Записки Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LXIV, вып. 2, 1974 г.

ТЕОРИЯ ПЛЕНОЧНЫХ ОРЕОЛОВ

О. Ф. Путиков

Экспериментально обоснованная гипотеза о существовании пленочных ореолов впервые выдвинута Н. Ф. Майоровым [3]. Для количественного описания распределения концентрации в пленочных ореолах была предложена система дифференциальных уравнений [2]

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \varphi(C, C_1, \vec{u}, D, D_1, k) + \lambda^* C + (\vec{u}\,\mathrm{grad}\,C) = D\nabla^2 C, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial \tau} - \varphi(C, C_1, \vec{u}, D, D_1, k) + \lambda_1^* C_1 + \varphi_1(C_1, q, K_i, k) = D_1 \nabla^2 C_1, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = \varphi_1(C_1, q, K_i, k) - \lambda_2^* q, \qquad (3)$$

где C, C_1, q — концентрация компонента в свободной жидкости, в пленочной жидкости и твердом скелете соответственно; $\vec{u}$ — скорость движения жидкости; τ — время; λ^*, λ_1^*, λ_2^* — постоянные распада компонента в свободной жидкости, пленочной жидкости и твердом скелете соответственно; D — коэффициент диффузии компонента в среде; D_1 — коэффициент диффузии компонента в пленке (в связи с повышенной вязкостью пленочной жидкости $D_1 < D$) [1]; $\varphi(C, C_1, \vec{u}, D, D_1, k)$ — левая часть уравнения кинетики процесса физико-химического взаимодействия свободной жидкости и пленочной; $K_i (i = 1, 2, \ldots, N)$ — константы скоростей химических реакций раствора со средой; k — постоянная, зависящая от конкретного физико-химического состояния свободной и пленочной жидкости; $\varphi_1(C_1, q, K_i, k)$ — левая часть уравнения кинетики процесса физико-химического взаимодействия пленочной жидкости и твердого скелета.

Для решения системы (1)—(3) необходимо задать конкретный вид кинетических функций φ и φ_1.

Рассмотрим частный случай, когда на поверхности твердого скелета происходит неравновесная сорбция компонента

$$\varphi_1(C_1, q, K_i, k) = \gamma^* C_1. \qquad (4)$$

Система (1)—(3) получена в предположении, что подвижная фаза несжимаема, объем твердого скелета не меняется и термодиффузия ве-

щества отсутствует. Кроме того, введено предположение о существовании поверхности скольжения, разделяющей неподвижную пленочную жидкость и подвижную свободную жидкость. Такое предположение при небольших скоростях течения, наблюдаемых в природе, вполне оправдано [1].

Если считать раствор достаточно разбавленным, то, на основании распределения Больцмана для частиц, находящихся в некотором силовом поле, устанавливается [5] соотношение между концентрацией компонента в свободной и пленочной жидкости

$$C_1 = \varkappa C, \tag{5}$$

где $\varkappa = e^{-W/KT}$; W — полная энергия молекулы (иона) компонента в пленочной жидкости, причем для иона, в зависимости от знака, может быть $W \gtrless 0$; K — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура.

Далее, если предположить, что кинетика взаимодействия между свободной и пленочной жидкостью определяется отклонением концентраций от равновесного состояния, причем с линейной зависимостью, то уравнение кинетики можно выразить в виде

$$\varphi(C,\ C_1,\ \vec{u},\ D,\ D_1,\ k) = \nu(C_1 - \varkappa C), \tag{6}$$

где ν — некоторая постоянная.

Учитывая кинетические уравнения (4) и (6), систему (1)—(3) можно представить в виде

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} - \nu(C_1 - \varkappa C) + \lambda^* C + (\vec{u}\ \operatorname{grad}\ C) = D\nabla^2 C, \tag{7}$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial \tau} + \nu(C_1 - \varkappa C) + \lambda_1^*\, C_1 + \gamma^* C_1 = D_1 \nabla^2 C_1, \tag{8}$$

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} - \gamma^*\, C_1 + \lambda_2^* q = 0. \tag{9}$$

Рассмотрим несколько частных случаев решения системы (7)—(9).

