Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LII, вып. 3, 1974 г.

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ В ПОТОЛОЧИНЕ

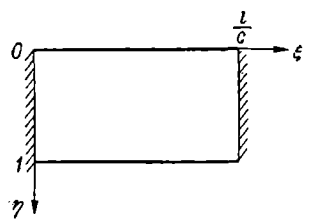
А. Ф. Захаревич

Исследование напряженного состояния в потолочинах и связанный с этим вопрос определения их прочных размеров до сих пор актуальны в горной промышленности.

Как известно, устойчивость потолочины определяют возникающие в ней растягивающие напряжения, наибольшее значение которых достигается на контуре выработки. Величина этих напряжений зависит от мощности потолочины, от упругих свойств слагающих пород кровли, от глубины заложения выработки и других причин.

Попытаемся определить напряженное состояние в потолочине над одиночной выработкой.

При этом рассмотрим идеализированную модель в отношении граничных условий и самих горных пород, составляющих потолочину.



Поперечное сечение потолочины

В силу сказанного представленное решение можно рассматривать только как первое приближение.

Потолочина трактуется как однородный изотропный призматический слой прямоугольного поперечного сечения, находящийся под действием собственного веса (см. рисунок).

В направлении, перпендикулярном к поперечному сечению, слой простирается бесконечно.

Две стороны поперечного сечения слоя считаются заделанными, а две другие — свободными. В таком случае слой будет находиться в условиях плоской деформации.

Обозначим высоту слоя $2c$, ширину $2l$, вес единицы материала γ, упругие постоянные — E, G, ν.

В работе [5] дано решение этой задачи с удовлетворением граничных условий только в нескольких точках каждой из заделанных сторон.

Проведем решение с более точным удовлетворением граничных условий в заделке.

Воспользуемся безразмерными координатами ξ, η.

Граничные условия на свободных сторонах при

$$\eta = 0, \quad \eta = 1, \qquad \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = 0.$$

Этим условиям можно удовлетворить, полагая

$$\sigma_x = \frac{\gamma(2\eta-1)}{10c}\left\{10c^2(2\eta-1)^2 - 15c^2\left(2\xi - \frac{l}{c}\right)^2 - 3(2c^2-5l^2)\right\};$$

$$\sigma_y = -2\gamma c(2\eta-1)\eta(\eta-1);$$

$$\tau_{xy} = \frac{3\gamma c}{2}\left(2\xi - \frac{l}{c}\right)[(2\eta-1)^2-1], \qquad (1)$$

при этом

$$\sigma_z = \frac{\gamma\nu}{10c}(2\eta-1)\left\{5c^2(2\eta-1)^2 - 15c^2\left(2\xi-\frac{l}{c}\right)^2 + 15l^2 - c^2\right\}.$$

Перемещения, отвечающие этой системе напряжений,

$$u = \frac{\gamma}{20G}\left(2\xi - \frac{l}{c}\right)(2\eta-1)\left\{-5c^2(1-\nu)\left(2\xi-\frac{l}{c}\right)^2 + 5c^2(2-\nu)(2\eta-1)^2 + 15l^2(1-\nu) + c^2(\nu-6)\right\};$$

$$v = \frac{\gamma}{80G}\left\{-5c^2(1+\nu)(2\eta-1)^4 + 30\nu c^2\left(2\xi-\frac{l}{c}\right)^2(2\eta-1)^2 + 5c^2(1-\nu)\left(2\xi-\frac{l}{c}\right)^4 - 2[c^2(24+\nu) + 15l^2(1-\nu)]\left(2\xi-\frac{l}{c}\right)^2 + 2[c^2(\nu+5) - 15\nu l^2](2\eta-1)^2\right\}. \qquad (2)$$

Граничные условия на заделанных сторонах при

$$\xi = 0 \quad \text{и} \quad \xi = \frac{l}{c} \qquad \begin{matrix} u = 0, \\ v = 0. \end{matrix} \qquad (3)$$

При такой постановке ограничено перемещение заделанной стороны поперечного сечения слоя как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях.

Точно удовлетворить граничные условия в заделке не представляется возможным, поэтому ограничимся удовлетворением этих условий приближенно. В силу симметрии задачи по отношению к средней линии поперечного сечения $\xi = 0{,}5\frac{l}{c}$ оказывается достаточным удовлетворить граничные условия на одной из заделанных сторон, при этом граничные условия на второй заделанной стороне удовлетворяются автоматически.

Найдем перемещения в заделке, полагая в формулах (2) $\xi = 0$,

$$u_1 = D_1(2\eta-1) + D_2(2\eta-1)^3;$$
$$v_1 = D_3 + D_4(2\eta-1)^2 + D_5(2\eta-1)^4, \qquad (4)$$

где

$$D_1 = -\frac{\gamma l}{20cG}[10l^2(1-\nu) + c^2(\nu-6)];$$

$$D_2 = -\frac{\gamma l c}{4G}(2-\nu); \qquad (5)$$

$$D_3 = -\frac{\gamma l^2}{80c^2G}[2(24+\nu)c^2 + 25l^2(1-\nu)];$$

$$D_4 = \frac{\gamma c^2}{40G}(\nu+5); \quad D_5 = -\frac{\gamma c^2(1+\nu)}{16G}.$$

Для выполнения граничных условий в заделке применим однородные решения уравнений теории упругости, позволяющие построить систему напряжений, которая нагружает заделанные и оставляет без нагрузки свободные стороны поперечного сечения слоя.

