Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LII, вып. 3, 1974 г.

СВОЙСТВА ПРЕДЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ АЛГОРИТМА СРЕДНЕГО АРИФМЕТИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО

А. М. Журавский

Среднее арифметико-геометрическое $\mathfrak{M}(a, b)$ является общим пределом последовательностей, определяемых рекуррентными соотношениями

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2},$$

$$b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}, \qquad n = 1, 2,$$

Связь между ветвями бесконечно многозначных функций среднего арифметико-геометрического $\mathfrak{M}(z)$ и $\mathfrak{M}(z')$ комплексных переменных z и $z' = \sqrt{1 - z^2}$ установлены автором ранее.[1]

Укажем некоторые свойства функции $\frac{\mathfrak{M}(z)}{\mathfrak{M}^*(z')}$ и обратной ей автоморфной функции.

Функция

$$H(z) = \frac{\mathfrak{M}(z)}{\mathfrak{M}^*(z')} \tag{1}$$

является многозначной аналитической функцией z. Все ее ветви выражаются через главную ветвь[1]

$$H(z) = \frac{M(z)}{M(z')}, \tag{2}$$

$$H(z) = \frac{\alpha H(z) + \beta i}{\gamma i H(z) + \delta}. \tag{3}$$

Точки $z = 0$ и $z = \pm 1$ являются точками разветвления функции. На плоскости с разрезами $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ и $(+1, \infty)$ ветви функции $H(z)$ остаются однозначными, переходя одна в другую при переходе разрезов. Главная ветвь $H(z)$ в сопряженных точках z и $\bar{z}$ принимает сопряжение значения

$$H(\bar{z}) = H(z), \tag{4}$$

как то непосредственно следует из определения главной ветви средней арифметико-геометрической.

[1] А. М. Журавский. Среднее арифметико-геометрическое. Зап. ЛГИ, т. XLVIII, вып. 3. 1968.

В частности, значения $H^{+}_{(a,\,b)}(x)$, $H^{-}_{(a,\,b)}(x)$ на верхнем и нижнем краях разреза (a, b) оказываются величинами сопряженными

$$H^{-}_{(a,\,b)}(x) = \overline{H}^{+}_{(a,\,b)}(x). \tag{5}$$

Равенство

$$w = u + iv = H(z) \tag{6}$$

доставляет изображение плоскости z с разрезами на плоскость w. Оно в совокупности с равенством (5) показывает, что изображение верхнего края разреза (a, b) на плоскости w симметрично изображению нижнего края того же разреза относительно вещественной оси. Отрезок $(0, 1)$ вещественной оси плоскости z (рис. 1) изображается положительной полуосью плоскости w. При этом, как следует из равенства

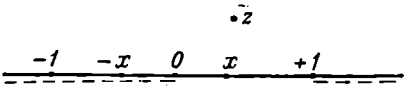


Рис. 1. Область определения функции $H(z)$

$$u = H(x), \tag{7}$$

монотонному возрастанию x от 0 до 1 соответствует монотонное возрастание u от 0 до ∞. Соотношение

$$\frac{1}{H(-x)} = \frac{1}{H(x)} \mp 2i, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{8}$$

где верхний и нижний знаки отвечают соответственно верхнему и нижнему краям разреза $(-1, 0)$, позволяет найти изображение разреза $(-1, 0)$ на плоскости w. В самом деле, при монотонном возрастании x от 0 до 1 величина $-x$ монотонно убывает от 0 до -1, а величина

$$t = \frac{1}{H(x)}$$

монотонно убывает от $+\infty$ до 0. Изображение величины

$$w = H(-x) = \frac{1}{t \mp 2i} = \frac{t \pm 2i}{t^2 + 4}$$

описывает полуокружности

$$u^2 + v^2 = \pm \frac{1}{2} v, \qquad u \geqslant 0,$$

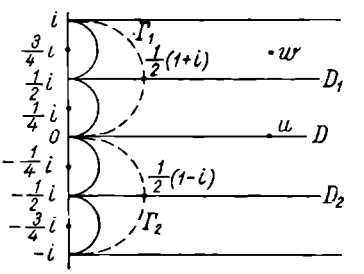


Рис. 2. Изображение разрывов плоскости z функцией $H(z)$ на плоскость w

расположенные справа от мнимой оси (рис. 2). Полуокружность, расположенная выше вещественной оси, изображает верхний край разреза $(-1, 0)$, а полуокружность, расположенная ниже вещественной оси, изображает нижний его край. Точка -1 на верхнем крае разреза $(-1, 0)$ (рис. 1) изображается точкой $\frac{1}{2}i$ (рис. 2), точка -1 на нижнем крае разреза $(-1, 0)$ изображается точкой $-\frac{1}{2}i$. Изображения краев разреза $(1, \infty)$ легко получаются из равенства

$$H(x^{-1}) = H(x) \pm i, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{9}$$

