\frac{1}{\pi}e^{-k\varepsilon}F(s), \tag{16}$$

где

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt. \tag{17}$$

Решения обыкновенных дифференциальных уравнений (15), удовлетворяющие условиям излучения (обращения в нуль при стремлении z к бесконечности), можно записать в виде

$$P = ce^{-z\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}}} \qquad S = de^{-z\sqrt{k^2+\frac{s^2}{b^2}}}$$
$$\left(\arg\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}} = \arg\sqrt{k^2+\frac{s^2}{b^2}} = 0 \quad \text{при} \quad s>0\right). \tag{18}$$

Подставляя их в граничные условия (16), получим систему линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными, из которой найдем постоянные c и d

$$c = -\frac{2k^2+\frac{s^2}{b^2}}{\pi\frac{s^2}{b^2}\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}}}e^{-k\varepsilon}F(s), \qquad d = \frac{2k}{\pi\frac{s^2}{b^2}}e^{-k\varepsilon}F(s). \tag{19}$$

Обратное интегральное преобразование Римана-Меллина функций P и S дают функции A и B, входящие в равенство (10).

Если функцию $f(t)$ в граничных условиях (1) задать для определенности в виде линейной функции (это удобно, как увидим далее, для вычисления интегралов Фурье при анализе напряжений), при анализе смещений в качестве $f(t)$ лучше брать функцию

$$f(t) = \begin{cases} t & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}, \tag{20}$$

то будем иметь $F(s) = s^{-2}$. Потенциалы (10) запишутся в виде двукратных интегралов

$$\varphi = -\frac{b^2}{2\pi^2 i}\int_0^\infty\int_l \frac{2k^2+\frac{s^2}{b^2}}{s^4\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}}}e^{st-z\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}}-k\varepsilon}\cos kx\,ds\,dk; \tag{21}$$

$$\psi = -\frac{b^2}{2\pi^2 i}\int_0^\infty\int_l \frac{2k}{s^4}e^{st-z\sqrt{k^2+\frac{s^2}{a^2}}-k\varepsilon}\sin kx\,ds\,dk, \tag{22}$$

в которых l означает некоторый контур ($\sigma - i\infty$, $\sigma + i\infty$, $\sigma > 0$) в правой полуплоскости комплексной переменной s, расположенной правее всех особых точек подынтегральных функций.

Выражая теперь тригонометрические функции через показательные

$$\cos kx = \operatorname{Re}\exp(ikx)$$
$$\sin kx = \operatorname{Re} i\exp(-ikx),$$

делая замену комплексной переменной интегрирования

$$s = bk\zeta \tag{23}$$

и вводя обозначения

$$g = 2+\zeta^2, \qquad \alpha = \sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}, \qquad \beta = \sqrt{1+\zeta^2}, \tag{24}$$

перепишем потенциалы (21) и (22) в виде

$$\varphi = \operatorname{Re} -\frac{1}{2\pi^2 i}\int_0^\infty\int_l \frac{g}{bs^4\alpha k^2}e^{k(bt\zeta - z\alpha - ix - \varepsilon)}d\zeta\,dk; \tag{25}$$

$$\psi = \operatorname{Re} -\frac{1}{2\pi^2 i}\int_0^\infty\int_l \frac{2i}{b\zeta^4 k^2}e^{k(bt\zeta - z\beta - ix - \varepsilon)}d\zeta\,dk. \tag{26}$$

Зная эти интегралы и используя формулы (4)—(6), нетрудно найти напряжения в виде интегралов, которые легко вычислить. В частности, для напряжений σ_z, подставляя (25) и (26) в формулу (5) и производя дифференцирование под знаком интегралов, имеем

$$\sigma_z = -\operatorname{Re}\frac{\mu}{2\pi^2 i}\int_0^\infty\int_l\left[\frac{g^2}{b\varsigma^4\alpha}e^{k(bt\zeta-z\alpha-ix-\varepsilon)}-\frac{4\beta}{b\zeta^4}e^{k(bt\zeta-z\beta-ix-\varepsilon)}\right]d\zeta\,dk. \qquad (27)$$

В виде таких же простых интегралов, где переменная интегрирования k входит лишь в показатель степени подынтегральных выражений, представляются и смещения, если в граничных условиях вместо функции $f(t)$ взять единичную функцию Хевисайда $H(t)$.

