

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ УСРЕДНЕНИИ КАЧЕСТВЕННОГО СОСТАВА РУД

Е. И. Азбель

Колебания характеристик качественного состава, создающие значительные трудности при переработке руд и, в частности, при выборе оптимальных режимов работы обогащательных агрегатов, требуют проведения специальных мероприятий по усреднению качественного состава руд.

Пусть колебания рассматриваемого компонента X качественного состава в исходном потоке руды представляют собой некоторый случайный процесс $X(t)$, а в усредненном потоке руды — случайный процесс $X'(t)$. Процессы $X(t)$ и $X'(t)$ связаны соотношением

$$X'(t) = F[X(t)],$$

где F — оператор преобразования.

С точки зрения теории случайных функций, задача построения математических моделей процессов усреднения сводится к нахождению таких операторов преобразования F , которые соответствовали бы закономерностям процессов усреднения в конкретных устройствах. Для стационарных процессов эта задача эквивалентна нахождению зависимостей между корреляционными функциями $K_x(\tau)$ и $K'_x(\tau)$ или спектральными плотностями $S_x(\omega)$ и $S'_x(\omega)$ случайных процессов $X(t)$ и $X'(t)$.

Представляют практический интерес усреднительные процессы, характеризующиеся интегральными преобразованиями качественного состава исходного потока руды. Такие преобразования аппроксимируют в предельном случае работы усреднительного штабеля, бункера, а также ряды других устройств и позволяют весьма просто оценивать эффективность усреднительных процессов независимо от количества слоев или столбов усредняемого материала. Так, для случая отработки последовательности сформированных штабелей или для бункера с периодической разгрузкой могут быть получены следующие выражения корреляционной функции $K'_x(\tau)$ и дисперсии $D'(x)$ [1]:

$$\begin{aligned} K'_x(\tau) = & \frac{1}{T} \left[1 - F\left(\frac{|\tau|}{T}\right) \right] \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T} \right) \left\{ K_x \left[\text{sign}(\tau) E\left(\frac{|\tau|}{T}\right) T + t \right] + \right. \\ & \left. + K_x \left[\text{sign}(\tau) E\left(\frac{|\tau|}{T}\right) T - t \right] \right\} dt + \\ & + \frac{1}{T} F\left(\frac{|\tau|}{T}\right) \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T} \right) \left\{ K_x \left[\text{sign}(\tau) \left(E\left(\frac{|\tau|}{T}\right) + 1 \right) T + t \right] + \right. \\ & \left. + K_x \left[\text{sign}(\tau) \left(E\left(\frac{|\tau|}{T}\right) + 1 \right) T - t \right] \right\} dt; \quad (1) \end{aligned}$$

$$D'(x) = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{t}{T} \right) K_x(t) dt. \quad (1a)$$

Закономерность усреднения качественного состава потока руды в отдельно взятом штабеле соответствует интегральному преобразованию

$$X'(t) = \frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt. \quad (2)$$

Поэтому выражение (1а) следует непосредственно как дисперсия определенного интеграла (2).

Рассмотрим в качестве еще одного примера усреднительные процессы, закономерности которых соответствуют действию оператора текущего среднего,

$$X'(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t X(t) dt. \quad (3)$$

Преобразование (3) характеризует процессы усреднения в непрерывно функционирующем многоячеечном бункере со ступенчатой загрузкой, а также при челноковом режиме загрузки бункера наклонными слоями или при челноковом режиме загрузки «органного» бункера.

Выражения для дисперсий на выходе усреднительных устройств, имеющих операторы преобразований (2) и (3), совпадают [1].

Спектральная плотность процесса $X'(t)$ для оператора текущего среднего [2]

$$S_x'(\omega) = S_x(\omega) \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2. \quad (4)$$

Корреляционная функция $K_x'(\tau)$ получается из (4) с помощью обратного преобразования Фурье

$$K_x'(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) \left(\frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \right)^2 \cos \omega \tau d\omega. \quad (5)$$

Рассмотрим случайный процесс $X(t)$ с треугольной корреляционной функцией

$$K_x(\tau) = \begin{cases} D(x) \left(1 - \frac{|\tau|}{T_u} \right) & \text{при } |\tau| \leq T_u \\ 0 & \text{при } |\tau| > T_u \end{cases}$$

