

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НАМАГНИЧЕННЫХ ТЕЛ МЕТОДОМ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Г. Г. Кравцов

Для вычисления элементов залегания намагниченных тел вызванное ими поле Z можно аппроксимировать полем совокупности тел простейшей формы. В ряде случаев целесообразно выбрать в качестве элементарного тела маломощный пласт. Такая модель применима для вытянутых аномалий с достаточной для практических целей точностью, если глубина залегания верхней кромки намагниченного тела больше его горизонтальной мощности. Подобное соотношение часто наблюдается на платформах при погружении поверхности кристаллического фундамента на значительную глубину. Модель, образуемая системой маломощных пластов, приемлема также для тел, близких по форме пласту большой мощности или имеющих угловатое сечение, если наблюдаемую над ними вертикальную составляющую Z напряженности магнитного поля подвергнуть предварительному дифференцированию [3]. В этом случае верхним кромкам маломощных пластов соответствуют угловые точки пласта большой мощности.

Для определения параметров системы маломощных пластов С. В. Шалаев [5] предложил аппроксимировать рациональной дробью график магнитной аномалии или график горизонтальной производной магнитной аномалии. Будем приближать поле Z_i , замеренное в точках профиля x_i , рациональной дробью вида

$$\Phi(x_i) = \sum_{j=1}^n \frac{P_j x_i + Q_j}{(x_i - x_j)^2 + h_j^2} + \alpha(x_i), \quad (1)$$

где

$$P_j = -2 J_j \varepsilon_j \sin \theta_j;$$

$$Q_j = 2 J_j \varepsilon_j (x_j \sin \theta_j + h_j \cos \theta_j);$$

$$\alpha(x_i) = \begin{cases} 0 \\ C \\ Bx_i + C. \end{cases}$$

В приведенных формулах x_j , h_j — координаты верхней кромки j -го маломощного пласта; J_j — абсолютная величина вектора намагниченности пласта; ε_j — истинная мощность пласта; θ_j — угол между направлением падения пласта и направлением вектора намагниченности; B , C — коэффициенты условного уровня $\alpha(x_i)$ поля Z_i .

После приведения правой части выражения (1) к общему знаменателю получим дробь

$$\Phi(x_i) = \frac{\sum_{j=1}^p C_j x_i^{p-j}}{x_i^{2n} + \sum_{j=1}^{2n} C_{p+j} x_i^{2n-j}} = \frac{\varphi(x_i)}{\psi(x_i)}. \quad (2)$$

Степень $p-1$ многочлена $\varphi(x_i)$ зависит от выбираемого в каждом конкретном случае вида выражения $\alpha(x_i)$. При заранее установленном для магнитной аномалии нормальном поле полагают $\alpha(x_i) = 0$ и $p = 2n$. Если подбирается постоянный фон $\alpha(x_i) = C$, то имеем $p = 2n + 1$. Считая условный уровень аномалии наклонной линией $\alpha(x_i) = Bx_i + C$, имеем $p = 2n + 2$. В знаменателе дроби (2) стоит многочлен $\psi(x_i)$ степени $2n$.

Поле маломощного пласта характеризуется четырьмя параметрами: $x_j, h_j, J_j, \epsilon_j, \theta_j$. Для n маломощных пластов формулы (1) число определяемых параметров, включая и коэффициенты фона $\alpha(x_i)$, равно общему числу коэффициентов C_j дроби (2). Следовательно, вычисление параметров нескольких маломощных пластов по магнитной кривой удастся свести к отысканию коэффициентов C_j рациональной дроби (2). Мету близости подбираемой функции $\Phi(x_i) = \Phi_i$ к кривой Z_i , замеченной в s точках профиля, будем оценивать неравенствами

$$|Z_i - \Phi_i| \leq q v_i \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (3)$$

где v_i — положительные числа, характеризующие допустимые отклонения графика Φ_i от кривой Z_i в точках x_i ; q — положительный коэффициент.

