*Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LII, вып. 3, 1974 г.*

# К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКАХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

*Л. П. Ильина*

Для получения некоторых оценок коэффициентов функций $f(z) = z + c_2z^2 + \ldots$, регулярных и однолистных в круге $|z| < 1$ (класс $S$), воспользуемся условием Грунского [1]: для однолистности функции $f(z) = z + c_2z^2 + \ldots$ в круге $|z| < 1$, регулярной в нем, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{m,\, n=0}^{\infty} a_{mn}x_m x_n \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{n} \tag{1}$$

для любой последовательности $\{x_n\}$, для которой ряд, стоящий в правой части неравенства, сходится, а коэффициенты $a_{mn}$ определяются разложением

$$\ln \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} = \sum_{m,\, n=0}^{\infty} a_{mn} z^m \zeta^n, \quad |z| < 1, \quad |\zeta| < 1.$$

Теорема. Пусть $f(z) = z + c_2z^2 + \ldots \in S$. Тогда при вещественных $\alpha$ и $\beta$, удовлетворяющих неравенствам

$$\beta \leqslant \frac{1}{3}, \quad |2 + \alpha|^2 \leqslant \frac{25 - 120\beta + 144\beta^2}{6(1 - 2\beta)}, \tag{2}$$

справедлива точная оценка

$$\left| c_4 + \alpha c_2 \left( c_3 - \frac{3}{4} c_2^2 \right) - \beta c_2^3 \right| \leqslant 4 - 8\beta$$

с равенством для $f(z) = \frac{z}{(1 - z)^2} = z + 2z^2 + \ldots \in S$.

Доказательство проводится аналогично доказательству оценки $|c_n| \leqslant 4$, приведенному Г. М. Голузиным [2, стр. 574—575]. Пусть $f(z) \in S$. Тогда $f_2(z) = \sqrt{f(z^2)} \in S^{(2)}$, и для нее выполняется неравенство (1). Полагая в нем $x_1 = l$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = x_5 = \ldots = 0$ и учитывая, что $a_{11} = \frac{1}{2} c_2$, $a_{13} = a_{31} = \frac{1}{2}\left( c_3 - \frac{3}{4} c_2^2 \right)$, $a_{33} = \frac{1}{2}\left( c_4 - 2c_2c_3 + \frac{13}{12} c_2^3 \right)$, получим из (1)

$$\left| c_4 - 2(c_2 - l)\left( c_3 - \frac{3}{4} c_2^2 \right) - \frac{5}{12} c_2^3 + l^2 c_2 \right| \leqslant 2|l|^2 + \frac{2}{3}. \tag{3}$$

Но так как $F(\zeta)=\dfrac{1}{f_2\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\in\Sigma$, то по теореме площадей имеем

$$|c_2|^2+3\left|c_3-\frac{3}{4}c_2^2\right|^2\leqslant 4,$$

откуда

$$\left|c_3-\frac{3}{4}c_2^2\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4-|c_2|^2}.$$

Перепишем неравенство (3) так:

$$\left|c_4-2c_2\left(c_3-\frac{3}{4}c_2^2\right)-\beta c_2^3-[(2+\alpha)c_2-2l]\left(c_3-\frac{3}{4}c_2^2\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\beta-\frac{5}{12}\right)c_2^3+l^2c_2\right|\leqslant 2|l|^2+\frac{2}{3}.$$

Обозначим $\operatorname{Re}\left\{c_4+\alpha c_2\left(c_3-\frac{3}{4}c_2^2\right)-\beta c_2^3\right\}=I$ и положим

$$c_2=2xe^{i\varphi},\quad l=(r+\alpha)\,xe^{-i\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{3}{2}\varphi.$$

Тогда

$$I\leqslant 2(2+\alpha)^2x^2\cos^2\frac{3}{2}\varphi+\frac{3}{2}+$$
$$+\operatorname{Re}\left\{\left[(2+\alpha)2xe^{i\varphi}-2(2+\alpha)xe^{-i\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{3}{2}\varphi\right]\left(c_3-\frac{3}{4}c_2^2\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{5}{12}-\beta\right)8x^3e^{3i\varphi}-2(2+\alpha)^2x^3\cos^2\frac{3}{2}\varphi\right\}$$

или

$$I\leqslant 2(2+\alpha)^2x^2\cos^2\frac{3}{4}\varphi+\frac{2}{3}+8\left(\frac{5}{12}-\beta\right)x^3\cos 3\varphi-2(2+\alpha)^2x^3\cos^2\frac{3}{2}\varphi+$$
$$+\left|2|2+\alpha|x\left(c_3-\frac{3}{4}c_2^2\right)e^{-i\frac{\varphi}{2}}\left(e^{\frac{3}{2}i\varphi}-\cos\frac{3}{2}\varphi\right)\right|,$$