Таким образом, накладывая на уже полученные решения однородные решения, можно удовлетворить дополнительные условия в заделке, не испортив граничных условий на свободных сторонах.

Однородные решения для прямоугольной области строятся так: находится функция напряжений, которая дает на свободных сторонах, т. е. при $\eta = 0$ и $\eta = 1$, систему напряжений

$$\sigma_y^{(1)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(1)} = 0, \tag{6}$$

где индекс (1) указывает, что речь идет об однородных решениях.

Функция напряжений задается в виде ряда, каждый член которого содержит четыре произвольных постоянных. Определение их из условий (6) приводит к решению трансцендентного уравнения

$$\frac{\sin z}{z} = 1. \tag{7}$$

Систему комплексных корней с положительной вещественной частью этого уравнения обозначим через $q_n = \alpha_n + i\beta_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Первые пять значений этих корней приведены в [1; 6].

Воспользуемся для однородных решений комплексными выражениями, сокращающими запись [1—3]. В вещественной форме эти выражения даны в работе [5]. Однородные решения имеют вид

$$\sigma_x^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sigma_x'(q_n, \eta)\, a_n(\xi) + \sigma_x'(\bar{q}_n, \eta)\, \bar{a}_n(\xi)\right];$$

$$\tau_{xy}^{(1)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\tau_{xy}'(q_n, \eta)}{q_n} \cdot \frac{da_n(\xi)}{d\xi} + \frac{\tau_{xy}'(\bar{q}_n, \eta)}{\bar{q}_n} \cdot \frac{d\bar{a}(\xi)}{d\xi}\right]; \tag{8}$$

$$\sigma_y^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sigma_y'(q_n, \eta)\, a_n(\xi) + \sigma_y'(\bar{q}_n, \eta)\, \bar{a}_n(\xi)\right],$$

где

$$\sigma_x'(q_n\eta) = \sin q_n(1-\eta) - q_n\eta\cos q_n(1-\eta) - \sin q_n\eta + q_n(1-\eta)\cos q_n\eta,$$

$$\tau_{xy}'(q_n, \eta) = q_n\eta\sin q_n(1-\eta) + q_n(1-\eta)\sin q_n\eta,$$

$$\sigma_y'(q_n, \eta) = \sin q_n(1-\eta) + q_n\eta\cos q_n(1-\eta) - \sin q_n\eta - q_n(1-\eta)\cos q_n\eta \tag{9}$$

и

$$a_n(\xi) = c_n e^{-q_n\xi} + \mathscr{E}_n e^{-q_n\left(\frac{l}{c}-\xi\right)}$$

C_n и $\mathscr{E}_n$ — комплексные произвольные постоянные (черточка над буквой обозначает величину, сопряженную с рассматриваемой).

Перемещения, соответствующие напряжениям (8), таковы:

$$u^{(1)} = -\frac{c}{G}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{u'(q_n, \eta)}{q_n^2} \cdot \frac{da(\xi)}{d\xi} + \frac{u'(\bar{q}_n, \eta)}{\bar{q}_n^2} \cdot \frac{d\bar{a}(\xi)}{d\xi}\right];$$

$$v^{(1)} = -\frac{c}{G}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{v'(q_n, \eta)}{q_n}\, a(\xi) + \frac{v'(\bar{q}_n, \eta)}{\bar{q}_n}\, \bar{a}_n(\xi)\right], \tag{10}$$

где

$$u'(q_n, \eta) = \sigma_y'(q_n, \eta) + 2(1-\nu)\, S'(q_n, \eta); \tag{11}$$

$$v'(q_n, \eta) = \tau_{xy}'(q_n, \eta) - 2(1-\nu)\, C'(q_n, \eta),$$

причем

$$S'(q_n, \eta) = \sin q_n\eta - \sin q_n(1-\eta);$$

$$C'(q_n, \eta) = \cos q_n\eta + \cos q_n(1-\eta). \tag{12}$$

Заметим, что напряжения $\sigma_x^{(1)}$, $\sigma_y^{(1)}$ и перемещение $u^{(1)}$ в интервале $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ изменения переменной η являются антисимметричными функциями относительно точки $\eta = \frac{1}{2}$, напротив, $\tau_{xy}^{(1)}$ и $v^{(1)}$ будут симметричными функциями η.