Величину v_i задают с учетом точности измерений поля Z_i и уровня помех. При относительной ошибке δ , принятой для всей аномалии Z_i , значения v_i можно рассчитать по формуле

$$v_i = \begin{cases} |Z_i| \delta, & \text{если } |Z_i| \delta \geq v_{\min} \\ v_{\min}, & \text{если } |Z_i| \delta < v_{\min} \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

где $v_{\min}$ — наименьшая допустимая величина абсолютной ошибки v_i .

Для неравенств (3) будем искать такое решение, чтобы при некотором выбранном значении n величина положительного коэффициента q была наименьшей.

Неравенствам (3) равносильна следующая система неравенств:

$$\left. \begin{aligned} Z_i - q v_i - \frac{\varphi(x_i)}{\psi(x_i)} &\leq 0 \\ -Z_i - q v_i + \frac{\varphi(x_i)}{\psi(x_i)} &\leq 0 \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (4)$$

Найденные экспериментально значения поля Z_i являются величинами ограниченными, поэтому условия $\psi(x_i) \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, s$) будем полагать заранее выполненными. Умножая выражения (4) на $\psi(x_i)$, переходим к эквивалентной системе неравенств

$$\left. \begin{aligned} -\varphi(x_i) + (Z_i - q v_i) \psi(x_i) &\leq 0 \\ \varphi(x_i) + (-Z_i - q v_i) \psi(x_i) &\leq 0 \end{aligned} \right\}, \text{ если } \psi(x_i) > 0, \\ \text{или} \\ \left. \begin{aligned} \varphi(x_i) - (Z_i - q v_i) \psi(x_i) &\leq 0 \\ -\varphi(x_i) - (-Z_i - q v_i) \psi(x_i) &\leq 0 \end{aligned} \right\}, \text{ если } \psi(x_i) < 0, \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (5)$$

Коэффициенты C_j дроби (2) входят в неравенства (5) линейно, что дает возможность определять их способом линейного программирования [6].

Г. Ш. Рубинштейном [4] был предложен метод, посредством которого впервые удалось решать систему неравенств (3). Был рассмотрен частный случай неравенств (5)

$$\begin{cases} -\varphi(x_i) + (Z_i - qv_i)\psi(x_i) \leq 0 \\ \varphi(x_i) + (-Z_i - qv_i)\psi(x_i) \leq 0 \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, s), \quad (6)$$

причем ограничения

$$\psi(x_i) > 0 \quad (i=1, 2, \dots, s) \quad (7)$$

предполагались наперед удовлетворенными. Из сопоставления знаменателей дробей (1) и (2)

$$\psi(x_i) = \prod_{j=1}^n [(x_i - x_j)^2 + h_j^2] \quad (8)$$

такое допущение казалось очевидным.

Аналогичный подход имеет место у С. И. Зуховицкого [1] при рассмотрении задачи чебышевского приближения отношениями линейных форм. Привлекаются только ограничения (6) и (7), причем ограничения (7) используются пассивно. В вычислительной схеме они не участвуют. Только для найденного решения проверяется, выполнены ограничения (7) или нет.

Замена системы неравенств (5) системой (6) может в некоторых случаях привести к потере области решений. Покажем это на теоретическом примере. По формуле

$$Z(x) = \frac{20}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$$

было рассчитано поле Z_i :

x_i	Z_i	$x_i^3 - x_i^2 + 4x_i - 4$	$v_i = 0,1 Z_i $
-1	-2,00	-10	0,20
0	-5,00	-4	0,50
2	2,50	8	0,25
4	0,33	60	0,03

Погрешность v_i принята равной 10% от абсолютных значений Z_i , коэффициент $q=1$. Для приближения поля Z_i была выбрана дробь

$$\Phi(x_i) = \frac{\varphi(x_i)}{\psi(x_i)} = \frac{20}{x_i^2 - x_i^2 + C_1 x_i + C_2}$$

с неизвестными коэффициентами C_1 и C_2 . С учетом теоретических значений знаменателя функции $Z(x)$ были рассчитаны коэффициенты неравенств (5):