Особыми точками слагаемых, находящихся в квадратных скобках формулы (27), являются полюс четвертой кратности $\zeta = 0$ и точки ветвления $\zeta = \pm\frac{i}{\gamma}$, $\zeta = \pm i$, разрезы из которых для обеспечения однозначности радикалов α, β удобно проводить вдоль мнимой оси или в левую полуплоскость. При этом, приближая контур l к мнимой оси с обходом упомянутых особых точек, в формуле (27) можно поменять порядок интегрирования и выполнить интегрирование по k в пределах $(0, \infty)$, поскольку радикалы α и β на мнимой оси либо вещественные положительные, либо мнимые. Таким образом, выражения в простых скобках степени показательных функций перейдут в знаменатель и каждое слагаемое подынтегральной функции приобретает еще по одному простому полюсу

$$\zeta_1 = \frac{bt(\varepsilon+ix)+z\sqrt{b^2t^2-\gamma^2[z^2-(\varepsilon+ix)^2]}}{b^2t^2-\gamma^2z^2};$$
$$\zeta_2 = \frac{bt(\varepsilon+ix)+z\sqrt{b^2t^2-[z^2-(\varepsilon+ix)^2]}}{b^2t^2-z^2}, \qquad (28)$$

которые являются соответственно корнями уравнений

$$\Delta_1 = bt\zeta - z\alpha - ix - \varepsilon = 0;$$
$$\Delta_2 = bt\zeta - z\beta - ix - \varepsilon = 0. \qquad (29)$$

Применяя теорему вычетов[1] и выполняя элементарные преобразования, получим

$$\sigma_z = -\frac{\mu}{\pi b}\operatorname{Re}\left[\frac{g^2}{\zeta^4\sqrt{b^2t^2-\gamma^2[z^2-(\varepsilon+ix)^2}}\Bigg|_{\zeta=\zeta_1} - \right.$$
$$\left. - \frac{4\beta^2}{\zeta^4\sqrt{b^2t^2-[z^2-(\varepsilon+ix)^2}}\Bigg|_{\zeta=\zeta_1}\right]. \qquad (30)$$

Первое слагаемое этой формулы определяет поле напряжений при $bt \geqslant \gamma z$ (позади плоского фронта продольной волны), а второе при $bt \geqslant z$ (позади плоского фронта поперечной волны).

Легко проверить, что формула (30) не содержит поля головной поперечной волны с плоским фронтом, подставляя при $\varepsilon = 0$ во второе слагаемое ζ_2, соответствующее области впереди сферического фронта $bt < \sqrt{x^2+z^2}$. Она не содержит и поверхностных волн Релея.

При $bt = \gamma z$ корень ζ обращается в бесконечность и формула (30) дает

$$\sigma_z = -\frac{\mu}{\pi b\gamma}\cdot\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+x^2}. \qquad (31)$$

[1] Ж. М. Именитова, К. И. Огурцов. О нестандартном динамическом поле, возбуждаемом источником, движущимся по границе упругой полуплоскости. Изв. АН СССР, МТТ, № 3, 1967.

Это же значение, пропорциональное скорости смещений, будет при $t = 0$ на границе $z = 0$, для которой напряжения (30) при любых t выражаются более простой формулой

$$\sigma_z|_{z=0} = \frac{-\mu}{\pi b} \operatorname{Re} \frac{g^2 - 4\alpha\beta}{bt\zeta^4\alpha}\Big|_{\zeta=\frac{tx+\varepsilon}{bt}} = -\frac{\mu}{\pi b} \operatorname{Re} \frac{g^2 - 4\alpha\beta}{(\varepsilon + ix)\,\zeta^3\alpha}\Big|_{\zeta=\frac{tx+\varepsilon}{bt}}. \tag{32}$$

Напряжения по формуле (32) без труда вычисляются при произвольных t, x, ε. Рассмотрим простейшие случаи, когда эти вычисления совсем элементарны.

