Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LXVI, вып. 2, 1974 г.

ВЛИЯНИЕ КОНВЕКЦИИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОНЦЕНТРАЦИИ РУДНЫХ КОМПОНЕНТОВ В СКВАЖИНЕ

О. Ф. Путиков

Лабораторные методы изучения состава жидких веществ сложились раньше, чем твердых. Однако для изучения состава вещества при дистанционных измерениях (например, в скважине) применяются в основном физические методы, не использующие свойств жидкой фазы. Целесообразно же развитие методов анализа и жидкой фазы, так как при этом можно: а) получать дополнительные сведения о физико-химических свойствах веществ (например, растворимости), б) изучать по равновесной концентрации в жидкости содержание элементов, не поддающихся анализу в твердой фазе, в) проводить дистанционный анализ вод (морских, озерных и др.).

Обычно для дистанционного анализа жидкостей используются физико-химические методы. Ранее были известны методы pH-метрии, измерения окислительно-восстановительных потенциалов и метод избирательных электродов на некоторые ионы. Недавно предложен метод полярографического каротажа [4], обладающий весьма широкими возможностями по числу поддающихся анализу элементов и достаточно высокой чувствительностью.

При использовании метода полярографического каротажа возникает вопрос о связи распределения концентрации некоторого элемента в жидкости, заполняющей скважину, с распределением концентрации этого элемента в твердой фазе вещества стенок скважины. На границе рудного тела и скважинной жидкости могут происходить различные процессы, ведущие к поступлению элемента в раствор, например, обычное растворение, растворение при наличии активного растворителя (вступающего в химическое взаимодействие с твердой фазой), электрохимическое растворение. Рассмотрим один из наиболее важных процессов — обычное растворение. В этом случае, как принято в химической кинетике [1], можно считать, что в слое жидкости, непосредственно прилегающей к поверхности растворяющегося минерала, образуется и поддерживается постоянная концентрация — концентрация насыщения. Если зерна рудных минералов занимают на поверхности скважины площадь гораздо бо́льшую, чем зерна нерудных минералов, то можно принять, что на поверхности всего пересечения скважины с рудным пластом поддерживается постоянная концентрация насыщения.

За пределами рудного пласта находятся породы, способные поглощать (сорбировать) растворенный элемент. Скорость сорбции, которая

определяется количеством вещества, поглощаемого единицей поверхности твердой фазы в единицу времени, является в общем случае сложной функцией концентрации в жидкости, концентрации в твердой фазе, температуры и других факторов. Однако в рассматриваемом случае малых концентраций в жидкой фазе и небольшого перепада температур можно положить, что скорость сорбции элемента из жидкости пропорциональна его концентрации. Если перенос вещества в жидкой фазе осуществляется только процессами диффузии и конвекции, то уравнение конвективной диффузии для концентрации имеет вид [1]

$$\nabla^2 C_1 - \frac{\vec{v_1}}{D} \operatorname{grad} C_1 - \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial \tau} = 0, \qquad (1)$$

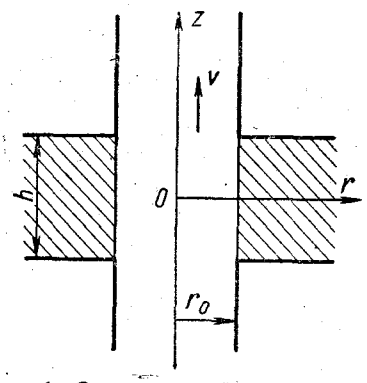


Рис. 1. Схематический разрез скважины

где C_1 — концентрация элемента в жидкости; v_1 — скорость движения жидкости (скорость конвекции); D — коэффициент диффузии элемента в жидкости; τ — время.