Функции (9) и (12), через которые выражаются напряжения и перемещения однородных решений, табулированы для первых пяти корней уравнения (7). Табулирование функций (9) проведено Фадле [6], функции (12) табулированы нами [5, табл. I—VIII]. При этом для вещественных и мнимых частей этих функций приняты обозначения

$$\begin{aligned}
\sigma_x'(q_n, \eta) &= f_1(n, \eta) + if_2(n, \eta);\\
\sigma_y'(q_n, \eta) &= f_3(n, \eta) + if_4(n, \eta);\\
\tau_{xy}'(q_n, \eta) &= f_5(n, \eta) + if_6(n, \eta);\\
S'(q_n, \eta) &= f_7(n, \eta) + if_8(n, \eta);\\
C'(q_n, \eta) &= f_9(n, \eta) + if_{10}(n, \eta).
\end{aligned} \tag{13}$$

Таким образом, табулирована вся система функций для напряжений и перемещений, что значительно облегчает применение однородных решений.

Чтобы в поставленной задаче воспользоваться однородными решениями, надо перемещения, полученные по формулам (4), сложить с перемещениями (10) и, подчинив полученную сумму граничным условиям (3) на заделанных сторонах, найти произвольные постоянные.

Условия (3) принимают вид

$$\text{при } \xi = 0 \text{ и } \xi = \frac{l}{c} \quad \begin{aligned} u_1 + u_2 &= 0;\\ v_1 + v_2 &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

здесь u_2 и v_2 — перемещения в заделке, полученные по формулам (10).

В силу симметрии задачи напряжения и перемещения в заделках одинаковы, поэтому можно положить в (9) и (10) $C_n = \mathscr{E}_n$. Кроме того, в заделках, например, при $\xi = 0$, $e^{-q_n\xi} = 1$, а модуль множителя $e^{-q_n\left(\frac{l}{c}-\xi\right)}$ мал по сравнению с единицей.

В первом приближении, вполне достаточном для практики, можно пренебречь членами, содержащими множитель $e^{-q_n\frac{l}{c}}$. Это значит, что при рассмотрении граничных условий на одной из заделанных сторон не учитывается влияние другой заделанной стороны. Все это значительно облегчает применение формул (8) и (10).

Если высота поперечного сечения слоя значительно больше ширины, то вопрос об отбрасывании указанных членов должен решаться особо.

Для определения произвольных постоянных воспользуемся методом наименьших квадратов.

Пользуясь формулами (14), потребуем, чтобы

$$\delta \int_0^1 [(u_1 + u_2)^2 + (v_1 + v_2)^2]\, d\eta = 0. \tag{15}$$

Приравнивая к нулю множители при произвольных вариациях δC_n, получим бесконечную систему уравнений вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} [C_n' I(q_n, q_k) + \bar{C}_n' I(\bar{q}_n, q_k)] = H_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{16}$$

где

$$C'_n = \frac{C_n}{q_n}, \quad \overline{C}'_n = \frac{\overline{C}_n}{\bar{q}_n},$$

$$I(q_n, q_k) = \int_0^1 [u'(q_n, \eta)\, u'(q_k, \eta) + v'(q_n, \eta)\, v'(q_k, \eta)]\, d\eta;$$

$$I(\bar{q}_n, q_k) = \int_0^1 [u'(\bar{q}_n, \eta)\, u'(q_k \eta) + v'(\bar{q}_n \eta)\, v'(q_k, \eta)]\, d\eta; \tag{17}$$

$$H_k = -\frac{G}{c} \int_0^1 [u_1 u'(q_k, \eta) - v_1 v'(q_k, \eta)]\, d\eta. \tag{18}$$

Положим теперь

$$C'_n = C'^r_n + iC'^i_n;$$
$$\overline{C}'_n = C'^r_n - iC'^i_n;$$
$$I(q_n, q_k) = I^r_{nk} + iI^i_{nk};$$
$$I(\bar{q}_n, q_k) = \tilde{I}^r_{nk} + i\tilde{I}^i_{nk};$$
$$H_k = H^r_k + iH^i_k.$$

Тогда, отделяя вещественную и мнимую части в уравнениях (16), найдем систему уравнений для определения постоянных C'^r_n и C'^i_n

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[C'^r_n (I^r_{nk} + \tilde{I}^r_{nk}) + C'^i_n (-I^i_{nk} + \tilde{I}^i_{nk})\right] = H^r_k;$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[C'^r_n (I^i_{nk} + \tilde{I}^i_{nk}) + C'^i_n (I^r_{nk} - \tilde{I}^r_{nk})\right] = H^i_k, \quad k = 1, 2, \tag{19}$$

Эта система приведена в работе [3].