В начале координат $x = 0$ (на оси симметрии), согласно формуле (32), имеем

$$\sigma_z|_{\substack{z=0\\x=0}} = -\frac{\mu}{\pi b} \cdot \frac{(2b^2t^2 + \varepsilon^2)^2 - 4b^2t^2\sqrt{b^2t^2 + \varepsilon^2}\sqrt{b^2t^2 + \gamma^2\varepsilon^2}}{\varepsilon^4\sqrt{b^2t^2 + \gamma^2\varepsilon^2}}. \tag{33}$$

При $t = 0$ формула (33) дает значение $-\mu(\pi b\gamma\varepsilon)^{-1}$, что согласуется с (31). При больших t для нее получаем оценку

$$\sigma_z|_{\substack{z=0\\x=0}} \approx -\frac{2\mu(1-\gamma^2)t}{\pi\varepsilon^2}. \tag{34}$$

Предположим теперь, что требуется получить отличные от нуля нормальные смещения лишь в начале координат и равные нулю на остальной части границы. Для этого, очевидно, достаточно выполнить в формулах (32) предельный переход $\varepsilon \to 0$, обеспечивающий для вертикальных смещений при $x = 0$, $z = 0$ особенность типа δ-функции Дирака: $w = \delta(x)$. В результате, вводя обозначения $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\zeta|$ для модулей величин α, β, ζ (из которых две первых будут либо положительными вещественными, либо положительными мнимыми), находим

$$\sigma_z|_{\substack{z=0\\\varepsilon=0}} = 0, \quad \text{если} \quad t < \frac{|x|}{a}; \tag{35}$$

$$\sigma_z|_{\substack{z=0\\\varepsilon=0}} = -\frac{\mu}{\pi bx} \cdot \frac{g^2}{|\alpha|\,|\zeta|^3}\Big|_{\zeta=\frac{tx}{bt}}, \quad \text{если} \quad \frac{|x|}{a} < t \leqslant \frac{|x|}{b}; \tag{36}$$

$$\sigma_z|_{\substack{z=0\\\varepsilon=0}} = -\frac{\mu}{\pi bx} \cdot \frac{g^2 - 4|\alpha|\,|\beta|}{|\alpha|\,|\zeta|^3}\Big|_{\zeta=\frac{tx}{bt}}, \quad \text{если} \quad t \geqslant \frac{|x|}{b}. \tag{37}$$

Формула (36) показывает, что в момент прихода фронта продольной волны сжимающие напряжения обращаются в бесконечность и при t, близких к $\frac{|x|}{a}$, имеют оценку $\sigma_z \approx -\frac{\mu(1-2\gamma^2)\sqrt{a}}{\pi b^2\sqrt{|x|}\sqrt{t - |x|/a}}$. В момент прихода фронта поперечной волны $\sigma_z = -\frac{\mu}{\pi b|x|\sqrt{1-\gamma^2}}$.

Числитель выражения (37) обращается в нуль при $\frac{|x|}{bt} = \vartheta < 1$, где ϑ — модуль корней уравнения Релея $g^2 - 4\alpha\beta = 0$. Следовательно, с момента $t = \frac{x}{\vartheta b}$, когда должна была бы появиться волна Релея, вместо сжимающих к границе должны прикладываться растягивающие напряжения, которые при больших t имеют порядок

$$\sigma_z|_{\substack{z=0\\\varepsilon=0}} \approx \frac{2\mu(1-\gamma^2)t}{\pi x^2}. \tag{38}$$

Создание растягивающих нормальных напряжений на границе при помощи взрывов практически неосуществимо. Однако на первых

стадиях деформации среды они несущественны, так как полагать $\varepsilon = 0$ можно лишь на значительном расстоянии от центра заряда, а при не очень малых $\varepsilon > 0$ в окрестности упомянутого центра они либо совсем не возникают, либо возникают через достаточно большой интервал после момента взрыва. Этот интервал можно оценить, вычисляя напряжения для различных значений ε и t.

