Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LXIV, вып. 2, 1974 г.

ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПРИ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ СРЕДНЕГО СОДЕРЖАНИЯ Ni и Co В ЛАТЕРИТАХ

И. Г. Клушин, К. А. Кромбет

1. При оценке доверительных пределов для средней концентрации металла в руде учитывают данные о моментах распределения и числе проб. Важно иметь также представление о степени независимости различий между определениями, так как обычное положение о том, что дисперсия среднего в n раз меньше дисперсии единичного определения справедливо только для определений с независимыми вариациями (n — число единичных определений).

В пределах рассматриваемой площади расположено 25 скважин, разделенных на 5 групп с одинаковым числом скважин в каждой группе. Расстояние между скважинами одной группы 150—250 *мм*. Расстояние между группами скважин 450—600 *м*. Концентрация Ni и Co в латеритах, вскрытых каждой скважиной, определена усреднением проб, взятых на глубине 1,2; 3 и 6 *м*. Содержание металлов в пробах установлено химическими анализами в лаборатории никелевого комбината «Команданте Рене Рамос Латур».

В общем случае следует ожидать, что вариации Ni и Co по площади имеют локальную и региональную компоненту. Локальная компонента характеризуется радиусом автокорреляции, меньшим расстояния между скважинами или близким к нему. Эта компонента определяет ту часть вариаций, которая проявляется независимо от скважины к скважине. Региональная компонента характеризуется радиусом автокорреляции, большим расстояния между группами скважин или равным ему. Соотношение между амплитудами локальной и региональной компонент неизвестно, однако может быть установлено экспериментально.

При наличии одной только локальной компоненты можно применять указанное выше правило для оценки дисперсии среднего. Проявление разных компонент вариаций можно установить, уменьшая число скважин, взятых для определения средней концентрации металлов. В том случае, когда концентрация металлов изменяется только локально, уменьшение числа скважин в каждой группе на одну скважину статистически эквивалентно уменьшению числа групп скважин на одну группу (общее число исключенных скважин в каждом из этих вариантов 5). При наличии региональной компоненты уменьшение числа групп скважин вызовет эффект, более существенный, чем уменьшение скважин в группах, при одинаковом числе исключаемых скважин.

2. Будем анализировать величину X, равную модулю разности между средним содержанием Ni и Co, определенным по всем скважинам, и средним содержанием, вычисленным по уменьшенному числу скважин. Величина X *является интересующим нас откликом на изменение условий.* Изменение условий, проявляющееся в уменьшении скважин, в свою очередь, отражает эффект двух факторов и, возможно, их взаимодействие: S — фактор уменьшения числа скважин внутри группы; G — фактор уменьшения групп скважин; SG — взаимодействие факторов.

Зависимость X от факторов и их взаимодействия представим в форме

$$X_{ijk} = \mu + S_i + G_j + SG_{ij} + \varepsilon_{ijk}, \qquad (1)$$

где μ — const; i — уровень фактора S; j — уровень фактора G, ε — случайное отклонение; X_{ijk} — результат эксперимента, в котором фактор S имеет уровень i, фактор G — уровень j, эксперимент повторен k-й раз.

Таблица 1

Факторный эксперимент по оценке средней концентрации Ni

Фактор		S				$T_{.j.}$
		1	2	3	4	
G	1	0	3	39	25	349
		0	27	11	17	
		0	19	7	57	
		0	11	27	23	
		0	7	9	19	
		0	7	19	22	
		0	74	112	163	
	2	8	13	19	1	560
		19	25	51	56	
		14	22	45	75	
		12	0	19	50	
		28	2	23	4	
		12	7	7	38	
		93	79	164	224	
	3	53	15	24	66	802
		43	60	32	46	
		27	15	13	47	
		6	13	24	21	
		53	56	69	16	
		53	3	23	24	
		235	162	185	220	
	4	65	97	59	34	1289
		43	76	43	39	
		80	51	21	44	
		52	49	49	36	
		80	28	56	76	
		52	49	14	96	
		372	350	242	325	
$T_{i..}$		700	665	703	932	$T_{...} = 3000$

Таблица 2

Факторный эксперимент по оценке средней концентрации Co

Фактор		S				$T_{.j.}$
		1	2	3	4	
G	1	0	4	0	6	36
		0	1	5	1	
		0	1	2	2	
		0	1	2	1	
		0	0	2	2	
		0	1	0	5	
		0	8	11	17	
	2	3	4	5	0	69
		2	3	4	5	
		0	1	1	2	
		3	1	4	2	
		2	3	1	3	
		3	4	8	5	
		13	16	23	17	
	3	2	1	5	6	90
		4	3	7	3	
			2	9	4	
			0	4	2	
		3	4	6	12	
		2	3	0	0	
		19	13	31	27	
	4	9	3	12	3	101
		3	10	2	4	
		2	2	3	0	
		3	4	6	0	
		2	8	1	13	
		2	1	3	5	
		21	28	27	25	
$T_{i..}$		53	65	92	86	$T_{...} = 296$

В табл. 1 и 2 представлены результаты экспериментов. Числа в графах — тысячные доли процента. Среднее содержание Ni при учете всех скважин 0,804%, Co 0,096%.