1. $-2,20 C_1 + 2,20 C_2 \leq -15,60,$	$\psi(-1) < 0;$
2. $1,80 C_1 - 1,80 C_2 \leq 16,40,$	$\psi(-1) < 0;$
3. $5,50 C_2 \leq -20,00,$	$\psi(0) < 0;$
4. $-4,50 C_2 \leq 20,00,$	$\psi(0) < 0;$
5. $4,50 C_1 + 2,25 C_2 \leq 11,00,$	$\psi(2) > 0;$
6. $-5,50 C_1 - 2,75 C_2 \leq -9,00,$	$\psi(2) > 0;$
7. $1,20 C_1 + 0,30 C_2 \leq 5,60,$	$\psi(4) > 0;$
8. $-1,44 C_1 - 0,36 C_2 \leq -2,72,$	$\psi(4) > 0.$

Каждому из этих неравенств на рис. 1 соответствует допустимая полуплоскость в направлении стрелки, показанной сплошной линией. Все вместе они высекают заштрихованную область решений $ABCD$. Если же знак знаменателя функции $Z(x)$ считать всегда положительным, то, согласно системе (6), первые четыре из приведенных неравенств изменятся:

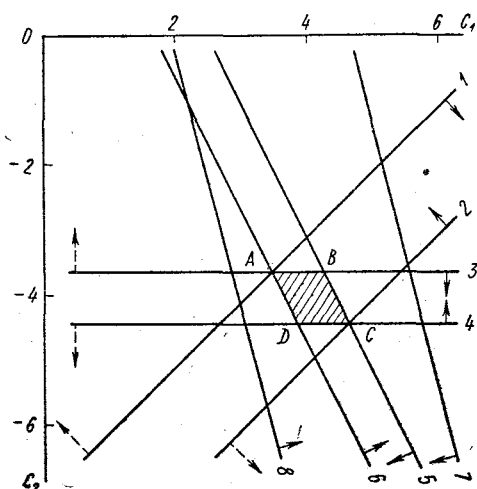


Рис. 1. Многоугольник решений

1. $2,20 C_1 - 2,00 C_2 \leq 15,60$;
2. $-1,80 C_1 + 1,80 C_2 \leq -16,40$;
3. $-5,50 C_2 \leq 20,00$;
4. $4,50 C_2 \leq -20,00$.

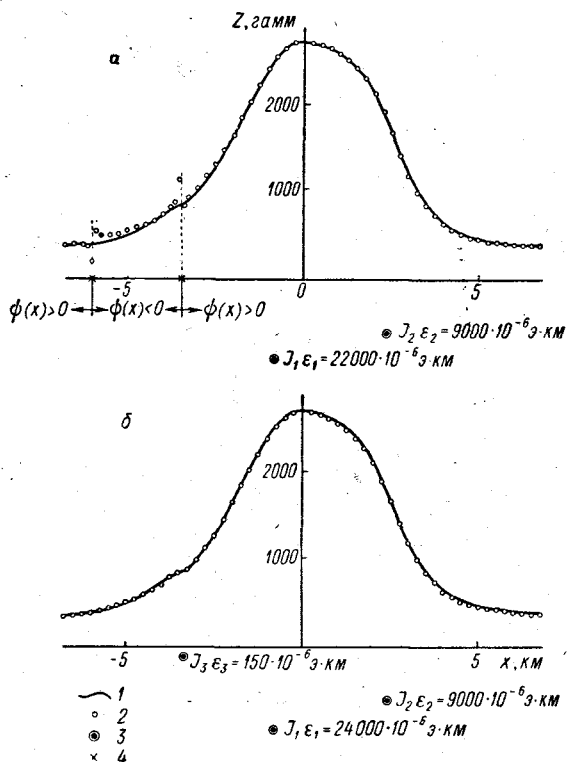


Рис. 2. Аномалия Z в одном из районов Русской платформы

Подбор дробей: а — методом Г. Ш. Рубинштейна, б — по новому алгоритму

1 — исходная кривая Z ; 2 — точки кривой $\Phi(x)$, подобранной на ЭВМ; 3 — особые точки, соответствующие верхним краям маломощных пластов; 4 — вещественные корни

Этим неравенствам соответствуют допустимые полуплоскости в направлении стрелки, показанной штриховой линией. Остальные четыре неравенства сохраняют прежний вид. Из рис. 1 легко установить, что в этом случае область, которая принадлежала бы одновременно всем полуплоскостям, отсутствует.