Пусть теперь граничные условия (1) имеют вид

$$\tau_{zx}|_{z=0} = 0;$$

$$w|_{z=0} = \frac{f(t)}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon} = \frac{f(t)}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin kx\, e^{-k\varepsilon}}{k}\, dk, \tag{39}$$

т. е. являются первообразной по x от функций, входящих в условия (1), (18). Подставив, кроме того, вместо $f(t)$ единичную функцию Хевисайда, получим вместо (27) формулу

$$\sigma_z = \operatorname{Re} \frac{\mu}{2\pi^2 i} \int_0^\infty \int_l \left[\frac{ig^2}{\zeta^3 \alpha} e^{k(bt\zeta - z\alpha - ix - \varepsilon)} - \frac{4i\beta}{\zeta^3} e^{k(bt\zeta - zb - ix - \varepsilon)} \right] d\zeta\, dk, \tag{40}$$

а вместо (30) формулу

$$\sigma_z = \frac{\mu}{\pi} \operatorname{Re} \left[\frac{ig^2}{\zeta^3 \sqrt{b^2t^2 - \pi^2[z^2 - (\varepsilon + ix)^2]}} \Big|_{\zeta=\zeta_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{4i\beta^2}{\zeta^3 \sqrt{b^2t^2 - [z^2 - (\varepsilon + ix)^2]}} \Big|_{\zeta=\zeta_2} \right]. \tag{41}$$

При выводе этой формулы из (40) после выполнения в ней интегрирования по k необходимо было в первом слагаемом, кроме вычета в точке $\zeta = \zeta_1$, учитывать еще интеграл по бесконечно большой полуокружности. Однако реальная часть от него оказалась равной нулю при $bt > \gamma z$.

Заметим, что формула (41) применима лишь при условии $bt > \gamma z$ (т. е. для области позади плоского фронта продольной волны). Очевидно, при скачкообразном изменении смещений напряжения на фронте должны иметь особенность типа δ функции Дирака.

Для оценки напряжений на фронте ослабим особенность в смещениях, взяв вместо функции Хевисайда линейную функцию $f(t) = v_0 t$ ($v_0 = \text{const}$), и в соответствии с этим, вводя в первое слагаемое формулы (40) дополнительный множитель $(vk\zeta)^{-1}$, вычислим интегралы от этого слагаемого

$$\sigma_z = \frac{\mu v_0}{2\pi_i^2} \int_0^\infty \int_l \frac{g^2}{b\zeta^4 \alpha} e^{k(bt\zeta - z\alpha)} \frac{e^{-k\varepsilon} \sin kx}{k}\, d\zeta\, dk. \tag{42}$$

Учитывая, что при $bt = \gamma z$ и больших ζ функция $\exp k(bt\zeta - z\alpha)$ обращается в единицу, деформируем контур l в полуокружность бесконечно большого радиуса в правой полуплоскости. Интеграл по этому контуру легко вычисляется.

В результате для напряжений на фронте получим формулу

$$\sigma_z|_{bt=\gamma z} = \frac{\mu}{2\pi b\gamma} \int_0^\infty \frac{e^{-k\varepsilon} \sin kx}{k}\, dk = \frac{aPv_0}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}. \tag{43}$$

Такие значения, пропорциональные скорости смещений, будут, очевидно, принимать напряжения и на границе $z = 0$ в момент $t = 0$.

В момент $t > 0$ на границе в случае воздействия типа включенной постоянной силы напряжения (42) определяются формулой

$$\sigma_z|_{z=0} = \frac{\mu}{\pi} \operatorname{Re}\left[\frac{i(g^2 - 4\alpha\beta)}{\zeta^2 \alpha (\varepsilon + ix)}\Big|_{\zeta=\frac{\varepsilon+ix}{bt}}\right]. \tag{44}$$

При $t \to \infty$, раскрывая неопределенность, получим формулу

$$\sigma_z|_{\substack{z=0 \\ t=\infty}} = -\frac{2\mu(1-\gamma^2)x}{\pi(\varepsilon^2 + x^2)}, \tag{45}$$

характеризующую статическое решение.

Имея решение (42) при воздействии (39) нетрудно, используя принцип наложения, найти решение для некоторых других источников. Например, заменяя в (42) x на $x - l$ и на $x + l$ и суммируя такие два решения с обратными знаками, можно получить решение для симметричного воздействия, главная часть которого располагается в промежутке $-l < x < +l$. В частном случае, когда $\varepsilon = 0$, оно вырождается в решение задачи [1]. При этом исключаются довольно громоздкие вычисления сверток бесселевых, тригонометрических и алгебраических функций.

---

[1] В. Л. Лобысев, Ю. С. Яковлев. Поля напряжений при движении поршня с жестким фланцем на границе с идеально упругой средой. Изв. АН СССР, МТТ, № 3, 1969.