Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института
им.Г.В.Плеханова, т.ХIУ, вып. 1, 1974 г.

УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЬЦА И КРУГОВОЙ АРКИ ПРИ СИММЕТРИЧНОЙ НЕРАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКЕ

Ю.С.Обручев

Кольцевая и арочная крепь, подвергающаяся действию нагрузок, может разрушиться либо от недостаточной прочности, либо от недостаточной устойчивости, которая проверяется определением критической нагрузки, вызывающей потерю устойчивости данной конструкции.

Задача устойчивости решена для конструкций крепи вида кольца и круговой арки [3,5] в случае загружения их равномерно распределенной нагрузкой. Эти решения широко используются при теоретических и инженерных расчетах.

Для случаев загружения таких конструкций неравномерно распределенной нагрузкой указанные решения неприменимы.

В общем виде распределение симметричной неравномерно распределенной нагрузки по контуру кольца или круговой арки можно представить в виде уравнения [4]

$$q_\varphi = \frac{1}{2} q_{min}\left[(\omega+1)-(\omega-1)\cos 2\varphi\right], \qquad (1)$$

где q_φ – радиальная составляющая внешней нагрузки, т/м; ω – коэффициент неравномерности нагрузки, $\omega = \frac{q_{max}}{q_{min}}$; φ – угол отсчета от направления минимальной нагрузки.

Для определения критической нагрузки, вызывающей потерю устойчивости кольца в рассматриваемом случае, выделим элемент длиной dz (рисунок) и составим уравнения равновесия, проектируя внешние и внутренние усилия на направления касательной и нормали, а также уравнение равновесия моментов относительно геометрического центра кольца:

$$-\frac{dN}{dz} + \frac{Q}{R} + q_z = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{dQ}{dz} + \frac{N}{R} - q_y = 0, \qquad (3)$$

$$-\frac{dM}{dz} + R\frac{dN}{dz} - Rq_z = 0, \qquad (4)$$

где M, Q, N – соответственно, изгибающий момент, поперечная и осевая силы, (N положительна при сжатии); R – радиус окружности, проходящей через центр тяжести сечения балки; q_z и q_y – проекции внешней нагрузки на соответствующие направления; координата z отсчитывается вдоль дуги, а y – по направлению к центру.

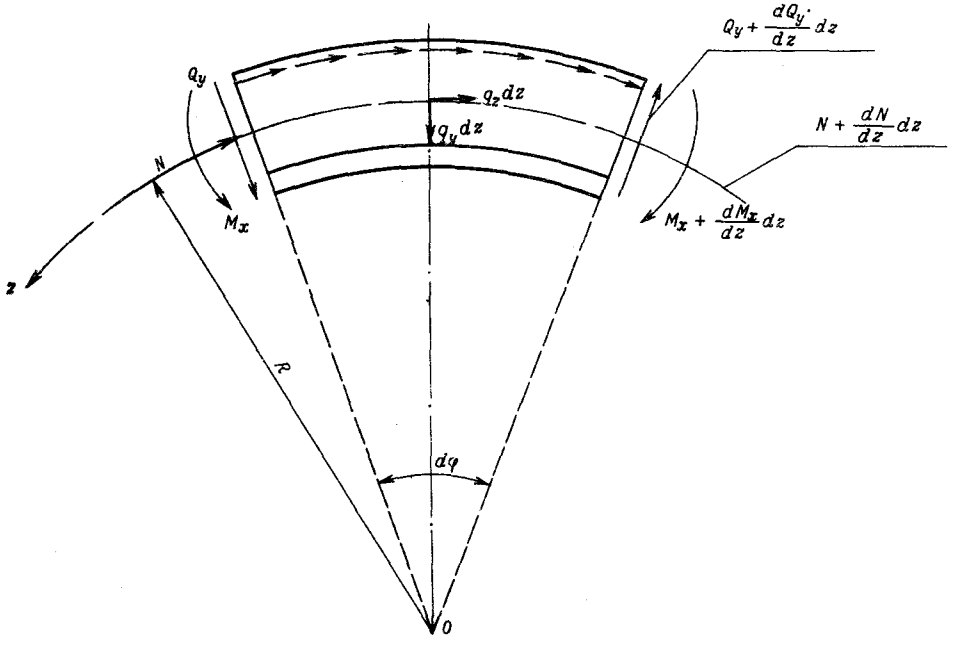
Решая совместно уравнения (2), (3) и (4), получим

$$Q = \frac{dM}{dz} ,$$

$$\frac{d^3M}{dz^3} + \frac{1}{R^2}\frac{dM}{dz} - \frac{q_z}{R} + \frac{dq_y}{dz} = 0 . \qquad (5)$$

Изменение кривизны нейтральной оси балки выражается через прогиб w [2]

$$\varkappa = \frac{d^2w}{dz^2} + \frac{w}{R^2} . \qquad (6)$$



К выводу уравнений равновесия элемента кольца и арки

Первый член этого уравнения тот же, что и при прямой балке, а второй находится приближенно с учетом изменения радиуса кривизны

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} = \frac{1}{R-w} - \frac{1}{R} \simeq \frac{w}{R^2} \quad , \tag{7}$$

где R_1 – радиус кривизны оси сечения балки после прогиба.

С учетом формулы (6) момент M определится [1]

$$M = EI\varkappa = EI\left(\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{w}{R^2}\right) \quad ,$$

где E – модуль упругости; I – момент инерции сечения балки.