где верхний знак отвечает верхнему краю разреза $(1, \infty)$, а нижний знак нижнему краю. В самом деле, при монотонном убывании x от 1 до 0 величина x^{-1} монотонно возрастает от 1 до ∞ вдоль разреза $(1, \infty)$. Величина

$$w = H(x^{-1}),$$

как следует из (7) и (9), выражается при этом равенством

$$w = u \pm i, \qquad u \geqslant 0,$$

показывающим, что изображением краев разреза $(1, \infty)$ являются полупрямые, параллельные вещественной оси (рис. 2). Верхний край разреза $(1, \infty)$ изображается прямой, лежащей выше вещественной оси, нижний край — прямой, расположенной ниже вещественной оси. Изображением бесконечно далекой точки на верхнем и нижнем краях разреза плоскости z служат соответственно точки $+i$ и $-i$ на плоскости w. Равенство

$$H(x^{-1}) = H(x) \pm i \tag{10}$$

позволяет найти изображение верхнего и нижнего края разреза $(-\infty, -1)$. В равенстве (10) значения x^{-1} на верхнем (нижнем) крае разреза $(-\infty, -1)$ соответствуют значениям x на нижнем (верхнем) крае разреза $(-1, 0)$ и верхнему (нижнему) знаку в правой части равенства. Равенство (10) показывает, что аффикс

$$w' = H(x^{-1})$$

связан с аффиксом

$$w = H(x)$$

соотношением

$$w' = w \pm i.$$

Изображение верхнего (нижнего) края разреза $(-\infty, -1)$ получается из изображения нижнего (верхнего) края разреза $(-1, 0)$ переносом его в направлении мнимой оси на величину i $(-i)$ (рис. 2). Изображением нижнего (верхнего) края разреза служит полуокружность

$$u^2 + \left(v \mp \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}, \quad u \geqslant 0.$$

Изображением бесконечно далекой точки верхнего (нижнего) края разреза $(-\infty, -1)$ служит точка $i(-i)$. Равенства (9), (10), использованные в приведенных рассуждениях, представляют непосредственные следствия свойств среднего арифметико-геометрического. Равенство (9) следует из соотношений

$$M(x^{-1}) = \frac{1}{x} M(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \tag{11}$$

и

$$\frac{1}{M^{\pm}_{(1,\infty)}[(x^{-1})']} = \frac{x}{M(x')} \pm \frac{ix}{M(x)}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{12}$$

Верхний (нижний) знак в равенстве (12) отвечает верхнему (нижнему) краю разреза $(1, \infty)$. Равенство (12) является следствием соотношений

$$\frac{1}{M(x')} = \frac{1}{M(1-x, 1+x)}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\frac{1}{M^{\pm}_{(1,\infty)}[(x^{-1})']} = \frac{1}{M^{\pm}_{(1,\infty)}(1+x^{-1}, 1-x^{-1})} = \frac{x}{M^{\pm}_{(1,\infty)}(x+1, x-1)},$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$

и равенства

$$\frac{1}{M^{\pm}_{(1,\infty)}(x+1, x-1)} = \frac{1}{M(1+x, 1-x)} \pm \frac{i}{M(x)}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

В последнем равенстве верхний (нижний) знак в правой части соответствует верхнему (нижнему) краю разреза. В случае $-1 \leqslant x \leqslant 0$ соотношения (11) и (12) заменяются соответственно равенствами

$$M^{\pm}_{(-\infty,-1)}(x^{-1}) = \frac{1}{x} M^{\mp}_{(-1,0)}(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 0 \tag{13}$$

и

$$\frac{1}{M^{\pm}_{(-\infty,-1)}[(x^{-1})']} = \frac{x}{M(x')} \pm \frac{ix}{M^{\mp}_{(-1,0)}(x)}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 0. \tag{14}$$

Равенство (14) следует из соотношений

$$\frac{1}{M^{\pm}_{(-\infty,\,-1)}[(x^{-1})']} = \frac{1}{M^{\mp}_{(1,\,\infty)}[(|x|^{-1})']}$$

и

$$\frac{1}{M^{\mp}_{(1,\,\infty)}[(|x|^{-1})']} = \frac{|x|}{M(|x|')} \mp \frac{i|x|}{M(|x|)} = -\frac{x}{M(x')} \pm \frac{ix}{M(|x|)}$$

в силу равенства

$$\frac{1}{M^{\mp}_{(-1,\,0)}(x)} = \frac{1}{M(|x|)} \pm \frac{2i}{M(x')}.$$

Зависимость (10) следует непосредственно из (13) и (14).