Введем цилиндрическую систему координат с осью z, направленной вверх по оси скважины радиусом r_0 (рис. 1). При наличии осевой симметрии и только одной составляющей скорости жидкости v_1, направленной вдоль оси z, уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial C_1}{\partial r}\right) - \frac{v_1(r)}{D} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial z} - \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial \tau} = 0, \qquad (2)$$

где r — расстояние до оси скважины.

Если ввести среднюю по сечению скважины концентрацию

$$C = \frac{\int_0^{r_0} v_1 r C_1 dr}{\int_0^{r_0} v_1 r dr} \qquad (3)$$

и среднюю скорость движения жидкости

$$v = \frac{\int_0^{r_0} v_1 r C_1 dr}{\int_0^{r_0} C_1 r dr}, \qquad (4)$$

то уравнение (2) для стационарного случая можно преобразовать [2]

$$\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \frac{v}{D} \cdot \frac{\partial C}{\partial z} - \frac{v r_0}{\int_0^{r_0} v_1 r dr} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial r}\Bigg|_{r=r_0} = 0. \qquad (5)$$

Переписывая выражение (4) с использованием теоремы о среднем

$$v = \frac{C_1^*}{C_1^{**}} \cdot \frac{\int_0^{r_0} v_1 r dr}{\int_0^{r_0} r dr},$$

где C_1^* и C_1^{**} — некоторые значения концентрации в пределах сечения скважины, и полагая $C_1^*/C_1^{**} \approx 1$, из уравнения (5) получим

$$\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} - \frac{v}{D} \cdot \frac{\partial C}{\partial z} - \frac{2}{r_0} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = 0. \qquad (6)$$

Значение градиента концентрации у стенок скважины $(\partial C_1/\partial r)|_{r=r_0}$ неизвестно. Можно попытаться выразить его через другие величины. Уравнение (2) для бесконечно длинной скважины при $v=0$ принимает вид

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial r} - \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial \tau} = 0. \qquad (7)$$

Известно, что при граничном условии $C_1|_{r=r_0} = C_0$ (где C_0 — концентрация насыщения) и нулевом начальном условии $C_1|_{\tau=0}$ решением уравнения (7) согласно [3] является функция

$$C_1 = C_0 \left[1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{r}{r_0}\right)}{\mu_n J_1(\mu_n)} e^{-\mu_n^2 \frac{D\tau}{r_0^2}} \right], \qquad (8)$$

где $J_n x$ — функция Бесселя первого рода порядка n от действительного аргумента x; μ_n — корни функции $J_0(\mu)$.

Из выражения (8) находим

$$\frac{\partial C_1}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = \frac{2C_0}{r_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 \frac{D\tau}{r_0^2}} \qquad (9)$$

и для средней по сечению концентрации

$$C = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} C_1 r dr$$

получаем

$$C_0 - C = 4C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_n^2 \frac{D\tau}{r_0^2}}}{\mu_n^2}. \qquad (10)$$

При переходе к стационарному случаю можно положить $\tau \to \infty$, тогда

$$\frac{\partial C_1}{dr}\bigg|_{r=r_0} \approx \frac{2C_0}{r_0} e^{-\mu_1^2 \frac{D\tau}{r_0^2}};$$

$$C_0 - C \approx \frac{4C_0}{\mu_1^2} e^{-\mu_1^2 \frac{D\tau}{r_0^2}}; \qquad (11)$$

$$\frac{2}{r_0} \cdot \frac{\partial C_1}{dr}\bigg|_{r=r_0} \approx \frac{k}{D}(C_0 - C), \qquad (12)$$

где

$$k = \frac{\mu_1^2 D}{r_0^2}.$$

Если теперь уравнение (7) преобразуем в уравнение для средней концентрации, то, с учетом граничного условия, оно примет вид

$$\frac{2}{r_0} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} - \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial C}{\partial \tau} = 0. \qquad (13)$$

Подставляя выражение (12) в формулу (13) и интегрируя при нулевом начальном условии, получаем

$$C_0 - C = C_0 e^{-k\tau}. \qquad (14)$$

Сравнение выражений (14) и (11) показывает, что замена производной по приближенной формуле (12) мало сказывается на зависимости концентрации от времени при его больших значениях.