Подставляя значение M в выражение (5), получим дифференциальное уравнение для прогиба w

$$EI\left(\frac{d^5w}{dz^5} + \frac{2}{R^2}\frac{d^3w}{dz^3} + \frac{1}{R^4}\frac{dw}{dz}\right) = \frac{q_z}{R} - \frac{dq_y}{dz} \quad . \tag{8}$$

В задачах на определение устойчивости необходимо учитывать радиальную составляющую внешней нагрузки q_y^{φ} и осевую силу N_{φ}, возникающие при изменении кривизны средней линии сечения кольца

$$q_y^{\varphi} = N_{\varphi}\left(\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{w}{R^2}\right) \quad . \tag{9}$$

Закономерность распределения осевой силы N_{φ} по кольцу в функции неравномерной нагрузки (1) можно представить в виде уравнения [4]

$$N_{\varphi} = \frac{R}{2} q_{min}\left[(\omega+1) - (1-\omega)\cos 2\varphi\right] \quad . \tag{10}$$

Подставляя уравнения (9) и (10) в выражение (8), считая $q_z = 0$ и учитывая, что $dz = Rd\varphi$, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$EI\left(\frac{d^5w}{dz^5} + \frac{2}{R^2}\frac{d^3w}{dz^3} + \frac{1}{R^4}\frac{dw}{dz}\right) =$$

$$= \left[\left(x - x_1\cos\frac{2z}{R}\right)\left(\frac{d^3w}{dz^3} + \frac{1}{R^2}\frac{dw}{dz}\right) + \frac{2}{R}\sin\frac{2z}{R}\left(\frac{d^2w}{dz^2} + \frac{w}{R^2}\right)\right], \tag{11}$$

где

$$x = \frac{R}{2} q_{min}(\omega+1) \quad ;$$

$$x_1 = \frac{R}{2} q_{min}(1-\omega) \quad .$$

Примем для прогиба w выражение

$$w = f \sin \frac{n \pi R \varphi}{l} = f \sin \frac{n z}{R} \quad , \qquad (12)$$

где l – длина полуокружности кольца; f – стрела прогиба; n – число полных волн, образующихся по контуру.

Подставляя уравнение (12) в формулу (11) и считая $f \neq 0$ $(n \geqslant 2)$, получаем простую зависимость

$$\frac{EI}{R^2}(n^2-1) = \frac{1}{2} q_{min} R \left[(\omega+1)-(1-\omega)\cos 2\varphi\right] + \frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} \quad .$$

Учитывая, что осевая сила N_φ имеет максимальное значение при $\varphi =$ $= 0$ и 180^0, окончательно получим

$$q_{крит} = \frac{3EI}{\omega R^3} \quad . \qquad (13)$$

При $\omega = 1$, т.е. когда нагрузка равномерно распределена по контуру кольца, в практических расчетах часто применяют известную формулу М.Леви для критической нагрузки

$$q_{крит} = \frac{3EI}{R^3} \quad .$$

Аналогично рассмотрим устойчивость круговой арки, имеющей охватывающий центральный угол 2α и шарнирно закрепленную по концам стоек цилиндрическими неподвижными опорами. Выражение для прогиба w при этом примем

$$w = f \sin \frac{2m\pi z}{l} \quad , \qquad (14)$$

где l – длина средней линии сечения по контуру, $l = 2R\alpha$; m – число полуволн по контуру.

Число m определится из условия неизменности полной длины осевой линии сечения по контуру. При этом деформация средней линии

$$\varepsilon_z = \frac{dv}{dz} - \frac{w}{R^2} \quad ,$$

где v – перемещения вдоль осевой линии.

Второй член в этом выражении учитывает укорочение дуги(формула (7).

Полагая $\varepsilon_z = 0$, получим

$$\frac{dv}{dz} = \frac{w}{R^2} \quad .$$

Оба конца арки остаются неподвижными при условии

$$\int_0^l w\,d\,z = 0 \ .$$

Наименьшее значение m , при котором выполняется это условие, будет, очевидно, $m = 2$.

Подставляя равенство (14) в формулу (11), получим

$$\frac{EI}{R^2}\left(\frac{4\pi^2}{d^2} - 1\right) = \frac{1}{2}\,q_{min}\,R\left[(\omega-1)-(1-\omega)\cos 2\varphi\right] + \\ + \frac{d}{\pi}\,\frac{\sin 2\varphi \sin\frac{2\pi\varphi}{d}}{\cos\frac{2\varphi}{d}} \ .$$

При $N_\varphi = N_{max}$ $(\varphi = 0)$ критическая нагрузка оказывается равной

$$q_{крит} = \frac{EI}{\omega R^3}\left(\frac{4\pi^2}{d^2} - 1\right) \ . \qquad (15)$$

Если в последнем уравнении положить $d = \pi$, при котором $l = 2\pi R$, то получим формулу (13) критической нагрузки для кольца. Если коэффициент неравномерности ω будет равен 1, формула (13) преобразуется в формулу М.Леви.

Формулы (13) и (15), так же, как и формулы М.Леви, применимы при условии, когда окружающая конструкцию среда оказывает постоянное сопротивление ее деформации. Такое предположение по отношению к крепи горной выработки допустимо, если между крепью и породным контуром выработки находится слой забутовочного материала, который характеризуется постоянной величиной пассивного отпора, т.е. при податливой забутовке, которая может свободно течь при деформации крепи.

Решение подобной задачи с учетом активного отпора со стороны среды является областью самостоятельных исследований.

Литература

1. Беляев П.М. Сопротивление материалов. М., Госгортехиздат, 1953.

2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М., "Наука", 1967.

3. Динник А.Н. Устойчивость арок. М., Гостехиздат, 1946.

4. Каретников В.Н. К расчету кольцевых крепей горный выработок. "Проектирование и строительство угольных предприятий", 1966, № 1 (85).

5. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат. 1946.