Одномерные ореолы

1. **Диффузионный ореол.** В этом случае конвекция отсутствует, $u = 0$ и система (7)—(9) имеет вид

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\nu}{D}[C_1 - (\varkappa + \lambda) C] - \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial C}{\partial \tau} = 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} - \frac{\nu}{D_1}[(1 + \lambda_1 + \gamma) C_1 - \varkappa C] - \frac{1}{D_1} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial \tau} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{1}{\nu} \cdot \frac{\partial q}{\partial \tau} - \gamma C_1 + \lambda_2 q = 0, \tag{12}$$

где x — координата, $\lambda = \frac{\lambda^*}{\nu}$, $\lambda_1 = \frac{\lambda_1^*}{\nu}$, $\lambda_2 = \frac{\lambda_2^*}{\nu}$, $\gamma = \frac{\gamma^*}{\nu}$.

В стационарном состоянии $\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{\partial C_1}{\partial \tau} = \frac{\partial q}{\partial \tau}$ и уравнения (10)—(12) принимают вид

$$\frac{d^2 C}{dx^2} + \frac{\nu}{D}[C_1 - (\varkappa + \lambda) C] = 0, \tag{13}$$

$$\frac{d^2C_1}{dx^2} - \frac{\nu}{D_1}[(1+\lambda_1+\gamma)C_1 - C] = 0, \tag{14}$$

$$q = \frac{\gamma}{\lambda_2} C_1. \tag{15}$$

Как видно, уравнения (13), (14) независимы от уравнения (15).

Если на границе $x=0$ находится источник рудного компонента, так что в этой точке поддерживается постоянная концентрация C_0 в свободной и C_{10} в пленочной жидкости, то граничные условия примут вид

$$C|_{x=0} = C_0, \tag{16}$$

$$C_1|_{x=0} = C_{10}, \tag{17}$$

C и C_1 — ограничены.

Применяя к системе уравнений (13)—(14) при граничных условиях (16) и (17) интегральное синус-преобразование Фурье по x, получим

$$-\left[\omega^2 + (\varkappa+\lambda)\frac{\nu}{D}\right]F + \frac{\nu}{D}F_1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega C_0 = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\nu\varkappa}{D_1}F - \left[\omega^2 + (1+\lambda_1+\gamma)\frac{\nu}{D_1}\right]F_1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\omega C_{10} = 0, \tag{19}$$

где $F = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty C(x)\sin\omega x dx$, $F_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty C_1(x)\sin\omega x dx$.

Решая систему (18), (19) относительно F и F_1 и применяя обратное синус-преобразование Фурье, получим выражения для концентраций

$$C = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{C_0\left[\omega^2 + (1+\lambda_1+\gamma)\frac{\nu}{D_1}\right] + C_{10}\frac{\nu}{D}}{\left[\omega^2 + (\varkappa+\lambda)\frac{\nu}{D}\right]\left[\omega^2 + (1+\lambda_1+\gamma)\frac{\nu}{D_1}\right] - \frac{\nu^2}{DD_1}\varkappa}\,\omega\sin\omega x d\omega, \tag{20}$$

$$C_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{C_0\frac{\nu\varkappa}{D_1} + C_{10}\left[\omega^2 + (\varkappa+\lambda)\frac{\nu}{D}\right]}{\left[\omega^2 + (\varkappa+\lambda)\frac{\nu}{D_1}\right]\left[\omega^2 + (1+\lambda_1+\gamma)\frac{\nu}{D_1}\right] - \frac{\nu^2}{DD_1}\varkappa}\,\omega\sin\omega x d\omega. \tag{21}$$

Для устойчивого нераспадающегося вещества рассмотрим два частных случая: $\varkappa=0$ и $\varkappa=\infty$.

В случае $\varkappa=0$ из формулы (20) и (21) имеем

$$C = \frac{2}{\pi}C_0\int_0^\infty \frac{\sin\omega x}{\omega}d\omega + \frac{2}{\pi}C_{10}\frac{\nu}{D}\int_0^\infty \frac{1}{\omega^2 + (1+\gamma)\frac{\nu}{D_1}} \times \frac{\sin\omega x}{\omega}d\omega,$$

$$C_1 = \frac{2}{\pi} C_{10} \int_0^\infty \frac{1}{\omega^2 + (1+\gamma)\frac{\nu}{D_1}} \omega \sin \omega x d\omega,$$

или

$$C = C_0 + \frac{C_{10}}{1+\gamma} \cdot \frac{D_1}{D} \left[1 - e^{-x\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\gamma)}}\right], \tag{22}$$

$$C_1 = C_{10} e^{-x\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\gamma)}}. \tag{23}$$

Как видно из формулы (5), условие $\varkappa = 0$ соответствует положению, когда компонент стремится сосредоточиться в свободной жидкости и уйти из пленочной.