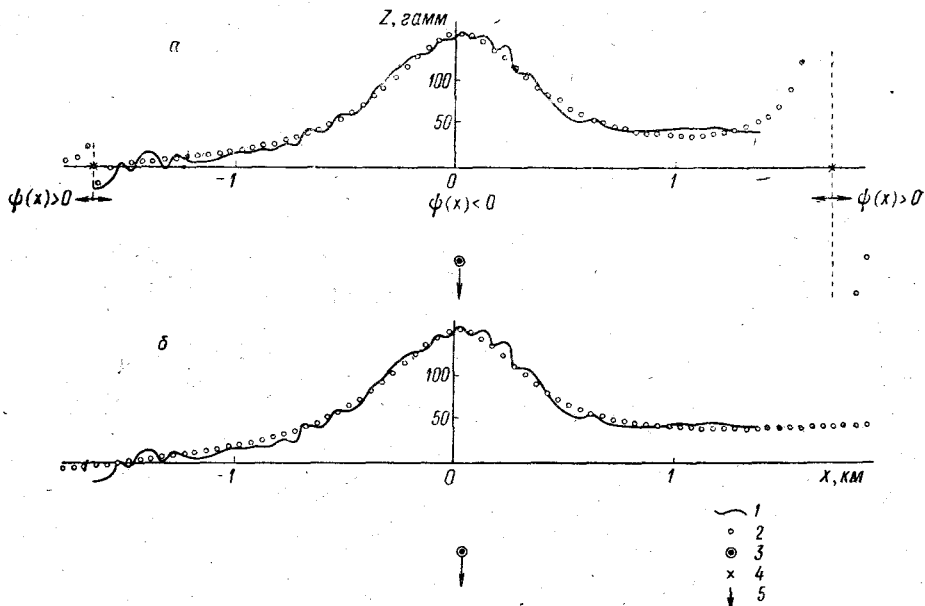


Рис. 3. Аномалия Z над ультраосновным телом (по материалам Г. И. Красникова)

Подбор дроби: a — методом Г. Ш. Рубинштейна, $б$ — по новому алгоритму
 δ — направление вектора намагниченности. Остальные обозначения см. на рис. 2

Несоблюдение условия (7) встречалось при обработке практических примеров. На рис. 2, a и 3, a приведены два таких примера, решенные методом Г. Ш. Рубинштейна. В обоих случаях в знаменателе подобранной рациональной дроби появились вещественные корни. Это не согласуется со свойством многочлена (8), имеющего только комплексные корни $x_j \pm h_j$. Наличие вещественных корней нарушает непрерывность функции $\Phi(x)$, что противоречит физической природе магнитных аномалий. Так как в окрестности каждого вещественного корня многочлен $\psi(x)$ меняет знак, условие (7) оказывается частично (см. рис. 2, a) или полностью (см. рис. 3, a) не выполненным. В некоторых случаях появление вещественных корней затрудняло или делало невозможным подбор дроби (2).

Чтобы найти решение системы неравенств (5), принадлежащее области, определяемой неравенствами (7), неравенства (5) были дополнены ограничениями, учитывающими свойство многочлена (8). Так, исходя из соотношения

$$\psi(x_i) = \prod_{j=1}^n [(x_i - x_j)^2 + h_j^2] \geq \prod_{j=1}^n h_j^2,$$

были образованы ограничения

$$\psi(x_i) \geq h_{\min}^{2n} \quad (i=1, 2, \dots, s). \quad (9)$$

Величина коэффициентов C_j дроби (2) была ограничена в общем случае неравенствами

$$-\gamma \leq C_j \leq \gamma \quad (j=1, 2, \dots, p+2n), \quad (10)$$

где γ — некоторое заранее задаваемое достаточно большое положительное число.