откуда

$$I\leqslant 2(2+\alpha)^2x^2\cos^2\frac{3}{2}\varphi+\frac{2}{3}+8\left(\frac{5}{12}-\beta\right)x^3\left(\cos^2\frac{3}{2}\varphi-\sin^2\frac{3}{2}\varphi\right)-$$
$$-2(2+\alpha)^2x^3\cos^2\frac{3}{2}\varphi+2|2+\alpha|\frac{x\sqrt{4-4x^2}}{\sqrt{3}}\left|\sin\frac{3}{2}\varphi\right|.$$

Полагая

$$\left|\sin\frac{3}{2}\varphi\right|=y,$$

имеем

$$I\leqslant 2(2+\alpha)^2x^2(1-y^2)+\frac{2}{3}+8\left(\frac{5}{12}-\beta\right)x^3(1-2y^2)-$$
$$-2(2+\alpha)^2x^3(1-y^2)+2(2+\alpha)^2\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3}}xy.$$

Обозначим

$$|2+\alpha|^2=u,\quad 8\left(\frac{5}{12}-\beta\right)=\frac{10}{3}-8\beta=v.$$

Тогда

$$I\leqslant 2ux^2-2ux^2y^2+\frac{2}{3}+vx^3-2vx^3y^2-2ux^3+2ux^3y^2+\frac{4\sqrt{u}}{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2}\,xy$$

или

$$I\leqslant\frac{2}{3}+2ux^2+(v-2u)x^3+\frac{4\sqrt{u}}{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2}\,xy+(2ux^3-2vx^3-2ux^2)y^2.$$

Далее рассматриваем $u>0$ и $v>0$. Находя максимум правой части по $y$ и учитывая, что $2[(u-v)x^3-ux^2]<0$, $0\leqslant x\leqslant 1$, получим

$$I\leqslant 2ux^2+\frac{2}{3}+[v-2u]x^3-\frac{2u(1-x^2)}{3[(u-v)x-u]}=$$

$$=2ux^2+\frac{2}{3}+(v-2u)x^3+\frac{2}{3}\cdot\frac{u(1-x^2)}{u-(u-v)x}$$

или

$$I-(4-8\beta)\leqslant 2ux^2+\frac{2}{3}+(v-2u)x^3+\frac{2}{3}\cdot\frac{u(1-x^2)}{u-(u-v)x}-4+8\beta. \quad (4)$$

Выясним, при каких $\alpha$ и $\beta$ (т. е. при каких $u$ и $v$) правая часть в неравенстве не положительна

$$2ux^2+\frac{2}{3}+(v-2u)x^3+\frac{2}{3}\cdot\frac{u(1-x^2)}{u-(u-v)x}-4+8\beta\leqslant 0.$$

Приводя к общему знаменателю и учитывая, что $u-(u-v)x>0$, получим

$$u(3v-2)-3v(u-v)x-2u(3u-1)x^2+3u[4u-3v]x^3-$$

$$-(6u-3v)(u-v)x^4\geqslant 0.$$

При $x=1$ левая часть этого неравенства обращается в нуль, значит, на $1-x$ его можно разделить ($1-x\geqslant 0$)

$$2u^2x^2(1-x)+2u(3v-2-2x-9vx^3)+6v^2(x+x^2+x^3)\geqslant 0.$$

Перепишем это неравенство так

$$x^3(6u^2-9uv+3v^2)+x^2(3v^2-6u^2)+x(3v^2-2u)+(3uv-2u)\geqslant 0. \quad (5)$$

В дальнейшем потребуется следующая лемма. Для выполнения неравенства

$$ax^3+bx^2+cx+d\geqslant 0, \quad 0\leqslant x\leqslant 1 \quad (6)$$

достаточно, чтобы выполнялись четыре неравенства:

$$d\geqslant 0, \quad a+b+c+d\geqslant 0, \quad b+2c+3d\geqslant 0, \quad c+3d\geqslant 0.$$

Доказательство. Положим в (6) $\varphi_1=x^3$,

$$\varphi_2=(1-x)x^2, \quad \varphi_3=(1-x)^2x, \quad \varphi_4=(1-x)^3.$$

Тогда

$$x^3=\varphi_1, \quad x^2=\varphi_1+\varphi_2, \quad x=\varphi_3+2\varphi_2+\varphi_1,$$

$1=\varphi_4+3\varphi_3+3\varphi_2+\varphi_1$ и неравенство (6) можно переписать так

$$a\varphi_1+b(\varphi_1+\varphi_2)+c(\varphi_3+2\varphi_2+\varphi_1)+d(\varphi_4+3\varphi_3+3\varphi_2+\varphi_1)\geqslant 0$$

или

$$(a+b+c+d)\varphi_1+(b+2c+3d)\varphi_2+(c+3d)\varphi_3+d\varphi_4\geqslant 0,$$

а отсюда и следует утверждение леммы.