Формулы (22) и (23) показывают, что с удалением от источника концентрация в пленочной жидкости падает до нуля, а концентрация в свободной жидкости возрастает до величины

$$C_0 + \frac{C_{10}}{1+\gamma} \cdot \frac{D_1}{D}.$$

В случае $\varkappa = \infty$ из формул (20) и (21) получаем

$$C = 0,$$

$$C_1 = \left(C_0 \frac{D}{D_1} + C_{10}\right) e^{-x\sqrt{\gamma \frac{\nu}{D_1}}}. \tag{24}$$

Условие $\varkappa = \infty$ соответствует положению, когда компонент стремится сосредоточиться в пленочной жидкости. При этом концентрация в пленочной жидкости, как видно из (24), из-за поглощения твердым скелетом убывает с удалением от источника по экспоненциальному закону.

2. **Диффузионно-фильтрационный ореол.** Будем считать, что скорость движения жидкости постоянна и имеет только одну составляющую по оси x величиной u. Переносом вещества в свободной жидкости диффузией можно пренебречь по сравнению с переносом конвекцией, т. е. в выражении (7) можно положить $D = 0$. В стационарном режиме при этом из системы (7)—(9) получаем систему

$$\frac{dC}{dx} - \frac{\nu}{u}[C_1 - (\varkappa + \lambda) C] = 0, \tag{25}$$

$$\frac{d^2 C_1}{dx^2} - \frac{\nu}{D_1}[(1 + \lambda_1 + \gamma) C_1 - \varkappa C] = 0, \tag{26}$$

$$q = \frac{\gamma}{\lambda_2} C_1. \tag{27}$$

Граничные условия остаются те же, что для выражений (16) и (17), функции C и C_1 ограничены.

Если ввести новую функцию $\frac{dC_1}{dx} = y$, то система двух уравнений (25) и (26) сводится к системе трех линейных однородных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами [6].

Полное решение системы трех уравнений в этом случае будет иметь вид

$$C = A_1 e^{\mu_1 x} + A_2 e^{\mu_2 x} + A_3 e^{\mu_3 x},$$
$$C_1 = B_1 e^{\mu_1 x} + B_2 e^{\mu_2 x} + B_3 e^{\mu_3 x},$$
$$y = \frac{dC_1}{ax} = M_1 e^{\mu_1 x} + M_2 e^{\mu_2 x} + M_3 e^{\mu_3 x},$$

где μ_1, μ_2, μ_3 — корни кубического характеристического уравнения

$$\left[\mu + \frac{\nu}{u}(\varkappa + \lambda)\right]\mu^2 + \frac{\nu^2}{D_1 u}\varkappa - \left[\mu + \frac{\nu}{u}(\varkappa + \lambda)\right]\left[\mu + \frac{\nu}{D_1}(1 + \lambda_1 + \gamma)\right] = 0, \tag{28}$$

A_i, B_i, M_i ($i = 1, 2, 3$) — некоторые постоянные, вообще зависимые. Связи между этими постоянными находятся из уравнений, полученных последовательной подстановкой решений, соответствующих корням μ_1, μ_2, μ_3, в уравнения (25) и (26). Значения оставшихся независимых постоянных находятся из граничных условий (в данном случае — условий (16)—(17) и ограниченности концентраций на бесконечности при $x \to \infty$).

3. **Нестационарный диффузионный ореол.** Распределение концентраций в этом случае находится как решение системы уравнений (10)—(12) при граничных условиях (16)—(17). Применяя для решения одновременно интегральное преобразование Лапласа по τ и сунус-преобразование Фурье по x, получим выражение для концентраций в свободной и пленочной жидкости

$$C = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{C_0 D\,[D_1\omega^2 + (1 + \lambda_1 + \gamma)] + C_{10} D_1 \nu}{[D\omega^2 + \varkappa + \lambda]\,[D_1\omega^2 + (1 + \lambda_1 + \gamma)\nu] - \nu^2\varkappa}\,\omega \sin \omega x d\omega +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\tau\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}\right)}\left\{C_0 D\left|D_1\omega^2 + (1 + \lambda_1 + \gamma) - \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}\right| + \right.}{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}\right)\sqrt{\frac{b^2}{4} - a}}$$