Чтобы выявить возможное проявление нелинейных эффектов, каждый фактор задаем на 4 уровнях. Все эксперименты ($4\times4=16$) проведены независимо 6 раз, получено 96 величин X_{ijk}. Номера исключаемых скважин и групп определены случайным образом.

Для дисперсионного анализа данных вычисляем суммы 6 определений для каждой комбинации уровней i, j

$$T_{ij.} = \sum_{k=1}^{6} X_{ijk}. \qquad (2)$$

Вычисляем также суммы по столбцам и строкам, равные, соответственно

$$T_{\mathrm{j.}} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{4} \sum_{\mathrm{k}=1}^{6} X_{\mathrm{ijk}}, \tag{3}$$

$$T_{\mathrm{.j.}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{4} \sum_{\mathrm{k}=1}^{6} X_{\mathrm{ijk}}, \tag{4}$$

$$T_{\ldots} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{4} \sum_{\mathrm{j}=1}^{4} \sum_{\mathrm{k}=1}^{6} X_{\mathrm{ijk}}. \tag{5}$$

Суммы (2)—(5) используем для вычисления сумм квадратов $SS_{\text{общ}}$, SS_{S}, SS_{G}, SS_{SG}, SS_{ε} в соответствии с правилами дисперсионного анализа [1, 4], SS_{S} — сумма квадратов, характеризующая влияние фактора S; SS_{G} — то же, фактора G; SS_{SG} — то же, взаимодействия факторов S и G; SS_{ε} — то же, случайных отклонений; $SS_{\text{общ}}$ — общая сумма квадратов,

$$SS_{\text{общ}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{4} \sum_{\mathrm{j}=1}^{4} \sum_{\mathrm{k}=1}^{6} X_{\mathrm{ijk}}^2 - \frac{1}{96} T_{\ldots}^2, \tag{6}$$

$$SS_{\mathrm{S}} = \frac{1}{24} \sum_{\mathrm{i}=1}^{4} T_{\mathrm{i..}}^2 - \frac{1}{96} T_{\ldots}^2, \tag{7}$$

$$SS_{\mathrm{G}} = \frac{1}{24} \sum_{j=1}^{4} T_{\mathrm{.j.}}^2 - \frac{1}{96} T_{\ldots}^2, \tag{8}$$

$$SS_{\mathrm{SG}} = \frac{1}{6} \sum_{\mathrm{i}=1}^{4} \sum_{\mathrm{j}=1}^{4} T_{\mathrm{ij.}}^2 - \frac{1}{96} T_{\ldots}^2 - SS_{\mathrm{S}} - SS_{\mathrm{G}}, \tag{9}$$

$$SS = SS_{\text{общ}} - SS_{\mathrm{S}} - SS_{\mathrm{G}} - SS_{\mathrm{SG}}. \tag{10}$$

В табл. 3 и 4 приведены результаты анализа. В правой части таблиц сопоставлены значения F, вычисленные эмпирически, с теоретически допустимыми значениями. Эмпирически найденная величина F рав-

Таблица 3

Дисперсионный анализ данных о точности определения средней концентрации кобальта в латеритах

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	F	$F_{0,995}$	$F_{0,95}$	$F_{0,9}$
S_i	$4-1=3$	1877	626	1,87	4,65	2,73	2,16
G_j	$4-1=3$	20421	6807	20,38	4,65	2,73	2,16
$S \times G_{ij}$ взаимодействие	$(4-1)\times(4-1)=9$	4901	545	1,63	2,04	2,01	1,72
ε_{ijk}	$(6-1)\times 4\times 4=80$	26720	334				
Всего	$96-1=95$	53923					

Таблица 4

Дисперсионный анализ данных о точности определения средней концентрации никеля в латеритах

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	F	$F_{0,995}$	$F_{0,95}$	$F_{0,9}$
S_i	3	41	14	2,00	4,65	2,73	2,16
G_j	3	102	34	4,86	4,65	2,73	2,16
$S \times G_{ij}$	9	30	3	<1	2,94	2,01	1,72
ε_{ijk}	80	574	7				
Всего	95	747					

на отношению среднего квадрата эффекта к среднему квадрату ошибки. Теоретически допустимые величины F, отвечающие распределению Снедекора, зависят от принятого уровня доверия и числа степеней свободы для числителя и знаменателя дроби. Если эмпирическая величина F превышает теоретически допустимую, можно утверждать, что соответствующий фактор значим при данном уровне доверия.