Коэффициенты C_{p+1} и C_{p+2n} , согласно формуле (8), выражаются через координаты верхних кромок малоомощных пластов следующим образом:

$$C_{p+1} = -2 \sum_{j=1}^n x_j;$$

$$C_{p+2n} = \prod_{j=1}^n (x_j^2 + h_j^2).$$

С учетом этого на коэффициенты C_{p+1} , C_{p+2n} , кроме неравенств (10), наложены более жесткие ограничения

$$-2nx_{\max} \leq C_{p+1} \leq -2nx_{\min}; \quad (11)$$

$$h_{\min}^{2n} \leq C_{p+2n} \leq (\bar{x}_{\max}^2 + h_{\max}^2)^n. \quad (12)$$

Постоянные $x_{\min}$, $x_{\max}$, $h_{\min}$, $h_{\max}$ задаются заранее по геологическим данным: определяются координаты вершин $(x_{\min}, h_{\min})$, $(x_{\max}, h_{\min})$, $(x_{\max}, h_{\max})$, $(x_{\min}, h_{\max})$ прямоугольной области возможного местоположения верхних кромок малоомощных пластов. В частности, за $h_{\min}$ можно принять среднюю мощность немагнитных наносов. В аэромагнитной съемке $h_{\min}$ может быть приравнено высоте полета над участком съемки. Постоянная $x_{\max}$ устанавливается по формуле

$$\bar{x}_{\max} = \max(|x_{\min}|, |x_{\max}|).$$

Систему неравенств (5), (9), (10), (11), (12) предлагается решать следующим образом. На каждой итерации модифицированного двойственного симплекс-метода [2] для перечисленных неравенств находится множество T неудовлетворенных неравенств, состоящее из подмножеств T_k ($k=1, 2, 3, 4$). В подмножестве T_1 объединяются только те неудовлетворенные неравенства системы (5), для которых выполнено условие $\psi(x_i) > 0$, а в подмножестве T_4 — те, для которых выполнено условие $\psi(x_i) < 0$. Подмножество T_2 образуется из неудовлетворенных неравенств (9), подмножество T_3 — из неудовлетворенных неравенств (10), (11), (12). Если множество T пусто, то решение найдено. В противном случае из первого непустого подмножества T_k ($k=1, 2, 3, 4$), у которого индекс k наименьший, по специальному критерию выбирается неравенство, в некотором смысле наиболее неудовлетворенное. Это неравенство используется для дальнейших преобразований при переходе к очередной итерации модифицированного двойственного симплекс-метода.

Для проверки рассмотренного алгоритма в 1970 г. была составлена программа для ЭВМ «Минск-22». На рис. 2, б и 3, б приведены результаты подбора рациональной дроби по новому алгоритму. В обоих случаях получена дробь, знаменатель которой содержит только комплексные корни. Тем самым достигнуто выполнение условия $\psi(x) > 0$ у дроби $\Phi(x)$ на всей оси x .

Приведенная на рис. 2 аномалия получена на участке Русской платформы. Средняя глубина залегания верхней кромки двух маломощных пластов (см. рис. 2, б), у которых произведение намагниченности на мощность выражается значительной величиной, равна 1,96 км. Скважина, расположенная в 10 км от центра аномалии, вскрыла поверхность кристаллического фундамента на глубине 1,86 км. На рис. 3 показана практическая кривая Z над телом ультраосновных пород, присутствие которых установлено по магнитному полю. Получена глубина залегания верхней кромки тела 0,4 км (см. рис. 3, б); по Г. И. Красникову, глубина залегания тела равна 0,36 км.