$$\left. + C_{10} D_1 \nu\right\}}{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b_2}{4} - a}\right)\sqrt{\frac{b^2}{4} - a}} \times \omega \sin \omega x d\omega -$$

$$- \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\tau\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}\right)}\left\{C_0 D\left[D_1\omega^2 + (1 + \lambda_1 + \gamma) - \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}\right] + \right.}{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}\right)\sqrt{\frac{b^2}{4} - a}}$$

$$\left. + C_{10} D_1 \nu\right\}}{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}\right)\sqrt{\frac{b^2}{4} - a}} \times \omega \sin \omega x d\omega, \tag{29}$$

$$C_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{C_0 D\nu\varkappa + C_{10} D_1\,[D\omega^2 + (\varkappa + \lambda)\nu]}{[D\omega^2 + (\varkappa + \lambda)\nu]\,[D_1\omega^2 + (1 + \lambda_1 + \gamma)\nu] - \nu^2\varkappa}\,\omega \sin \omega x d\omega +$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\tau\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a}\right)}\left\{C_0D_1\nu\varkappa+C_{10}D_1\left[D\omega^2+(\varkappa+\lambda)\nu-\frac{b}{2}-\right.\right.}{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a}\right)\sqrt{\frac{b^2}{4}-a}}$$

$$\frac{\left.\left.-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a}\right]\right\}}{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a}\right)\sqrt{\frac{b^2}{4}-a}}\omega\sin\omega x d\omega-$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\tau\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a}\right)}\left\{C_0D_1\nu\varkappa+C_{10}D_1\left[D\omega^2+(\varkappa+\lambda)\nu-\frac{b}{2}+\right.\right.}{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a}\right)\sqrt{\frac{b^2}{4}-a}}$$

$$\frac{\left.\left.+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a}\right]\right\}}{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a}\right)\sqrt{\frac{b^2}{4}-a}}\omega\sin\omega x d\omega, \qquad (30)$$

где

$$a=[D\omega^2+(\varkappa+\lambda)\nu][D_1\omega^2+(1+\lambda_1+\gamma)\nu],$$
$$b=\omega^2(D_1+D_2)+\nu(1+\lambda+\varkappa+\lambda_1+\gamma).$$

После определения C_1 выражение для q можно получить из уравнения (12).

При $\tau\longrightarrow\infty$ формулы (29) и (30) переходят соответственно в формулы (20) и (21), выведенные для стационарного случая.

Двухмерный диффузионно-фильтрационный ореол

Если скорость движения свободных вод имеет только одну составляющую, направленную по оси x, для определения концентраций C и C_1 имеем из выражений (7), (8) систему уравнений

$$\frac{\partial^2C}{\partial z^2}+\frac{\partial^2C}{\partial x^2}-\frac{u}{D}\cdot\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\nu}{D}[C_1-(\varkappa+\lambda)C]=0, \qquad (31)$$

$$\frac{\partial^2C_1}{\partial z^2}+\frac{\partial^2C_1}{\partial x^2}-\frac{\nu}{D_1}[(1+\lambda_1+\gamma)C_1-\varkappa C]=0. \qquad (32)$$

Решить систему (31)—(32) можно модифицированным методом последовательных приближений: на первом шаге одну из функций C или C_1 считать заданной (нулевое приближение) и из соответствующего уравнения найти другую функцию; считая затем эту функцию известной, на втором шаге из другого уравнения уточнить нулевое приближение первой функции, т. е. получить первое приближение первой функции; затем процедуру повторить.