Уравнение

$$w = H(z) \tag{15}$$

отображает разрезы плоскости z границами области D плоскости w (рис. 2). При этом точки O, $+1$ плоскости z отображаются соответственно точками O и ∞ плоскости w. Точки -1 и ∞ верхнего (нижнего) края разрезов плоскости z отображаются соответственно точками $+\frac{1}{2}i\left(-\frac{1}{2}i\right)$ и $+i(-i)$ плоскости w. Окрестность точки O разрезанной плоскости z отображается точками плоскости w, принадлежащими окрестности точки O, как следует из равенства

$$H(z) = 1 : \left(\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{z} + f(z)\right), \tag{16}$$

имеющего место в окрестности $z = 0$.[1] Функция $f(z)$ регулярна в окрестности $z=0$. Точки, отображающие эту окрестность, расположены справа от мнимой оси плоскости w согласно (15) и (16). В окрестности точки $z = +1$ имеет место разложение

$$H(z) = \frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{z'} + f(z'), \tag{17}$$

вытекающее из (2). Равенства (15, (17) показывают, что точки окрестности $z = +1$ отображаются точками правой полуплоскости w, расположенными в окрестности бесконечно далекой ее точки.

Равенство

$$\frac{1}{H(-z)} = \frac{1}{H(z)} + 2i\varepsilon(z), \qquad (\varepsilon(z) = \pm 1) \tag{18}$$

показывает совместно с (15) и (17), что окрестность точки $z = -1$, принадлежащая верхней (нижней) полуплоскости с разрезом, отображается точками, расположенными в окрестности $w = \frac{1}{2}i$ $\left(w = -\frac{1}{2}i\right)$ справа от мнимой оси. В окрестности бесконечно далекой точки плоскости z с разрезами имеет место равенство

$$H(z) = \frac{z}{z'}(1 + \omega(z)), \tag{19}$$

где $\omega(z) \to 0$, когда $|z| \to \infty$.

Равенство (19) следует из (15), (16) и (17). В окрестности бесконечно далекой точки

$$\frac{z}{z'} = i\varepsilon(z)(1 + \omega_1(z)), \tag{20}$$

где $\varepsilon(z)$ имеет указанный ранее смысл, а $\omega_1(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$. Из (19), (20) вытекает

$$H(z) = i\varepsilon(z)(1 + \omega_2(z)), \tag{21}$$

где $\omega_2(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$.

[1] А. М. Журавский. Среднее арифметико-геометрическое. Зап. ЛГИ, т. XLVIII, вып. 3, 1968.

Равенства (15) и (21) показывают, что окрестность бесконечно далекой точки верхней (нижней) полуплоскости z с разрезами отображается точками, расположенными в окрестности $w = i$ ($w = -i$) плоскости w.

Таким образом, каков бы ни был аффикс w_0 точки, взятой в области D_1 (рис. 2), всегда можно по верхней полуплоскости z описать полуокружности радиуса ε с центрами в точках -1, 0, $+1$ и полуокружность радиуса R с центром в точке 0 (рис. 3), так что линии γ_1, γ_2, γ_3 и Γ_0, отображающие эти полуокружности на плоскость w, ограничат на этой плоскости совместно с участками контура области D_1 область D_*, внутри которой будет заключаться взятая точка (рис. 4).

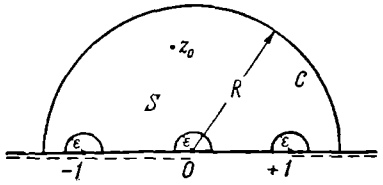


Рис. 3. Область регулярности функции $H(z)$

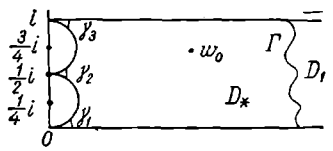


Рис. 4. Отображение области S функцией $H(z)$ на плоскость w

Контур C, образованный этими полуокружностями и отрезками вещественной оси, их соединяющими, отображается на плоскости w контуром Γ области D_*. При обходе контура C в положительном направлении контур Γ обходится в положительном направлении. В области S, ограниченной контуром C, функция $H(z)$ регулярна.

Рассмотрение интеграла

$$\int \frac{H'(z)\,dz}{H(z) - w_0} = \int \frac{dw}{w - w_0} = 2\pi i \tag{22}$$

показывает, что уравнение

$$H(z) = w_0$$

имеет единственный простой корень в области S. Наоборот, значению z_0 в области S отвечает значение

$$w_0 = H(z_0)$$

в области D_*. В этом случае

$$\int \frac{dw}{w - w_0} = \int \frac{H'(z)\,dz}{H(z) - H(z_0)} \neq 0, \tag{23}$$

что возможно лишь при условии, что w_0 принадлежит области D_*. Следовательно, точке w области D_1 отвечает одна и только одна точка z на верхней полуплоскости z с разрезами и обратно. Функция $H(z)$ доставляет конформное отображение верхней полуплоскости z с разрезами на область D_2. Та же функция доставляет конформное отображение нижней полуплоскости z с разрезами на область D_2 (рис. 2). Изображениями точек z и $\bar{z}$, симметричных относительно вещественной оси, служат, как следует из (4), точки w и $\bar{w}$, симметричные относительно вещественной оси.