и соответственно спектральной плотностью

$$S_x(\omega) = \frac{D(x) T_u}{2\pi} \left(\frac{\sin^2 \frac{\omega T_u}{2}}{\frac{\omega T_u}{2}} \right)^2 \quad (6)$$

При некоторых допущениях такие характеристики имеют качественный состав потока руды, поступающего из карьера при железнодорожном транспорте [3]. Найдем $K_x'(\tau)$ в этом случае с учетом (4)–(6)

$$K_x'(\tau) = \frac{16D(x)}{\pi T_u T^2} \int_0^\infty \frac{\sin^2 \frac{\omega T_u}{2} \sin^2 \frac{\omega T}{2}}{\omega^4} \cos \omega \tau d\omega. \quad (7)$$

Рассмотрим интеграл вида

$$I = \int_0^\infty \sin^2 \alpha x \sin^2 \beta x \cos 2\gamma x \frac{dx}{x^4}. \quad (8)$$

где α, β, γ — вещественные числа. Вычислим I как функцию параметров α, β, γ

$$4I = \int_0^{\infty} \{\varphi(x) + \varphi(-x)\} \frac{dx}{x^4},$$

где $\varphi(x)$ — аналитическая, ограниченная в верхней полуплоскости функция

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \frac{1}{2} e^{2i|\gamma|x} - \frac{1}{4} e^{2i|\alpha+\gamma|x} - \frac{1}{4} e^{2i|\alpha-\gamma|x} - \\ & - \frac{1}{4} e^{2i|\beta+\gamma|x} - \frac{1}{4} e^{2i|\beta-\gamma|x} + \frac{1}{8} e^{2i|\alpha+\beta-\gamma|x} + \\ & + \frac{1}{8} e^{2i|\alpha-\beta+\gamma|x} + \frac{1}{8} e^{2i|\alpha-\beta-\gamma|x}. \end{aligned}$$

Тогда, вследствие очевидной сходимости I ,

$$4I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) dx}{x^4} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E(\varepsilon)} \frac{\varphi(x) dx}{x^4}.$$

Здесь $E(\varepsilon)$ — вещественная ось без интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (рис. 1).

Возьмем интеграл от функции $\frac{\varphi(z)}{z^4}$ комплексного переменного z по контуру Γ . Вне начала координат функция $\frac{\varphi(z)}{z^4}$ — аналитическая

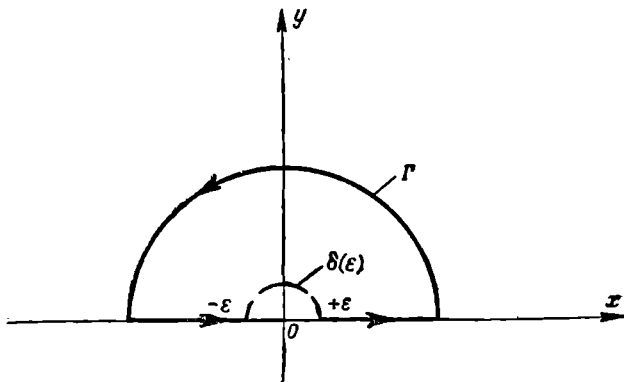


Рис. 1. Контур интегрирования

в верхней полуплоскости. При расширении радиуса контура Γ к бесконечности интеграл по его верхней части C_R по лемме Жордана

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{\varphi(z)}{z^4} dz \rightarrow 0.$$

Интеграл по нижней части контура Γ стремится к интегралу по $E(\varepsilon)$. С другой стороны, в силу аналитичности функции $\frac{\varphi(z)}{z^4}$ (вне начала координат), по теореме Коши интеграл по Γ равен интегралу по контуру $\delta(\varepsilon)$. Следовательно,

$$4I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\delta(\varepsilon)} \varphi(z) \frac{dz}{z^4}.$$

Разложим $\varphi(z)$ в ряд Тейлора

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^k.$$

Положим контур $\delta(\varepsilon)$

$$z = \varepsilon e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

где $\varepsilon < 1$.

Рассмотрим интеграл

$$I_k = \int_{\delta(\varepsilon)} \frac{\varphi_k z^k}{z^4} dz = \varphi_k \varepsilon^{k-3} i \int_0^\pi e^{i(k-3)\theta} d\theta.$$

Если $k > 3$, $I_k \rightarrow 0$ при уменьшении ε .

Если $k = 3$, $I_k = i\varphi_3\pi$, где $\varphi_3 = \frac{1}{3!} \varphi'''(0)$.