Подстановка в формулы (17) вместо u' и v' их выражений из (11), (9) и (12) дает

$$I(q_n, q_k) = \frac{8q_n^2 q_k^2 (\cos q_n - \cos q_k)}{(q_n^2 - q_k^2)(q_n - q_k)^2} +$$
$$+ 8(1-\nu)^2 \frac{(1+\cos q_n)(1+\cos q_k)}{\cos q_n + \cos q_k} - 8(1-\nu)\nu \frac{q_n q_k}{\cos q_n + \cos q_k} \quad \text{при } n \neq k; \tag{20}$$

$$I(q_n, q_n) = \frac{q_n^2}{3}(5 - \cos q_n) + 8(1-\nu)^2 (1 + \cos q_n).$$

Обозначим величины, входящие в (20),

$$J_{nk} = \frac{8q_n^2 q_k^2 (\cos q_n - \cos q_k)}{(q_n^2 - q_k^2)(q_n - q_k)^2};$$
$$J'_{nk} = \frac{(1+\cos q_n)(1+\cos q_k)}{\cos q_n + \cos q_k};$$
$$J''_{nk} = \frac{q_n q_k}{\cos q_n + \cos q_k}; \tag{21}$$
$$J_{nn} = \frac{q_n^2}{3}(5 - \cos q_n);$$
$$J'_{nn} = (1 + \cos q_n).$$

Аналогичные обозначения используем и для величин, входящих в выражения для $\tilde{I}_{nk}$ и $\tilde{I}_{nn}$.

Тогда можно написать

$$I(q_n, q_k) = I^r_{nk} + iI^i_{nk} = J_{nk} + 8(1-\nu)^2 J'_{nk} - 8(1-\nu)\nu J''_{nk}, \tag{22}$$

$$I(\bar{q}_n, q_k) = \tilde{I}^r_{nk} + i\tilde{I}^i_{nk} = \tilde{J}_{nk} + 8(1-\nu)^2 \tilde{J}'_{nk} - 8(1-\nu)\nu\tilde{J}''_{kn},$$

где

$$I^r_{nk} = J^r_{nk} + 8(1-\nu)^2 J'^r_{nk} - 8(1-\nu)\nu J''^r_{nk};$$

$$I^i_{nk} = J^i_{nk} + 8(1-\nu)^2 J'^i_{nk} - 8(1-\nu)\nu J''^i_{nk}; \tag{23}$$

Выражения для $\tilde{I}^r_{nk}$ и $\tilde{I}^i_{nk}$ строятся аналогично. Далее

$$I(q_n, q_n) = I^r_{nn} + iI^i_{nn} = J_{nn} + 8(1-\nu)^2 J'_{nn};$$

$$I(\bar{q}_n, \bar{q}_n) = \tilde{I}^r_{nn} + i\tilde{I}^i_{nn} = \tilde{J}_{nn} + 8(1-\nu)^2 \tilde{J}'_{nn}. \tag{24}$$

Величины I^r_{nn}, I^i_{nn}, $\tilde{I}^r_{nn}$ и $\tilde{I}^i_{nn}$ выписываются аналогично формулам (23).

Составим теперь комбинации из величин (23), входящие в уравнения (19),

$$I^r_{nk} + \tilde{I}^r_{nk} = J^r_{nk} + \tilde{J}^r_{nk} + 8(1-\nu)^2\left(J'^r_{nk} + \tilde{J}'^r_{nk}\right) - 8(1-\nu)\nu\left(J''^r_{nk} + \tilde{J}''^r_{nk}\right).$$

Обозначим

$$J^r_{nk} + \tilde{J}^r_{nk} = \psi^r_{nk};$$

$$J'^r_{nk} + \tilde{J}'^r_{nk} = \psi'^r_{nk};$$

$$J''^r_{nk} + \tilde{J}''^r_{nk} = \psi''^r_{nk}; \tag{25}$$

$$I^r_{nk} + \tilde{I}^r_{nk} = \Psi^r_{nk}.$$

Тогда

$$I^r_{nk} + I^r_{nk} = \Psi^r_{nk} = \psi^r_{nk} + 8(1-\nu)^2\psi'^r_{nk} - 8(1-\nu)\nu\psi''^r_{nk},$$

аналогично

$$I^r_{nk} - \tilde{I}^r_{nk} = \Phi^r_{nk} = \varphi^r_{nk} + 8(1-\nu)^2\varphi''^r_{n} - 8(1-\nu)\nu\varphi''^r_{nk};$$

$$\tilde{I}^i_{nk} - I^i_{nk} = \Psi^i_{nk} = \psi^i_{nk} + 8(1-\nu)^2\psi'^i_{kn} - 8(1-\nu)\nu\psi''^i_{nk}; \tag{26}$$

$$\tilde{I}^i_{nk} + I^i_{nk} = \Phi^i_{nk} = \varphi^i_{nk} + 8(1-\nu)^2\varphi'^i_{nk} - 8(1-\nu)\nu\varphi''^i_{nk}.$$

Обозначения величин, входящих в формулы (26), введены аналогично формулам (25).

Используя (26), систему (19) запишем так:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(C'^r_n\Psi^r_{nk} + C'^i_n\Psi^i_{nk}\right) = H^r_k; \tag{27}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(C''^r_n\Phi^i_{nk} + C'^i_n\Phi^r_{nk}\right) = H^i_k, \quad k = 1, 2,$$

При решении этой системы ограничимся рассмотрением конечного числа уравнений с конечным числом неизвестных. В дальнейшем ограничимся только пятью корнями уравнения (7), что доставляет десять уравнений с десятью неизвестными.