Не доказывая сходимости такого процесса, рассмотрим конкретное решение. Если в единице объема породы объем пленок мал по сравне-

нию с объемом свободной жидкости (коэффициент имеет бо́льшую величину), то влиянием изменения концентрации в пленке на процесс поглощения можно пренебречь по сравнению с изменением концентрации в свободной жидкости. Тогда в уравнении (31) слагаемым C_1 можно пренебречь, а само уравнение становится независимым и его решением при расположении линейного источника мощностью Q в начале координат является известная функция [4]. Подставляя эту функцию в уравнение (32), получим для концентрации в пленке

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} - \frac{\nu}{D_1}(1 + \lambda_1 + \gamma)C_1 + \\ + \frac{\nu \varkappa Q}{D_1 D \pi} e^{x\frac{u}{2D}} K_0\left[\sqrt{\left[\frac{u}{4D^2} + \frac{\nu(\varkappa + \lambda)}{D}\right](z^2 + x^2)}\right] = 0, \qquad (33)$$

где $K_0(x)$ — функция Бесселя 2-го рода нулевого порядка от мнимого аргумента.

Если линейный источник концентрации в пленке мощностью q_0 также находится в начале координат, то граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial C_1}{\partial x}\bigg|_{x=-0} - \frac{\partial C_1}{\partial x}\bigg|_{x=+0} = \frac{q_0}{D}\delta(z), \qquad (34)$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial z}\bigg|_{z=0} = 0 \text{ при } -\infty < x < 0,\ 0 < x < \infty, \qquad (35)$$

$$C_1 x^2 + z^2 \to \infty \to 0, \qquad (36)$$

где $\delta(z)$ — дельта-функция,

$$\delta(z) = \begin{cases} \infty \text{ при } z = 0 \\ 0 \text{ при } z \neq 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z)\, dz = 1.$$

Для решения задачи применим интегральное косинус-преобразование Фурье по z. В результате получим

$$\frac{d^2 F_1}{dx^2} - \left[\frac{\nu}{D_1}(1 + \lambda_1 + \gamma) + \omega^2\right] F_1 + \\ + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\nu \varkappa Q e^{-x\left(\sqrt{\frac{u^2}{4D^2} + \frac{\nu(\varkappa+\lambda)}{D} + \omega^2} - \frac{u}{2D}\right)}}{2D_1 D \sqrt{\frac{u^2}{4D^2} + \frac{\nu(\varkappa+\lambda)}{D} + \omega^2}} = 0, \qquad (37)$$

$$\frac{d^2 F_2}{dx^2} - \left[\frac{\nu}{D_1}(1 + \lambda_1 + \gamma) + \omega^2\right] F_2 + \\ + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\nu \varkappa Q e^{x\left(\sqrt{\frac{u^2}{4D^2} + \frac{\nu(\varkappa+\lambda)}{D} + \omega^2} + \frac{u}{2D}\right)}}{2D_1 D \sqrt{\frac{u^2}{4D^2} + \frac{\nu(\varkappa+\lambda)}{D} + \omega^2}} = 0, \qquad (38)$$

где

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} C_1(x, z) \cos z dz = \begin{cases} F_1 \text{ при } 0 \leqslant x < \infty \\ F_2 \text{ при } -\infty < x \leqslant 0. \end{cases}$$

Функции F_1 и F_2 с учетом системы (34)—(36) должны удовлетворять условиям

$$\left.\frac{dF_2}{dx}\right|_{x=0} - \left.\frac{dF_1}{dx}\right|_{x=0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{q_0}{D}, \tag{39}$$

$$F_1|_{x=0} = F_2|_{x=0}, \tag{40}$$

$$F_1|_{x \to \infty} \to 0, \tag{41}$$

$$F_2|_{x \to -\infty} \to 0. \tag{42}$$

Имея в виду условия (41) и (42), решение уравнений (37) и (38) примем в виде

$$F_1 = Ae^{-x\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\nu \varkappa Qe^{-x\left(\sqrt{\frac{u^2}{4D^2}+\frac{\nu(\varkappa+\lambda)}{D}+\omega^2}-\frac{u}{2D}\right)}}{2D_1 D\sqrt{\frac{u^2}{4D^2}+\frac{\nu(\varkappa+\lambda)}{D}+\omega^2}\left\{T_1^2 - \left[\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2\right]\right\}}, \tag{43}$$

$$F_2 = Be^{x\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\nu \varkappa Qe^{x\left(\sqrt{\frac{u^2}{4D^2}+\frac{\nu(\varkappa+\lambda)}{D}+\omega^2}+\frac{u}{2D}\right)}}{2D_1 D\sqrt{\frac{u^2}{4D^2}+\frac{\nu(\varkappa+\lambda)}{D}+\omega^2}\left\{T_2^2 - \left[\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2\right]\right\}}, \tag{44}$$