Точки мнимой оси плоскости характеризуются равенством $\bar{z} = -z$, в силу которого

$$H(z) = H(-z). \tag{24}$$

Из (24) совместно с (4) и (18) следует, что

$$\frac{1}{H(z)} = \frac{1}{H(z)} + 2i\varepsilon(z). \tag{25}$$

Равенство (25) показывает, что линия, отображающая мнимую ось на область D, характеризуется уравнением

$$w\bar{w} - \frac{1}{2} i\varepsilon(z)(\bar{w} - w) = 0. \tag{26}$$

Уравнение (26) показывает, что отображением положительной (отрицательной) мнимой полуоси является полуокружность

$$u^2 + v^2 \mp v = 0, \tag{27}$$

расположенная в области D_1 (D_2) (рис. 2). В точках окружности единичного радиуса с центром в точке O на плоскости z выполняется равенство

$$\bar{z} = \frac{1}{z},$$

из которого следует

$$H(\bar{z}) = H\left(\frac{1}{z}\right). \tag{28}$$

Равенство (28) совместно с (14) и равенством

$$H\left(\frac{1}{z}\right) = H(z) - \varepsilon(z)\, i, \tag{29}$$

выводимым из (9) аналитическим продолжением, позволяют заключить, что в точках окружности

$$H(z) = H(z) - i\varepsilon(z).$$

Это равенство показывает, что отображением окружности на плоскости w является линия, определяемая уравнением

$$\bar{w} = w - i\varepsilon(z)$$

или

$$w - \bar{w} = 2vi = i\varepsilon(z). \tag{30}$$

Из равенства (30) следует, что верхняя (нижняя) полуокружность отображается полупрямой

$$v = \pm \frac{1}{2},$$

параллельной вещественной оси и расположенной в области D_1 (D_2) (рис. 2). Точки пересечения окружности с мнимой осью

$$z = \pm i$$

отображаются точками

$$w = \frac{1}{2}(1 \pm i).$$

Ветви функции

$$W = H(z),$$

подобно главной ветви

$$w = H(z),$$

дают конформное отображение плоскости z с разрезами на плоскость w. Области плоскости w, доставляемые конформным отображением, реализуемым ветвями функции $H(z)$, могут быть получены в силу (3) из области D линейным преобразованием

$$W = \frac{\alpha w + \beta i}{\gamma i w + \delta}, \tag{31}$$

где

$$\alpha \equiv \delta \pmod 4, \quad \gamma \equiv 0 \pmod 4, \quad \beta \equiv 0 \pmod 2 \tag{32}$$

и

$$\alpha\delta + \beta\gamma = 1. \tag{33}$$

Линейное преобразование (31) переводит мнимую ось плоскости w саму в себя, сохраняя направление оси. В результате преобразования левая полуплоскость w переходит сама в себя и область D преобразуется в некоторую область D' целиком лежащую в левой полуплоскости. Границы области D составлены прямыми и окружностями ортогональными мнимой оси. Границы области D' образуют прямые и окружности или только окружности ортогональные мнимой оси. Первый случай имеет место, когда $\gamma = 0$. Тогда

$$\alpha = \delta = 1$$

и преобразование

$$W = w + \beta i$$

характеризует перенос области D в направлении мнимой оси (рис. 5). Во втором случае, когда $\gamma \neq 0$, бесконечно далекая точка области D переходит в точку

$$W = -\frac{\alpha}{\gamma} i$$

мнимой оси, точка $w = 0$ области D переходит в точку

$$W_0 = \frac{\beta}{\delta} i,$$

точка $w = hi$ области D переходит в точку

$$W_{hi} = \frac{\alpha h + \beta}{\delta - \gamma h} i, \qquad h = \pm\frac{1}{2}, \ \pm 1.$$

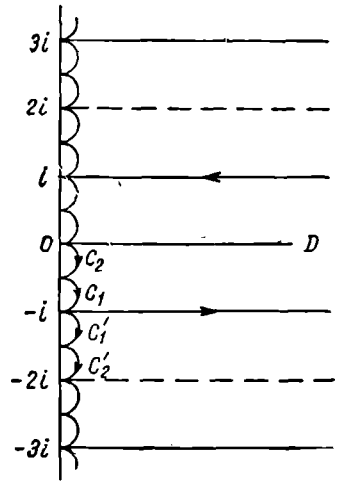


Рис. 5. Изображение разрывов плоскости z преобразованием W на плоскости w при $\gamma = 0$

Границы области D переходят в полуокружности, ограничивающие D' Точки W_∞, W_0, W_{hi} являются концами диаметров этих полуокружностей (рис. 6).