Коэффициенты уравнений (27) не зависят от частного вида задачи, которая решается, поэтому укороченную систему можно решить раз

навсегда для данного ν. При этом неизвестные будут линейным образом выражаться через постоянные, стоящие в правых частях этих уравнений.

Заметим, что величины J_{nk}, J_{nn}, $\mathcal{J}_{nk}$ и $\mathcal{J}_{nn}$ для первых пяти корней уравнения (7) табулированы в работе [6], все остальные величины, входящие в формулы (22), (24) и (26), табулированы нами (см. приложение, табл. 1—8). Величины Ψ^r_{nk}, Ψ^i_{nk}, Φ^r_{nk} и Φ^i_{nk} протабулированы для $\nu = 0{,}3$, однако, пользуясь таблицами 1—6 приложения, можно получить эти величины для любого ν.

Таким образом, левые части системы уравнений (27) подсчитаны. Для вычисления правых частей надо воспользоваться формулой (18). После интегрирования найдем

$$H_k = H^r_k + iH^i_k = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \frac{1}{q_k} + \varepsilon_3 \frac{1}{q_k^2} + \varepsilon_4 \frac{\cos q_k - 1}{q_k} + \\ + \varepsilon_5 \frac{\cos q_k - 1}{q_k^2} + \varepsilon_6 \frac{\cos q_k - 1}{q_k^3} + \varepsilon_7 \frac{\cos q_k - 1}{q_k^4}. \quad (30)$$

Здесь

$$\varepsilon_1 = -\frac{4G}{c}(1-\nu)(D_3 + D_4 + D_5);$$

$$\varepsilon_2 = \frac{16G\nu}{c} D_2;$$

$$\varepsilon_3 = \frac{128G(2-\nu)}{c} D_5;$$

$$\varepsilon_4 = -\frac{4G\nu}{c}(D_1 + D_2);$$

$$\varepsilon_5 = -\frac{16G(2-\nu)}{c}(D_4 + 2D_5);$$

$$\varepsilon_6 = \frac{96G(1+\nu)}{c} D_2;$$

$$\varepsilon_7 = \frac{768(3-\nu)G}{c} D_5.$$

Систему (27) для определения произвольных постоянных можно составить лишь для конкретной задачи, задавая значения упругих постоянных и размеры поперечного сечения потолочины.

Ограничиваясь в однородных решениях пятью членами ряда, выпишем выражения для напряжений и перемещений в заделке. Напряжения найдем по формулам (1) и (8), используя обозначения (13),

$$\sigma_x = \frac{\gamma c}{5}[-3(2\eta-1) + 5(2\eta-1)^3] + \sum_{n=1}^{5}\left[C^r_n f_1(n,\eta) - C^i_n f_2(n,\eta)\right]; \quad (31)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{3\gamma l}{2}[(2\eta-1)^2 - 1] + \sum_{n=1}^{5}\left[C^r_n f_5(n,\eta) - C^i_n f_6(n,\eta)\right].$$

Перемещения найдем по формулам (2) и (10)

$$u = -\frac{\gamma l}{20cG}\{[10(1-\nu)l^2 - (6-\nu)c^2](2\eta-1) + 5(2-\nu)c^2(2\eta-1)^3\} + \\ + \frac{2c}{G}\sum_{i=1}^{5}\left[F_1(n,\eta)C'^r_n - F_2(n,\eta)C'^i_n\right];$$

$$v = -\frac{\gamma}{80G}\left\{\left[2(24+\nu)l^2 + 25(1-\nu)\frac{l^4}{c^2}\right] - 2(5+\nu)c^2(2\eta-1)^2 + \right. \quad (32)$$

$$\left. + 5(1+\nu)c^2(2\eta-1)^4\right\} - \frac{2c}{G}\sum_{i=1}^{5}\left[F_3(n,\eta)C'^r_n - F_4(n,\eta)C'^i_n\right],$$

где

$$
\begin{aligned}
F_1(n, \eta) &= f_3(n, \eta) + 2(1-\nu) f_7(n, \eta);\\
F_2(n, \eta) &= f_4(n, \eta) + 2(1-\nu) f_8(n, \eta);\\
F_3(n, \eta) &= f_5(n, \eta) - 2(1-\nu) f_9(n, \eta);\\
F_4(n, \eta) &= f_6(n, \eta) - 2(1-\nu) f_{10}(n, \eta).
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Функции (33) для $\nu = 0{,}3$ табулированы нами (см. приложение, табл. 9—12).

При удалении от заделки члены, зависящие от однородных решений, быстро убывают, и поэтому напряжения и перемещения будут определяться там только полиномиальными членами.