Как было отмечено, за пределами рудного пласта скорость сорбции вещества стенками скважины можно принять пропорциональной концентрации вещества в жидкости. Считая, что это положение выполняется и для средней по сечению концентрации, получаем граничное условие

$$\frac{2}{r_0} \cdot \frac{\partial C_1}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = \frac{\varkappa}{D} C, \qquad (15)$$

где $\varkappa$ — коэффициент поглощения.

Учитывая выражения для плотности потока вещества через стенки скважины в пределах рудного пласта и вне его, уравнение (6) можно записать в виде системы трех уравнений:

$$\frac{d^2C_1}{dz^2} - \frac{v}{D} \cdot \frac{dC_1}{dz} - \frac{\varkappa}{D} C_1 = 0 \quad \text{при } z \geqslant \frac{h}{2}; \qquad (16)$$

$$\frac{d^2C}{dz^2} - \frac{v}{D} \cdot \frac{dC}{dz} + \frac{k}{D}(C_0 - C) = 0 \quad \text{при } -\frac{h}{2} \leqslant z \leqslant \frac{h}{2}; \qquad (17)$$

$$\frac{d^2C_2}{dz^2} - \frac{v}{D} \cdot \frac{dC_2}{dz} - \frac{\varkappa}{D} C_2 = 0 \quad \text{при } z \leqslant -\frac{h}{2}, \qquad (18)$$

где C_1 — средняя по сечению скважины концентрация выше пласта; C — то же в пределах пласта; C_2 — то же ниже пласта; h — мощность пласта.

Граничные условия для системы (16)—(18)

$$C_1\Big|_{z=\frac{h}{2}} = C\Big|_{z=\frac{h}{2}}; \quad \frac{dC_1}{dz}\bigg|_{z=\frac{h}{2}} = \frac{dC}{dz}\bigg|_{z=\frac{h}{2}};$$

$$C_2\Big|_{z=-\frac{h}{2}} = C\Big|_{z=-\frac{h}{2}}; \quad \frac{dC_2}{dz}\bigg|_{z=-\frac{h}{2}} = \frac{dC}{dz}\bigg|_{z=-\frac{h}{2}}; \quad C_1\Big|_{z\to\infty} \to 0; \quad C_2\Big|_{z\to-\infty} \to 0.$$

Решения системы уравнений (16)—(18) при данных граничных условиях имеют вид:

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{e^{-\mu_2\left(z-\frac{h}{2}\right)}}{T}\left[\nu_2(\mu_1+\nu_1) - \mu_1(\nu_1+\nu_2)e^{-h\nu_1} - \right.$$
$$\left. - \nu_1(\nu_2-\mu_1)\ e^{-h(\nu_1+\nu_2)}\right], \qquad (19)$$

$$\frac{C}{C_0} = 1 - \frac{1}{T}\left\{e^{-\nu_1\left(\frac{h}{2}+z\right)}\left[\mu_1(\mu_2+\nu_2)+\mu_2(\nu_1-\mu_1)e^{-h\nu_2}\right]+\right.$$
$$\left.+e^{-\nu_2\left(\frac{h}{2}-z\right)}\left[\mu_2(\mu_1+\nu_1)-\mu_1(\mu_2-\nu_1)e^{-h\nu_1}\right]\right\}, \qquad (20)$$

$$\frac{C_2}{C_0} = \frac{e^{\mu_1\left(z+\frac{h}{2}\right)}}{T}\left[\nu_1(\mu_2+\nu_2)-\mu_2(\nu_1+\nu_2)e^{-h\nu_2}+\right.$$
$$\left.+\nu_2(\mu_2-\nu_1)e^{-h(\nu_1+\nu_2)}\right], \qquad (21)$$