Область D' соответствует случаю $\alpha = \delta = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 4$. Положительному направлению контура области D соответствует положительное направление контура области D' Преобразование (31) можно рассматривать как композицию преобразований

$$W = \frac{\delta - \alpha}{\gamma} i + w \ (\gamma \neq 0) \quad (34)$$

и

$$W = \frac{\delta w + (1 - \delta^2)\gamma^{-1} i}{\gamma i w + \delta} \quad (\gamma \neq 0), \quad (35)$$

осуществляемых так: сначала (35), потом (34). Первое из них представляет перенос параллельно мнимой оси. Второе же может быть выражено в виде

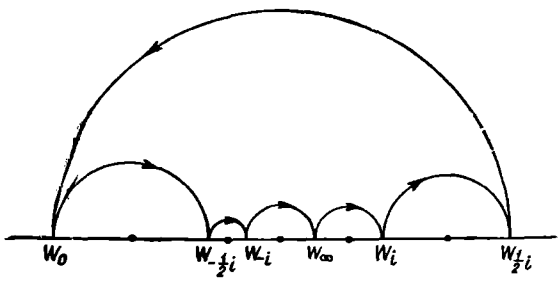


Рис. 6. Отображение области D преобразованием W при $\gamma \neq 0$

$$\left(W + \frac{\delta}{\gamma} i\right)\left(w - \frac{\delta}{\gamma} i\right) = \frac{1}{\gamma^2}. \quad (36)$$

Равенство (36) показывает, что преобразование (35) является композицией преобразования

$$\left(W - \frac{\delta}{\gamma} i\right)\left(w - \frac{\delta}{\gamma} i\right) = \frac{1}{\gamma^2} \quad (37)$$

и преобразования

$$W = \bar{w}. \tag{38}$$

Преобразование (37) представляет инверсию относительно окружности C радиуса $\frac{1}{|\gamma|}$ с центром в точке $\frac{\delta}{\gamma} i$ мнимой оси. Преобразование (38) выражает зеркальное отражение относительно вещественной оси. Из сказанного следует, что преобразование (31) отображает точки внешние относительно окружности C в точки внутренние относительно окружности C^1 радиуса $\frac{1}{|\gamma|}$ с центром в точке $-\frac{\alpha}{\gamma} i$. В частности, преобразование $V(V^{-1})$ переводит точки внешние по отношению окружности $C_1(C_1')$ радиуса $\frac{1}{4}$ с центром в точке $\frac{1}{4} i \left(-\frac{1}{4} i\right)$ в точки внутренние относительно окружности $C_1'(C_1)$ того же радиуса с центром в точке $-\frac{1}{4} i \left(\frac{1}{4} i\right)$ (рис. 5). Преобразование $S(S^{-1})$ переводит точки внешние относительно окружности $C_2(C_2')$ радиуса $\frac{1}{4}$ с центром в точке $\frac{3}{4} i$ в точки внутренние относительно окружности $C_2'(C_2)$ радиуса $\frac{1}{4}$ с центром в точке $-\frac{3}{4} i \left(\frac{3}{4} i\right)$ (рис. 5). Область D в результате преобразования $V(V^{-1})$ отображается областью типа D', внешней границей которой является $C_1'(C_1)$. Преобразование $S(S^{-1})$ отображает D областью типа D', внешней границей которой является $C_2'(C_2)$. В общем случае отображения области D на область D' точки W_∞, W_0, W_{hi} (рис. 6) оказываются внутри окружности C', как то следует из неравенства

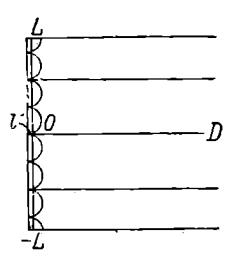


Рис. 7. Конечное число областей D'

$$\left| w_{hi} + \frac{\alpha}{\gamma} i \right| = \left| \frac{\beta\gamma + \alpha\delta}{(\delta - \gamma h)\gamma} \right| = \frac{1}{|\gamma|} \cdot \frac{1}{|\delta - \gamma h|} \leqslant \frac{1}{|\gamma|},$$