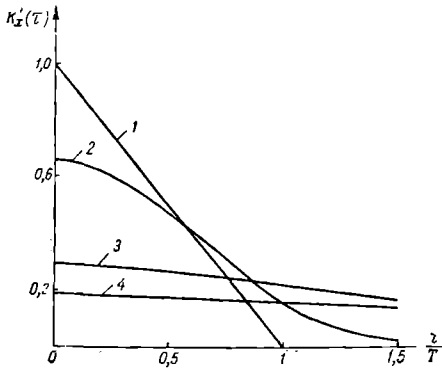


Рис. 2. Зависимость корреляционной функции $K'_x(\tau)$ от соотношения параметров исходной корреляционной функции $K_x(\tau)$ и емкости штабеля в относительных единицах $\left(\frac{T}{T_n}; \frac{\tau}{T}\right)$:

1-4—значения $\frac{T}{T_n}$ соответственно равные 0; ; 3,5

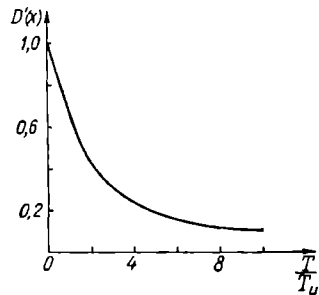


Рис. 3. Зависимость дисперсии $D'(x)$ от соотношения параметров исходной корреляционной функции $K_x(\tau)$ и емкости штабеля в относительных единицах $\left(\frac{T}{T_n}\right)$

Если $k < 3$, $I_k = 0$, иначе при уменьшении ε он бы неограниченно возрастал, что противоречит сходимости интеграла (8). Таким образом,

$$\begin{aligned} I &= i \frac{\pi}{24} \varphi'''(0) = \\ &= \frac{\pi}{6} |\gamma|^3 - \frac{\pi}{12} (|\alpha + \gamma|^3 + |\alpha - \gamma|^3 + |\beta + \gamma|^3 + |\beta - \gamma|^3) + \\ &+ \frac{\pi}{24} (|\alpha + \beta + \gamma|^3 + |\alpha + \beta - \gamma|^3 + |\alpha - \beta + \gamma|^3 + |\alpha - \beta - \gamma|^3). \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом (9) и (7) найдем $K'_x(\tau)$ и $D'(x)$

$$\begin{aligned} K'_x(\tau) &= \frac{D(x)}{3T_u T^2} \left[|\tau|^3 - \frac{1}{2} (|T_u + \tau|^3 + |T_u - \tau|^3 + |T + \tau|^3 + |T - \tau|^3) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} (|T_u + T + \tau|^3 + |T_u + T - \tau|^3 + |T_u - T + \tau|^3 + |T_u - T - \tau|^3) \right]; \end{aligned} \quad (10)$$

$$D'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} D(x) \frac{T_u}{T^2} (3T - T_u) & \text{при } 0 \leq T_u \leq T \\ \frac{1}{3} \frac{D(x)}{T_u} (3T_u - T) & \text{при } T < T_u. \end{cases} \quad (11)$$

Анализ выражений (10) и (11) показывает, что большим значениям параметра T (рис. 2 и 3) соответствуют корреляционные функции $K'_x(\tau)$ с более пологим характером убывания. При этом дисперсия $D'(x)$

уменьшается с увеличением T . Это свидетельствует о повышении стабильности качественного состава потока руды с увеличением емкости усреднительного устройства [4].

Полученные соотношения позволяют методом типовых треугольных корреляционных функций [5] исследовать и более сложные усреднительные процессы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Школьников А. Д., Азбель Е. И. Усреднение качественного состава руд на бункерах обогатительных фабрик. Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, 1970, № 5.

2. Азбель Е. И. Усреднение руды при челноковом режиме загрузки бункера. В сб. «Новые исследования в цветной металлургии и обогащении», ЛГИ, 1969.

3. Азбель Е. И. О колебаниях качественного состава потока руды, поступающего из карьера. В сб. «Новые исследования в цветной металлургии и обогащении», ЛГИ, 1969.

4. Азбель Е. И. О частоте дискретных измерений технологических параметров обогатительных процессов при усреднении руд. В сб. «Новые исследования в обогащении, металлургии и химии», вып. 2, ЛГИ, 1971.

5. Лившиц Н. А., Пугачев В. Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления, ч. I. Советское радио, 1963.