где

$$T_1 = \sqrt{\frac{u^2}{4D^2}+\frac{\nu(\varkappa+\lambda)}{D}+\omega^2} - \frac{u}{2D},$$

$$T_2 = \sqrt{\frac{u^2}{4D^2}+\frac{\nu(\varkappa+\lambda)}{D}+\omega^2} + \frac{u}{2D}.$$

Определяя постоянные A и B из условий (39) и (40), получим

$$F_1 = \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{q_0}{2D\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \right.$$

$$\times \frac{\nu \varkappa Q\left(\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2}+T_1\right)}{4D_1 D\mu\sqrt{\frac{\nu}{D}[1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2}\left\{T_1^2 - \left[\frac{\nu}{D}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2\right)\right\}} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times$$

$$\left. \times \frac{\nu \varkappa Q\left(\sqrt{\frac{\nu}{D}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2}-T_2\right)}{4D_1 D\mu\left\{T_2^2 - \left[\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2\right]\right\}\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega_2}}\right\} \times$$

$$\times e^{-x\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)\omega^2}} -$$

$$- \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\nu \varkappa Qe^{-x\left(\sqrt{\frac{u^2}{4D^2}+\frac{\nu(\varkappa+\lambda)}{D}+\omega^2}-\frac{u}{2D}\right.}}{2D_1 D\mu\left\{T_1^2 - \left[\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2\right]\right\}}, \tag{45}$$

$$F_2=\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{q_0}{2D\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2}}-\right.$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\nu\varkappa Q\left(\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2}-T_1\right)}{4D_1D\mu\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2}\left\{T_1^2-\left[\frac{\nu}{D}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2\right]\right\}}+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\nu\varkappa Q\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2}+T_2\Big)}{4D_1D\mu\left\{T_2^2-\left[\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2\right]\right\}\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2}}\Bigg\}\times$$

$$\times e^{x\sqrt{\frac{\sigma}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2}}-$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\nu\varkappa Qe^{x\left(\sqrt{\frac{u^2}{4D^2}+\frac{\nu(\varkappa+\lambda)}{D}+\omega^2}+\frac{u}{2D}\right.}}{2D_1D\mu\left\{T_2^2-\left[\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2\right]\right\}}, \qquad (46)$$

где

$$\mu=\sqrt{\frac{u^2}{4D^2}+\frac{\nu(\varkappa+\lambda)}{D}+\omega^2}.$$

Переход к концентрациям осуществляется по формулам обращения

$$C_1=\begin{cases}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty F_1(\omega)\cos\omega z d\omega & \text{при } x\geqslant 0\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty F_2(\omega)\cos\omega z d\omega & \text{при } x\leqslant 0.\end{cases}$$

При отсутствии движения свободных вод, полагая $u=0$ в формулах (45) и (46), имеем

$$F_1=\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{q_0}{2D\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2}}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\varkappa Q}{2[D_1(\varkappa+\lambda)-D(1+\lambda_1+\gamma)]}\right\}e^{-x\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2}}-$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\varkappa Q}{2[D_1(\varkappa+\lambda)-D(1+\lambda_1+\gamma)]\sqrt{\frac{\nu(\varkappa+\lambda)}{D}+\omega^2}}e^{-x\sqrt{\frac{\nu(\varkappa+\lambda)}{D}+\omega^2}}, \qquad (47)$$

$$F_2=\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{q_0}{2D\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2}}+\right.$$

$$+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\varkappa Q}{2[D_1(\varkappa_1+\lambda)-D(1+\lambda+\gamma)]}\Bigg\}e^{x\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2}}-$$

$$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\varkappa Qe^{\varkappa\sqrt{\frac{(\varkappa+\lambda)}{D}+\omega^2}}}{2[D_1(\varkappa+\lambda)-D(1+\lambda_1+\gamma)]\sqrt{\frac{\nu(\varkappa+\lambda)}{D}+\omega^2}}, \qquad (48)$$

Откуда, используя формулы обращения, находим

$$C_1=\left\{\frac{q_0}{\pi D}+\frac{\varkappa Q}{\pi[D_1(\varkappa+\lambda)-D(1+\lambda_1+\gamma)]}\right\}K_0\left[\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)(x^2+z^2)}\right]-$$

$$-\frac{\varkappa Q}{\pi[D_1(\varkappa+\lambda)-D(1+\lambda_1+\gamma)]}K_0\left[\sqrt{\frac{\nu(\varkappa+\lambda)}{D}(x^2+z^2)}\right],\quad -\infty<x<\infty. \qquad (49)$$

Как видно из формулы (49), распределение концентрации в пленках в данном случае симметрично относительно плоскости $x=0$ и максимум при фиксированном z соответствует точке $x=0$, т. е. эпицентру источника.