ибо числа δ и $\delta - \gamma h$ — целые отличные от нуля. Все окружности, ограничивающие D' и область D, оказываются внутри окружности C'. Из сказанного следует, что при $\gamma \neq 0$ область D' отлична от области D. То же самое имеет место и при $\gamma = 0$, если $\beta \neq 0$. Таким образом, преобразованием (31), отображающим область D на область D', может быть только тождественное преобразование. Преобразования T_1 и T_2 типа (31), отображающие область D на одну и ту же область D', тождественны, ибо преобразование $T_1 T_2^{-1}$ отображает область D на нее саму, вследствие чего $T_1 T_2^{-1} = 1$ и $T_1 = T_2$. Число областей D', заключенных в полосе между прямыми (рис. 7)

$$w = i, \quad w = -i \tag{39}$$

и выходящих за пределы полосы, ограниченной прямой

$$w = l, \tag{40}$$

конечно. В самом деле, если область D' выходит за пределы этой полосы, то и окружность C', ее содержащая, имеет точки вне полосы. Это возможно лишь в случае, если радиус

$$\frac{1}{|\gamma|} > l$$

и

$$|\gamma| < \frac{1}{l}. \tag{41}$$

Точки w_0 и w_∞ области D' лежат в полосе между прямыми (39), откуда следует

$$|w_\infty| = \left| -\frac{\alpha}{\gamma} i \right| < L$$

и

$$|w_0| = \left| \frac{\beta}{\delta} i \right| < L.$$

Полученные неравенства устанавливают ограничения

$$|\alpha| < |\gamma| L < \frac{L}{l} \tag{42}$$

и

$$|\beta| < \delta L. \tag{43}$$

Расположение точек w_{hi} по отношению к точкам w_0 и w_∞ мнимой оси может быть различным, но всегда таково, что одна из пар $\left(w_{\frac{1}{2}i}, w_i\right)$ и $\left(w_{-\frac{1}{2}i}, w_{-i}\right)$ лежит внутри отрезка, ограниченного точками w_0, w_∞, а другая вне. Концами отрезка, содержащего все точки w_{hi}, w_0, w_∞, могут являться следующие пары:

$$\left(w_0, w_{-\frac{1}{2}i}\right), \quad \left(w_{-\frac{1}{2}i}, w_i\right), \quad (w_{-i}, w_\infty),$$
$$(w_\infty, w_i), \quad \left(w_i, w_{\frac{1}{2}i}\right), \quad \left(w_{\frac{1}{2}i}, w_0\right).$$

Окружность, опирающаяся на диаметр, концами которого являются точки подобной пары, служит внешней границей области D' (рис. 6). Если область D' выходит за пределы полосы, ограниченной прямой $w = l$, то диаметр ее внешней границы больше $2l$. Последнее дает неравенство

$$\left| w_{hi} - w_{\left(h-\frac{1}{2}\right)i} \right| > 2l, \tag{44}$$

когда w_∞ не является конечной точкой диаметра. Из (43) в силу соотношения

$$w_{hi} - w_{\left(h-\frac{1}{2}\right)i} = \frac{\alpha h + \beta}{\delta - \gamma h} i - \frac{\alpha\left(h-\frac{1}{2}\right)+\beta}{\delta - \gamma\left(h-\frac{1}{2}\right)} i = \frac{1}{2(\delta - \gamma h)\left(\delta - \gamma\left(h-\frac{1}{2}\right)\right)}$$

следует, что

$$\frac{1}{|\delta - \gamma h|} > \frac{1}{|(\delta - \gamma h)(2\delta - \gamma(2h-1))|} > 2l,$$

ибо $2\delta - \gamma(2h-1)$ — целое число. Если $|\delta| > |\gamma|$, то, учитывая, что w_{hi}, $w_{\left(h-\frac{1}{2}\right)i}$ являются концами внешней границы области D', можно представить полученное неравенство в виде

$$\frac{1}{|\delta| - |h\gamma|} > 2l.$$

Оно показывает, что

$$|\delta| < |h\gamma| + \frac{1}{2l} < \frac{3}{2l}, \tag{45}$$

согласно (44).

Если же $|\delta| \leqslant |\gamma|$, то, согласно (41), имеет место то же ограничение (45).

Из (43) и (45) следует последнее ограничение

$$|\beta| < \frac{3}{2} \cdot \frac{L}{l}. \tag{46}$$

Ограничения (41), (42), (45), (46) показывают, что число преобразований, образующих области D' имеющие точки в рассматриваемой полосе (рис. 7), конечно.

Преобразования $u^{\pm 1}$, $v^{\pm 1}$, $s^{\pm 1}$ отображают область D' на области, примыкающие к ней (рис. 8).