Числовой пример. Рассмотрим потолочину из известняка, характеризуемую следующими данными:

$$\gamma = 25 \cdot 10^{-4}\ кГ/см^3; \quad \nu = 0{,}3; \quad \acute{E} = 25 \cdot 10^4\ кГ/см^2;$$
$$2l = 10\ м; \quad 2c = 25\ м.$$

В зависимости от поставленной в задаче точности в однородных решениях можно ограничиться тем или иным количеством членов. Нами рассмотрены случаи двух, трех, четырех и пяти членов. Это составляет соответственно системы с четырьмя, шестью, восьмью и десятью постоянными $C_n'^r$ и $C_n'^i$.

Приведем результаты вычислений для случая двух членов ряда в однородных решениях. Увеличение числа членов ряда практически не сказывается на результатах.

Соответствующая система для определения постоянных:

$$168{,}164C_1'^r + 27{,}296C_2'^r - 121{,}801C_1'^i - 27{,}238C_2'^i = 0{,}96489;$$
$$27{,}296C_1'^r + 864{,}819C_2'^r + 253{,}218C_1'^i - 837{,}645C_2'^i = 0{,}25359;$$
$$121{,}801C_1'^r - 253{,}218C_2'^r - 272{,}825C_1'^i + 148{,}337C_2'^i = 1{,}17235;$$
$$27{,}238C_1'^r + 837{,}645C_2'^r + 148{,}337C_1'^i - 1493{,}189C_2'^i = 0{,}10870.$$

После решения системы находим

$$C_1'^r = 0{,}0009050\ кГ/см^2, \qquad C_2'^r = 0{,}0031355\ кГ/см^2,$$
$$C_1'^i = -0{,}0062124\ кГ/см^2, \qquad C_2'^i = 0{,}0010850\ кГ/см^2.$$

Результаты вычислений для напряжений и перемещений в заделке приведены ниже.

η	$u \cdot 10^3$ см	$v \cdot 10^3$ см	$\sigma_x \frac{кГ}{см^2}$	$\tau_{xy} \frac{кГ}{см^2}$
0	+0,36	−0,41	+0,29	0
0,05	+0,35	−0,44	−0,01	+0,80
0,10	+0,32	−0,55	−0,30	+1,03
0,15	+0,42	−0,64	−0,23	+1,10
0,20	+0,16	−0,89	+0,08	+1,29
0,25	−0,14	−0,89	+0,31	+1,61
0,30	−0,22	−1,25	+0,27	+1,83
0,35	−0,10	−0,79	+0,04	+1,77
0,40	−0,01	0,00	−0,16	+1,45
0,45	−0,20	+0,78	−0,17	+1,08
0,50	0	+1,10	0	+0,91

Таким образом, перемещения на защемленных сторонах потолочины малы, и практически эти стороны можно считать заделанными. Растягивающие напряжения в заделке не превосходят 0,31 *кГ/см²*.

Наибольшее растягивающее напряжение $\sigma_x = 2$ *кГ/см²* имеет место в средней точке нижней свободной стороны потолочины. Оно вычисляется по формулам (2) без учета однородных решений. При этом растягивающие напряжения не превосходят допускаемых, ибо временное сопротивление известняка при растяжении колеблется в зависимости от состава в пределах от 6 *кГ/см²* до 18 *кГ/см²* [4].

Результаты аналогичных вычислений для случая пяти членов ряда в однородных решениях не дают существенных изменений для перемещений в заделке, поэтому с точностью, достаточной для практики, можно ограничиться только двумя членами ряда. Система уравнений (27) для определения постоянных в этом случае (при $\nu = 0{,}3$) получена и протабулированы все величины, составляющие левые части; подлежат вычислению лишь правые, которые зависят от конкретных размеров потолочины.

В работах И. Фадле [6] и А. Ф. Захаревича [5] протабулированы все величины, через которые выражаются напряжения и перемещения от однородных решений, что значительно облегчает применение изложенного способа.

В заключение выражаем благодарность Р. И. Шкадову за помощь, оказанную при выполнении работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

	k	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
ψ^r_{nk}	1	+123,575	−11,755	−42,814	−25,690	−15,951
	2	−11,755	+775,602	−151,858	−285,776	−157,687
	3	−42,814	−151,858	+2642,512	−499,702	−930,768
	4	−25,690	−285,776	−499,702	+6582,434	−1097,740
	5	−15,951	−157,687	−930,768	−1097,740	+13592,227
ψ^t_{nk}	1	−150,961	−36,138	+22,271	+28,828	+26,038
	2	+207,866	−891,999	−275,048	+90,018	+138,508
	3	+49,649	+1133,253	−2730,998	−1069,771	+157,884
	4	+16,491	+225,384	+3432,128	−6168,435	−2892,678
	5	+7,088	+48,491	+644,401	+7880,778	−11702,940

Таблица 2

	k	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
φ^t_{nk}	1	+150,961	−207,866	−49,649	−16,491	−7,088
	2	+36,138	+891,999	−1133,253	−225,384	−48,491
	3	−22,271	+275,048	+2730,998	−3432,128	−644,401
	4	−28,828	−90,018	+1069,771	+6168,435	−7880,778
	5	−26,038	−138,508	−157,884	+2892,678	+11702,940
φ^r_{nk}	1	−257,958	+161,740	+102,283	+62,421	+42,597
	2	+161,740	−1438,154	+639,558	+454,647	+254,596
	3	+102,283	+639,558	−4332,525	+1535,857	+1263,861
	4	+62,421	+454,647	+1535,857	−9858,758	+2907,767
	5	+42,597	+254,596	+1263,861	+2907,767	−19056,510