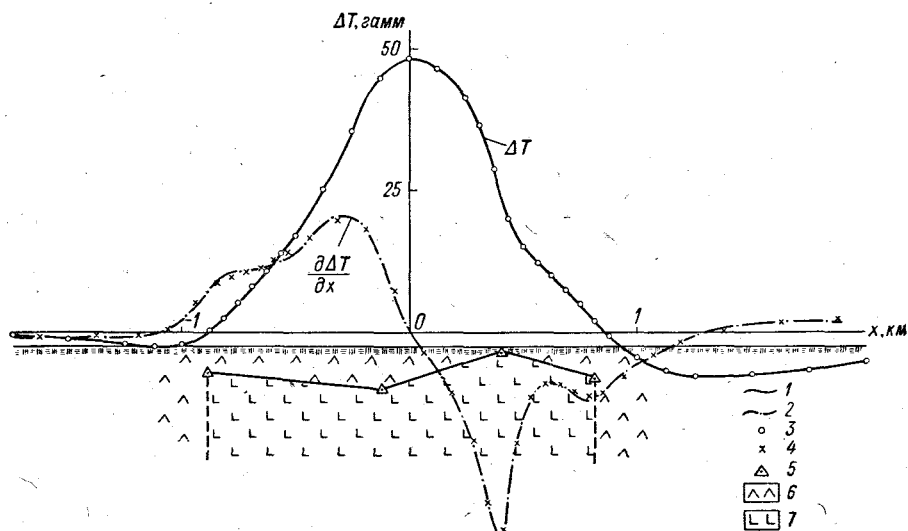


Рис. 4. Аномалия ΔT над ультраосновным телом в Чупино-Лоухском районе Беломорья (по материалам В. В. Сусленникова)

1 — исходная кривая ΔT ; 2 — график горизонтальной производной $\partial \Delta T / \partial x$; 3 — точки графика функции $\Phi(x)$, подобранной на ЭВМ для кривой ΔT ; 4 — точки графика функции $\Phi_1(x)$, подобранной на ЭВМ для кривой $\partial \Delta T / \partial x$; 5 — особые точки, полученные по кривой $\partial \Delta T / \partial x$; 6 — основные породы типа габбро и габбро-норитов; 7 — ультраосновные породы типа пироксенитов и перидотитов

На рис. 4 приведен пример вычисления глубины тела по аномалии ΔT , полученной в результате аэромагнитной съемки, которая выполнялась в помощь геологическому картированию восточной части Карельской АССР. В этом районе поисковый интерес представляет выявление и определение глубины залегания ультраосновных тел, к которым часто бывает приурочены залежи антофиллит-асбеста. Массивы основного и ультраосновного состава залегают в толще высокометаморфизованных сложно дислоцированных гнейсов. Гнейсы и породы основного состава практически немагнитны, их магнитная восприимчивость не превышает $1 \cdot 10^{-4}$ СГС. Магнитная восприимчивость ультраосновных пород колеблется в довольно широких пределах и может достигать значений $(1,5-2) \cdot 10^{-3}$ СГС. Вначале график ΔT был аппроксимирован рациональной дробью $\Phi(x)$, аналитическое выражение которой было продифференцировано, что дало возможность вычислить $\partial \Delta T / \partial x$. Все эти операции предусмотрены в программе и выполняются на ЭВМ. Особые точки, полученные в результате аппроксимации кривой $\partial \Delta T / \partial x$ рациональной дробью, позволили приближенно ука-

зять положение верхней границы тела, сложенного ультраосновными породами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. М., «Наука», 1967.
 2. Кравцов Г. Г. Алгоритм модифицированного двойственного симплекс-метода и его использование в геофизике.— В кн.: Применение ЭВМ в геологии и горном деле, вып. 1. Изд. ЛГИ, 1971.
 3. Логачев А. А. Магниторазведка. Л., «Недра», 1968.
 4. Рубинштейн Г. Ш. О равномерном приближении непрерывных функций.— Успехи матем. наук, 1960, т. 15, вып. 3.
 5. Шалаев С. В. Математическое программирование в геофизике.— Зап. ЛГИ, 1966, т. 50, вып. 2.
 6. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Задачи и методы линейного программирования. М., «Сов. радио», 1964.
-