где

$$T=(\mu_1+\nu_1)(\mu_2+\nu_2)+(\mu_2-\nu_1)(\nu_2-\mu_2)e^{-h(\nu_1+\nu_2)};$$

$$\mu_1=\frac{v}{2D}+\sqrt{\frac{v^2}{4D^2}+\frac{\varkappa}{D}};\quad \mu_2=-\frac{v}{2D}+\sqrt{\frac{v^2}{4D^2}+\frac{\varkappa}{D}};$$

$$\nu_1=-\frac{v}{2D}+\sqrt{\frac{v^2}{4D^2}+\frac{k}{D}};\quad \nu_2=\frac{v}{2D}+\sqrt{\frac{v^2}{4D^2}+\frac{k}{D}}.$$

По формулам (19)—(21) рассчитаны кривые распределения концентрации в скважинных водах (рис. 2). Из графиков видно, что при

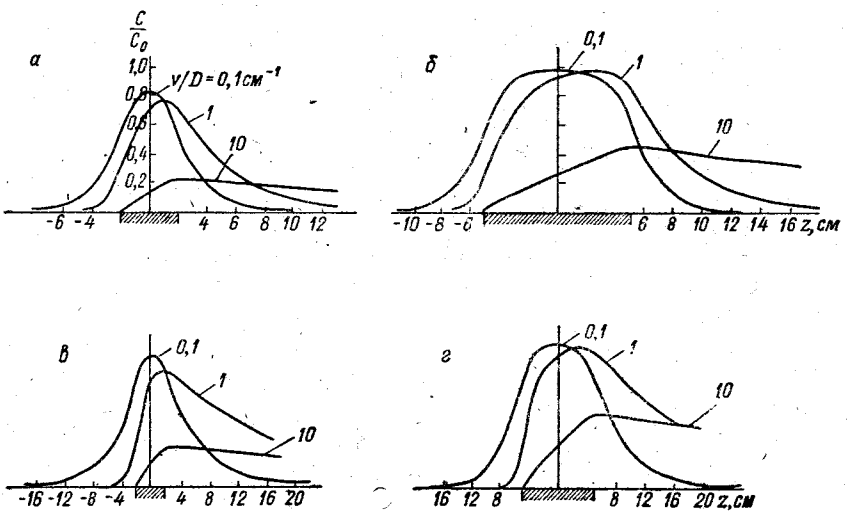


Рис. 2. Распределение концентрации в скважине (k/D=0,64 усл. ед.).

	а	*б*	*в*	*г*
$\varkappa/D$, усл. ед.	0,32	0,32	0,064	0,064
h, *см*	4	10	4	10

наличии конвекции искажается форма кривой, уменьшается и смещается максимум концентрации по направлению движения вод. Однако для рассмотренного диапазона изменения скорости конвективного

движения максимум концентрации не выходит за пределы рудного пласта. При уменьшении мощности пласта искажение формы кривой, вызванное конвекцией, усиливается. Кривые концентрации практически не искажаются при соблюдении условия $v/D \leqslant 0{,}1$ $см^{-1}$, т. е. при скоростях движения жидкости, меньших $0{,}9 \cdot 10^{-3}$ *м/сутки* (так как в обычных условиях для ионов металлов в жидкости $D = 1 \cdot 10^{-5}$ $см^2/сек$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев В. С., Гарибянц А. А. Гетерогенные процессы геохимической миграции. М., «Недра», 1968.
2. Казанский А. Б. Об изменении температуры жидкости и тепловых потерях в действующей скважине. В кн.: Тр. 2-го совещания по геотермическим исследованиям в СССР. Геотермические исследования и использование тепла Земли. М., «Наука», 1966.
3. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., Гостехиздат, 1952.
4. Путиков О. Ф., Поспелов С. Г. Теоретическое обоснование полярографического каротажа. Зап. ЛГИ, 1971, т. 61, вып. 2.