Таблица 3

	k	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
ψ'^{r}_{nk}	1	+16,280	+13,535	+10,668	+9,413	+8,791
	2	+13,535	+35,797	+27,951	+19,018	+14,925
	3	+10,668	+27,951	+62,624	+47,944	+30,411
	4	+9,413	+19,018	+47,944	+96,437	+73,379
	5	+8,791	+14,925	+30,411	+73,379	+136,970
ψ'^{l}_{nk}	1	+7,439	−3,339	−3,701	−3,181	−2,702
	2	+12,971	+13,866	−11,141	−12,323	−10,700
	3	+14,582	+27,547	+20,215	−22,270	−24,845
	4	+14,842	+30,523	+45,182	+26,536	−36,397
	5	+14,893	+30,210	+49,853	+65,723	+32,845

Таблица 4

	k	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
φ'^{l}_{nk}	1	−7,439	−12,971	−14,582	−14,842	−14,893
	2	+3,339	−13,866	−27,547	−30,523	−30,210
	3	+3,701	+11,141	−20,215	−45,182	−49,853
	4	+3,181	+12,323	+22,270	−26,536	−65,723
	5	+2,702	+10,700	+24,845	+36,397	−32,845
φ'^{r}_{nk}	1	−8,698	−8,337	−5,148	−3,633	−2,806
	2	−8,337	−27,077	−22,345	−13,176	−8,863
	3	−5,148	−22,345	−53,182	−42,050	−24,339
	4	−3,633	−13,176	−42,050	−86,465	−67,259
	5	−2,806	−8,863	−24,339	−67,259	−126,570

Таблица 5

	k	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
ψ''^{r}_{nk}	1	+11,446	+8,337	+5,147	+3,633	+2,806
	2	+8,337	+30,421	+22,344	+13,177	+8,865
	3	+5,147	+22,344	+56,890	+42,046	+24,339
	4	+3,633	+13,177	+42,046	+90,444	+67,259
	5	+2,806	+8,865	+24,339	+67,259	+130,760
ψ''^{l}_{nk}	1	0	−13,089	−14,698	−14,959	−15,010
	2	+3,271	0	−27,614	−30,591	−30,278
	3	+3,652	+11,092	0	−45,227	−49,898
	4	+3,145	+12,285	+22,231	0	−65,754
	5	+2,672	+10,670	+24,814	+36,362	0

Таблица 6

	k	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
φ''^{l}_{nk}	1	0	−3,271	−3,652	−3,145	−2,672
	2	+13,089	0	−11,092	−12,285	−10,670
	3	+14,698	+27,614	0	−22,231	−24,814
	4	+14,959	+30,591	+45,227	0	−36,362
	5	+15,010	+30,278	+49,898	+65,754	0
φ''^{r}_{nk}	1	−11,446	−11,475	−8,614	−7,363	−6,744
	2	−11,475	−30,421	−25,924	−16,995	−12,905
	3	−8,614	−25,924	−56,890	−45,926	−28,399
	4	−7,363	−16,995	−45,926	−90,444	−71,369
	5	−6,744	−12,905	−28,399	−71,369	−130,760

Таблица 7

	k	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
Ψ^r_{nk}	1	+168,164	+27,296	−9,644	+5,102	+13,797
	2	+27,296	+864,819	−79,828	−233,362	−114,074
	3	−9,644	−79,828	+2792,423	−382,399	−852,447
	4	+5,102	−233,362	−382,399	+6808,521	−923,089
	5	+13,797	−114,074	−852,447	−923,089	+13909,472
Ψ^l_{nk}	1	−121,801	−27,238	+32,457	+41,488	+40,662
	2	+253,218	−837,645	−272,329	+93,105	+147,431
	3	+100,674	+1222,602	−2651,755	−1081,088	+144,321
	4	+69,389	+324,395	+3571,893	−6064,414	−2924,887
	5	+60,980	+148,988	+798,137	+8077,324	−11574,188

Таблица 8

	k	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
Φ^l_{nk}	1	+121,801	−253,218	−100,674	−69,389	−60,980
	2	+27,238	+837,645	−1222,602	−324,395	−148,988
	3	−32,457	+272,329	+2651,755	−3571,893	−798,137
	4	−41,488	−93,105	+1081,088	+6064,414	−8077,324
	5	−70,662	−147,431	−144,321	+2924,887	+11574,188
Φ^r_{nk}	1	−272,825	+148,337	+96,574	+60,547	+42,929
	2	+148,337	−1493,189	+595,518	+431,549	+241,533
	3	+96,574	+595,518	−4445,423	−1448,177	+1216,162
	4	+60,547	+431,549	+1448,177	+10045,755	+2764,012
	5	+42,929	+241,533	+1216,162	+12764,012	−19332,987