В силу леммы, для выполнения неравенства (5) при $0\leqslant x\leqslant 1$ достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$3uv-2u\geqslant 0; \quad (7)$$

$$9v^2-6uv-4u\geqslant 0; \quad (8)$$

$$9v^2-6u^2+9uv-10u\geqslant 0; \quad (9)$$

$$3v^2+9uv-8u\geqslant 0. \quad (10)$$

К этим четырем неравенствам надо добавить еще два:

$$u > 0, \quad v > 0$$

Покажем, что все эти шесть неравенств будут выполняться, если выполнены условия

$$v \geqslant \frac{2}{3}, \quad 0 < u \leqslant \frac{9v^2}{6v+4}. \tag{11}$$

Действительно, если $v \geqslant \frac{2}{3}$ и $u > 0$, то неравенство (7) выполняется. Неравенство (8) равносильно неравенству

$$u \leqslant \frac{9v^2}{6v+4}.$$

Покажем, что если выполняются неравенства (11), то выполняется и неравенство (9). Неравенство (9) при $u > 0$ равносильно неравенству

$$u \leqslant \frac{9v - 10 + \sqrt{(9v-10)^2 + 216v^2}}{12},$$

и нам достаточно показать, что

$$\frac{9v - 10 + \sqrt{(9v-10)^2 + 216v^2}}{12} \geqslant \frac{9v^2}{6v+4} \quad \text{при} \quad v \geqslant \frac{2}{3}.$$

Последовательно заменяя (12) равносильными неравенствами, получаем

$$\sqrt{(9v-10)^2 + 216v^2} \geqslant \frac{54v^2}{3v+2} - 9v + 10;$$

$$\sqrt{(9v-10)^2 + 216v^2} \geqslant \frac{27v^2 + 12v + 20}{3v+2};$$

$$[(9v-10)^2 + 216v^2](3v+2)^2 \geqslant (27v^2 + 12v + 20)^2;$$

$$1944v^4 + 1296v^2 - 1296v^2 \geqslant 0;$$

$$3v^2 + 2v - 2 \geqslant 0.$$

Очевидно, это неравенство выполняется при $v \geqslant \frac{2}{3}$. Покажем, что справедливо неравенство (10), если выполняются неравенства (11). Перепишем неравенство (10) так

$$3v^2 \geqslant (8 - 9v)\,u.$$

Если $8 - 9v < 0$, то при $u > 0$ неравенство очевидно. Если же $8 - 9v > 0$, то неравенство (10) можно переписать так

$$u \leqslant \frac{3v^2}{8-9v},$$

и нам достаточно показать, что

$$\frac{3v^2}{8-9v} \geqslant \frac{9v^2}{6v+4}$$

или

$$6v + 4 \geqslant 24 - 27v.$$

Отсюда получаем неравенство $33v \geqslant 20$, которое, очевидно, справедливо при $v \geqslant \frac{2}{3}$.

Таким образом, мы показали, что неравенства (7), (8), (9), (10) будут выполняться при условиях (11). Напомним, что $u = |2+\alpha|^2$, а $v = \frac{10}{3} - 8\beta$, поэтому неравенства (11) при наших обозначениях дают неравенство (2), при выполнении которого будет

$$I - 4 + 8\beta = \operatorname{Re}\left\{c_4 + \alpha c_2\left(c_3 - \frac{3}{4}c_2^2\right) - \beta c_2^3\right\} - 4 + 8\beta \leqslant 0.$$

Применяя этот результат к функции

$$e^{-i\varphi} f(e^{i\varphi} z) = z + e^{i\varphi} c_2 z^2 + \qquad \in S, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

и выбирая надлежащим образом $\varphi$, получаем утверждение теоремы. Отметим, что при $\beta = 0$ получаем

$$\left| c_4 + \alpha c_2 \left( c_3 - \frac{3}{4} c_2^2 \right) \right| \leqslant 4, \quad |2 + \alpha| \leqslant \sqrt{\frac{25}{6}}.$$

У П. Педерсона [3] то же неравенство получено при

$$|2 + \alpha| \leqslant \sqrt{\frac{75}{17}}.$$

## ЛИТЕРАТУРА


1. Grunsky N. Math. Z., 1939, N 45, H. 1.
2. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. Наука, 1961.
3. Pederson P. N. Arch. Rational Mech. and Analysis, 1968, V. 29, N 5.