Принимая во внимание, что факторы S и G имеют по 3 степени свободы (так как заданы на 4 уровнях), целесообразно попытаться установить роль нелинейных компонент этих факторов. При трех степенях свободы сумму квадратов SS_G разложим на суммы $SS_{G_{лин}}$; $SS_{G_{кв}}$; $SS_{G_{куб}}$, отражающие не зависимые друг от друга эффекты: линейный, квадратический и кубический. Аналогичную операцию проделаем в отношении суммы квадратов SS_S. Сумму SS_{SG}, характеризующую взаимодействие факторов S и G, разложим на 9 независимых составляющих

$$SS_{S_{лин}\,G_{лин}};\ SS_{S_{лин}\,G_{кв}};\ SS_{S_{лин}\,G_{куб}};$$
$$SS_{S_{кв}\,G_{лин}};\ SS_{S_{кв}\,G_{кв}};\ SS_{S_{кв}\,G_{куб}};$$
$$SS_{S_{куб}\,G_{лин}};\ SS_{S_{куб}\,G_{кв}};\ SS_{S_{куб}\,G_{куб}}.$$

Для вычисления перечисленных компонент воспользуемся коэффициентами ортогональных полиномов [3]. Коэффициенты применяем к суммам $T_{i.}$, $T_{.j}$, $T_{ij.}$. При 4 уровнях задания фактора G его линейный эффект равен

$$-3 \cdot T_{.1.} - 1 \cdot T_{.2.} + 1 \cdot T_{.3.} + 3 \cdot T_{.4.}.$$

В случае никеля

$$-3 \times 349 - 1 \times 560 + 1 \times 802 + 3 \times 1289 = 3062.$$

Сумма квадратов коэффициентов ортогональных полиномов в данном случае равна $(-3)^2+(-1)^2+(1)^2+(3)^2=20$; сумма $T_{.j.}$ содержит 24 члена. Поэтому

$$SS_{G_{лйн}} = \frac{3062^2}{24 \times 20} = 19533.$$

Аналогично находим $SS_{G_{кв}}=793$; $SS_{G_{куб}}=95$. Таким образом, исходную сумму $SS_G=20421$ мы разложили на три независимых суммы.

Подробности вычислений описаны в руководствах по планированию экспериментов и обработке материалов [2]. Как видим, роль нелинейных компонент фактора G пренебрежимо мала.

Результаты полного дисперсионного анализа данных о никеле сведены в табл. 5. Теоретически допустимые значения F, используемые для

Таблица 5

Полный дисперсионный анализ данных о точности определения средней концентрации никеля в латеритах

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Распределение суммы квадратов		F	$F_{0,995}$ $F_{0,95}$ $F_{0,9}$
S_i	3	1877	лин	1122	3,36	
			кв	726	2,17	
			куб	29	<1	
G_j	3	20421	лин	19533	58,48	
			кв	793	2,37	8,39 3,97 2,78
			куб	95	<1	
$S \times G_{ij}$	9	4905	лин × лин	1010	3,02	
			лин × кв	65	<1	
			лин × куб	998	2,99	
			кв × лин	358	1,07	
			кв × кв	1605	4,81	
			кв × куб	1	<1	
			куб × лин	214	<1	
			куб × кв	585	1,75	
			куб × куб	68	<1	
ε_{ijk}	80	26720				
Всего	95	53923				

проверки значимости, во всех случаях определены при условии, что числитель дроби имеет одну степень свободы, знаменатель — 80 степеней. Полный анализ выявил следующие наиболее существенные компоненты общей суммы квадратов:

$SS_{G_{лин}}$ (F=58,48; значимость с уровнем доверия 0,999)
$SS_{S_{кв}G_{кв}}$ (F= 4,81; » » » 0,95)
$SS_{S_{лин}}$ (F= 3,36; » » » 0,90)

Дисперсионный анализ данных о кобальте привел к сходным результатам (см. табл. 4). Наибольшее влияние на величину X оказывает фактор G (значимость с уровнем доверия 0,995).

С учетом выводов дисперсионного анализа общее уравнение (1) можно преобразовать в более простое или более сложное уравнение. Так, при уровне доверия 0,99 для Ni

$$X_{ijk} = \mu + (G_{лин})_j + \varepsilon_{ijk}. \qquad (11)$$

С понижением уровня доверия до 0,9

$$X_{ijk}=\mu+(S_{лин})_i+(G_{лин})_j+(S_{лин}\times G_{лин})_{ij}+(S_{лин}\times G_{куб})_{ij}+ \\ +(S_{кв}\times G_{кв})_{ij}+\varepsilon_{ijk}. \qquad (12)$$

Уменьшение достоверности заключения сопровождается резким усложнением формы связи.

Заключение

В рассматриваемых геологических условиях региональная компонента вариаций содержания Ni и Co в латеритах гораздо сильнее влияет на оценку средней концентрации, чем локальная компонента. В связи с этим для оценки среднего и доверительных пределов для него целесообразно учитывать усредненные значения по группам и число групп скважин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Миллер Р., Кан Дж. Статистический анализ в геологических науках. Мир, 1965.
2. Хикс Ч. Основные принципы планирования эксперимента. Мир, 1967.
3 Delury D. B. Values and integrals of the Orthogonal polinomials up to $n=26$. University of Toronto Press, 1950.
4. Krumbein W. C., Graybill F. A. An Introduction to Statistical models in Geology. Mc Graw Hill, N. Y., 1965.