Таблица 9

η	$F_1(1, \eta)$	$F_1(2, \eta)$	$F_1(3, \eta)$	$F_1(4, \eta)$	$F_1(5, \eta)$
0	−10,497	−19,460	−28,338	−37,174	−46,002
0,05	−6,298	+5,297	+4,145	+22,143	+46,146
0,10	−1,591	+11,272	+31,155	+38,229	+12,462
0,15	+2,444	+18,270	+15,139	−31,798	−86,015
0,20	+5,166	+12,924	−22,314	−58,058	+8,437
0,25	+6,420	+0,204	−38,765	+7,321	+91,740
0,30	+6,382	−12,268	−19,252	+61,433	−14,880
0,35	+5,400	−18,857	+15,559	+28,400	−85,861
0,40	+3,837	−17,810	+35,794	−39,207	+10,310
0,45	+1,976	−10,548	+27,955	−52,718	+80,362
0,50	0	0	0	0	0

Таблица 10

η	$F_2(1, \eta)$	$F_2(2, \eta)$	$F_2(3, \eta)$	$F_2(4, \eta)$	$F_2(5, \eta)$
0	−3,876	−4,692	−5,206	−5,580	−5,870
0,05	−5,183	−8,245	−8,569	−3,132	+10,589
0,10	−3,179	+3,809	+24,417	+52,974	+70,844
0,15	+1,018	+19,795	+39,917	+21,595	−52,289
0,20	+5,952	+25,970	+7,136	−64,862	−80,438
0,25	+10,190	+16,160	−40,902	−50,382	+81,752
0,30	+12,610	−4,830	−48,658	+51,160	+62,946
0,35	+12,596	−24,855	−4,388	+70,401	−99,292
0,40	+10,100	−32,108	+45,761	−26,715	−33,582
0,45	+5,605	−22,066	+48,245	−79,169	+107,226
0,50	0	0	0	0	0

Таблица 11

η	$F_3(1, \eta)$	$F_3(2, \eta)$	$F_3(3, \eta)$	$F_3(4, \eta)$	$F_3(5, \eta)$
0	−5,307	−6,104	−6,612	−6,984	−7,273
0,05	−4,235	−3,138	−3,353	−7,839	−19,128
0,10	−3,854	−5,973	−18,553	−39,827	−59,862
0,15	−3,861	−11,240	−28,393	−24,995	+29,347
0,20	−3,871	−13,849	−13,677	+37,212	+78,643
0,25	−3,592	−11,338	+14,556	+51,660	−30,792
0,30	−2,923	−4,961	+30,858	−3,111	−77,173
0,35	−1,969	+2,127	+23,452	−49,243	+22,800
0,40	−0,972	+7,386	+1,425	−31,739	+71,173
0,45	−0,221	+10,125	−18,797	+19,903	−8,348
0,50	+0,057	+10,898	−26,540	+45,890	−68,400

Таблица 12

η	$F_4(1, \eta)$	$F_4(2, \eta)$	$F_4(3, \eta)$	$F_4(4, \eta)$	$F_4(5, \eta)$
0	+10,415	+19,412	+28,304	+37,149	+45,981
0,05	+11,604	+21,927	+31,891	+37,596	+38,564
0,10	+11,956	+17,518	+8,851	−21,319	−70,637
0,15	+10,714	+2,306	−35,244	−78,485	−76,895
0,20	+7,628	−18,456	−56,718	−22,950	+92,651
0,25	+2,942	−33,953	−25,518	+76,515	+66,222
0,30	−2,707	−34,842	+33,255	+60,805	−107,407
0,35	−8,452	−19,141	+61,826	−51,031	−44,295
0,40	−13,378	+6,286	+30,204	−82,154	+115,291
0,45	−16,692	+29,214	−31,383	+17,466	+15,366
0,50	−17,859	+38,367	−62,073	+88,612	−117,407

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич С. Г. Решение плоской задачи для прямоугольной области, загруженной по краям нормальными усилиями, и применение ее к расчету фланцевых соединений. В сб. «Прочность элементов паровых турбин». Машгиз, 1951.

2. Гуревич С. Г. Распределение напряжений в прямоугольной пластине, произвольно нагруженной по краям. Изв. ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина), вып. XXVII, 1955.

3. Гуревич С. Г. К решению смешанной задачи для прямоугольной пластинки. Известия ЛЭТИ им. В. И. Ульянова (Ленина), вып. XXV, 1958.

4. Ержанов Ж. С. К теории движения горных пород рудничных месторождений. В сб. «Исследования по вопросам горного и маркшейдерского дела», № XXII. Углетехиздат, 1950.

5. Захаревич А. Ф. Изгиб однородного слоя под действием собственного веса. Зап. ЛГИ, т. XXXIII, вып. 3, 1956.

6. Fadle I. Ingr — Arch., IV, Bd. XI. Berlin West, 1940.