При весьма интенсивном движении свободных вод, полагая $u=\infty$ в формулах (45) и (46), получим

$$F_1=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{q_0}{2D\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2}}e^{-x\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2}},$$

$$F_2=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{q_0}{2D\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2}}e^{x\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)+\omega^2}},$$

откуда с помощью формул обращения находим

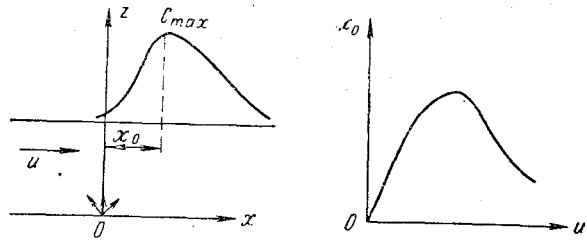
$$C_1=\frac{q_0}{\pi D}K_0\left[\sqrt{\frac{\nu}{D_1}(1+\lambda_1+\gamma)(x^2+z^2)}\right]. \qquad (50)$$

Из формул (45) и (46) и формул обращения видно, что для всех других значений скоростей, исключая рассмотренные случаи $u=0$ и $u=\infty$, графики концентрации не будут симметричными относительно плоскости $x=0$ и максимум концентрации на плоскостях $z=0$ будет смещен в сторону положительных значений x.

Этот вывод имеет практический интерес, так как опровергает существующее мнение о том, что с увеличением скорости движения вод максимум концентрации в твердой фазе (куда попадают при анализе и пленочные воды) будет сдвигаться больше от эпицентра источника. Анализ показывает, что при отсутствии горизонтального движения вод максимум концентрации в пленках располагается в эпицентре источника. Затем, с увеличением скорости движения вод, он начинает смещаться по направлению их движения. При еще большем увеличении скорости максимум концентрации опять начинает приближаться к эпицентру источника и при $u=\infty$ снова совпадает с ними (см. рисунок).

Физически такое явление можно объяснить следующим образом. При $u=0$ действует только процесс диффузии как в пленочной воде, так и свободной, и распределение концентрации в ореоле получается симметричным относительно плоскости $x=0$. При увеличении горизонтальной

скорости движения свободных вод максимум концентрации в свободной воде смещается. Но, так как концентрации в свободной и пленочной воде связаны соотношением (5), то, в результате обмена со свободной водой, несколько смещается максимум концентрации и в пленочной воде. При



Качественная зависимость горизонтального смещения максимума концентрации пленочного ореола x_0 от скорости движения вод u

еще большем возрастании скорости движения подземных вод ореол в свободной воде значительно размывается, концентрация в этой воде стремится к нулю, как при отрицательных значениях x, так и при положительных. В этом случае обмен пленочных вод со свободными опять будет стремиться к симметричному относительно плоскости $x=0$ и станет симметричным при $u=\infty$. Однако величины концентраций в пленочной воде при $u=\infty$, естественно, ниже, чем при $u=0$, хотя симметрия и отсутствие сдвига максимума концентраций будут и в том, и в другом случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Блум Э. Я. и др. Тепло- и массообмен в электромагнитном поле. Зинатне, Рига, 1967.
2. Квятковский Е. М., Путиков О. Ф. Использование вторичных геохимических ореолов при поисках погребенных месторождений. Научные основы геохимических методов поисков глубокозалегающих рудных месторождений. АН СССР, Иркутск, 1970.
3. Майоров Н. Ф. О восходящей миграции никеля и меди при формировании солевых ореолов в условиях моренных отложений. Зап. ЛГИ, 1969, т. LVI, вып. 2.
4. Путиков О. Ф. Распределение концентрации в гидрохимических ореолах. Изв. АН СССР, Физика Земли, 1969, № 4.
5. Скорчелетти В. В. Теоретическая электрохимия. Госхимиздат, 1959.
6. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Физматгиз, 1959.