Если преобразование T отображает область D на некоторую область D', то преобразования $u^{\pm 1}T$, $v^{\pm 1}T$, $s^{\pm 1}T$ отображают область D на области, примыкающие к D' Точка W полосы, ограниченной прямыми (39), (40) (рис. 7) и не принадлежащая областям, получающимся из D параллельным переносом (рис. 5), заключается между прямой (40) и некоторой полуокружностью C_1, входящей в состав границы одной из этих областей. Если точка W не принадлежит области D_1' (рис. 6), для которой C_1 служит внешней границей, то

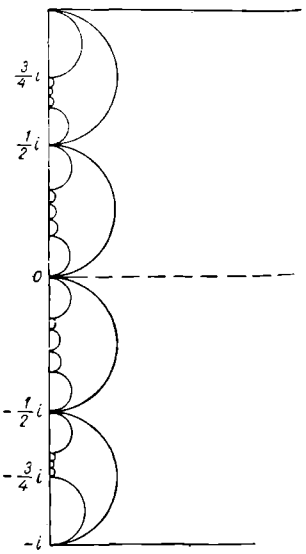


Рис. 8. Отображение области D' с помощью преобразований u, v, s

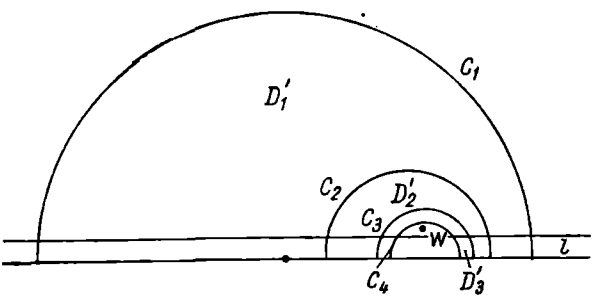


Рис. 9. Предельный случай

она находится между прямой (40) и полуокружностью C_2, входящей в состав внутренней границы области D_1'. К области D_1' примыкает D_2', для которой C_2 является внешней границей. Если точка W не принадлежит D_2', то она заключается между прямой (40) и некоторой полуокружностью C_3, входящей в состав внутренней границы D_2'. Так как число областей D', имеющих точки в полосе, ограниченной прямыми (39) и (40), конечно, следует, что число полуокружностей C_h, содержащих точку W внутри, должно быть также конечным. Если полуокружность C_n последняя из полуокружностей, для которых точка W является внутренней (рис. 9), то W принадлежит области D_n'. Из сказанного следует, что любая точка W рассматриваемой полосы принадлежит некоторой области, получающейся из области D преобразованием (31). Ввиду произвольности величин l и L, характеризующих полосу, можно утверждать, что любая точка полуплоскости $\operatorname{Re} W > 0$ принадлежит некоторой области, отображающей D с помощью преобразования (31). Бесконечно далекая точка D и точка $hi\left(h = 0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}\right)$ отображаются точками W_0, W_{hi}, расположенными на мнимой оси.

Совокупность значений W, принимаемых многозначной функцией

$$W = H(z), \tag{47}$$

как то следует из (3) и (1), изображается точками полуплоскости

$$\operatorname{Re} W > 0.$$

Значениям W, принимаемым главной ветвью $H(z)$, соответствуют точки области D. При этом любой точке области D отвечает только одна точка плоскости z с разрезами. Значениям W, принимаемым некоторой ветвью $H(z)$, соответствуют точки области D_*, получающейся из D преобразованием (1). При этом значению W в области D_* отвечает только одна точка плоскости z с разрезами.

Обратная функция

$$z = F(W) \tag{48}$$

является однозначной аналитической функцией W, регулярной в точках полуплоскости

$$\operatorname{Re} W > 0.$$

Особенные точки функции представляют счетную совокупность, расположенную повсюду плотно на мнимой оси, являющейся особенной линией $F(W)$. Из (3) следует, что функция $F(W)$ не изменяется в результате линейного преобразования аргумента

$$F\left(\frac{\alpha W + \beta i}{\gamma W i + \delta}\right) = F(W), \tag{49}$$

где

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1 \pmod 4, \quad \beta \equiv 0 \pmod 2, \quad \gamma \equiv 0 \pmod 4 \tag{50}$$

$$\alpha\delta + \beta\gamma = 1. \tag{51}$$

Функция $F(W)$ является автоморфной функцией, не изменяющейся при линейном преобразовании аргумента, характеризуемом соотношениями (50) и (51).

Если ввести вместо W новый аргумент y, положив, следуя Гауссу,

$$W = -\frac{1}{\pi} \ln y, \tag{52}$$

то z можно рассматривать как функцию y

$$z = \Phi(y). \tag{53}$$

Преобразование (52) отображает полуплоскость

$$\operatorname{Re} W > 0$$

на круг единичного радиуса. При этом мнимая ось отображается граничной окружностью, а бесконечно далекая точка ее центром. Функция $\Phi(y)$ однозначна внутри круга. Регулярность ее в точках круга, отличных от центра, непосредственно ясна. Центр окружности отображает бесконечно далекую точку плоскости W, являющейся, в свою очередь, отображением точки $z = 1$

$$W = H(z) = \frac{M(z)}{M(z')}.$$

В окрестности точки $z = 1$, согласно (17), имеет место разложение

$$W = \frac{2}{\pi} \ln \frac{1}{z'} + f(z'), \tag{54}$$

где $f(z')$ регулярна в окрестности $z = 1$.

Из (52) и (54) следует, что

$$y = (1 - z^2)\, e^{\pi f(z')} \tag{55}$$

Равенство (55) показывает, что z как функция y регулярна при $y = 0$. Таким образом, функция $\Phi(y)$ регулярна внутри круга единичного радиуса, являющегося особенной ее линией. Внутри круга имеет место разложение

$$\Phi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n. \tag{56}$$

Инв. № Торгсин

Полученные результаты относительно области D значений функций

$$W = H(z)$$

позволяют установить неравенство

$$|\mathfrak{M}(z)| \leqslant |M(z)|, \tag{57}$$

показывающее, что главная ветвь функции $\mathfrak{M}(z)$ превосходит (не меньше) по модулю остальные ее ветви.

В самом деле,

$$\frac{M(z)}{M(-z)} = 1 + 2i\varepsilon(z)\,H(z) \qquad (\mathrm{Re}\, z > 0), \tag{58}$$

где

$$\varepsilon(z) = \pm 1,$$

причем знак $\varepsilon(z)$ определяется знаком мнимой части z. Равенство (58) показывает, что области (рис. 10) значений

$$W^* = \frac{M(z)}{M(-z)} \qquad (\mathrm{Re}\, z \geqslant 0) \tag{59}$$

представляет отображение с помощью преобразования

$$W^* = 1 + 2i\varepsilon(W_1 W) \tag{60}$$

части области D, расположенной справа от полуокружностей Γ_1 и Γ_2. Преобразование (60) отображает часть области $D_{\text{ц}}$ справа от Γ_1 (см. рис. 2) на область D_1^* (рис. 10) и часть области D_2 справа от Γ_2 на область D_2^*. Все точки области D^* расположены вне круга единичного радиуса с центром в O или на его окружности

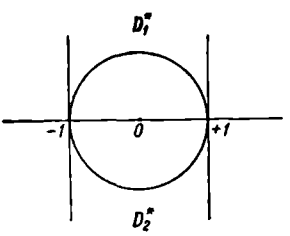


Рис. 10. Область значений W^*

$$|W^*| \geqslant 1. \tag{61}$$

Из (59) и (61) следует

$$|M(-z)| \leqslant |M(z)| \qquad (\mathrm{Re}\, z \geqslant 0). \tag{62}$$

Неравенство (62) позволяет сделать заключение: если в алгоритме среднего арифметико-геометрического при переходе от членов $a_{n-1}(z)$, $b_{n-1}(z)$ к следующим $a_n(z)$, $b_n(z)$ нарушается правило регулярности, то

$$|M(a_n(z),\ b_n(z))| \leqslant |M(a_n^*(z),\ b_n^*(z))|, \tag{63}$$

где $a_n^*(z)$, $b_n^*(z)$ — члены, соответствующие регулярному переходу. Если обозначить ветвь $\mathfrak{M}(z)$, соответствующую единственному нарушению правила регулярности при переходе от $n-1$ членов последовательности к n знаком $M_n(z)$, то, в силу (63) и соотношений

$$M(z) = M(a_n^*(z),\ b_n^*(z)), \quad M_n(z) = M(a_n(z),\ b_n(z)),$$

следует

$$|M_n(z)| \leqslant |M(z)|. \tag{64}$$

Пусть $M_{n_1, n_2, \ldots, n_m}$ обозначает ветвь $\mathfrak{M}(z)$, соответствующую m-кратному нарушению регулярности при переходе от членов $a_{n-1}(z)$, $b_{n-1}(z)$ к последующим $a_n(z)$, $b_n(z)$ при

$$n = n_k, \qquad k = 1,\ 2, \qquad m.$$

Согласно (64),

$$|M_{n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}}(z)| = |M(a_{k-1}(z), b_{k-1}(z))| \geqslant |M_{n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k}(z)|. \quad (65)$$

Последовательное использование неравенства (65) показывает

$$|M(z)| \geqslant |M_{n_1}(z)| \geqslant |M_{n_1, n_2}(z)| \geqslant \ldots \geqslant |M_{n_1, n_2, \ldots, n_m}(z)|. \quad (66)$$

Любая регулярная последовательность алгоритма среднего арифметико-геометрического содержит конечное число нарушений регулярности. Ветви функции $\mathfrak{M}(z)$ являются пределом регулярных последовательностей. Из (66) следует

$$|\mathfrak{M}(z)| \leqslant |M(z)|.$$

Главная ветвь среднего арифметико-геометрического дает значение наибольшее по модулю.