*Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова, т. LV, вып. 3, 1975 г.*

# ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДОВ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАССОПЕРЕНОСА В ПРОЦЕССАХ ОБОГАЩЕНИЯ И МЕТАЛЛУРГИИ

*Доктор техн. наук О. Н. ТИХОНОВ*
(Ленинградский горный ин-т)

Уравнения, о которых говорится в статье, применимы к описанию статистического движения частиц вещества в процессах металлургии, обогащения полезных ископаемых, химических превращений, геофизики и др. Задачей данной статьи является изложение простого метода составления этих уравнений на основе понятия о статистических силах, действующих на частицы вещества [2, 3, 4]. Метод дает возможность получить такие известные уравнения, как уравнение диффузии, статистическое уравнение Фоккера-Планка и другие, а также ряд новых уравнений. Он включает два этапа: получение уравнения материального баланса и уравнения баланса сил. Комбинация этих двух типов дает результирующее уравнение массопереноса.

**Локальные уравнения материального баланса.** Пространство массопереноса, например, постель отсадочной машины или металлургическая ванна, заполнено частицами разных компонентов и средой.

Основным уравнением материального баланса является известное соотношение

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{v}_i C_i), \tag{1}$$

где $C_i = C_i(x, y, z, t)$ — объемная концентрация $i$-го компонента в локальной точке пространства массопереноса $(x, y, z)$ в момент времени $t$, $м^3/м^3$; $\vec{v}_i = \vec{v}_i(x, y, z, t)$ — средняя скорость $i$—$x$ частиц в точке $(x, y, z, t)$ по отношению к среде или границам пространства массопереноса, *м/сек*.

Смысл уравнения (1) состоит в том, что разница в притоке и оттоке $i$—$x$ частиц в малом локальном объеме вокруг $(x, y, z)$ компенсируется изменением локальной концентрации (математическое составление этого уравнения известно).

Частицы $i$-го компонента могут участвовать в химической реакции, в металлургических и химических процессах или в процессе, преобразующем их в частицы других компонентов со скоростью

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = f_{i\,\text{хим}}(C_i, C_{i+1}, C_{i+2} \ldots), \tag{2}$$

где $C_{i-1}$, $C_{i-2}$, . . . — концентрации других компонентов, участвующих в реакции; $f_{i_{\text{хим}}}$ — функция, зависящая от типа реакции, например, для реакции 1-го порядка $f_i = -kC_i$.

Тогда уравнение баланса (1) изменяется

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{v}_i C_i) + f_{i_{\text{хим}}}(C_i, C_{i+1} \ldots). \tag{3}$$

Наконец, возможен искусственный подвод (отвод) $i$-х частиц. Тогда

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{v}_i C_i) + f_{i_{\text{хим}}}(C_i, \ldots) + Q_i(x, y, z, t), \tag{4}$$

где $Q_i$ — функция «стоков» и «источников», которая численно равна количеству кубометров $i$-х частиц, вводимых (отводимых со знаком минус) в 1 $м^3$ пространства в 1 *сек* в окрестности точки $(x, y, z, t)$.

Таким образом, величина $\dfrac{\partial C_i(x, y, z, t)}{\partial t}$ в общем случае определяется тремя компонентами: полем скоростей $\vec{v}_i$, превращением (химическим) $f_{i_{\text{хим}}}$ и искусственным подводом — отводом $Q_i$.

Для других компонентов среды справедливы аналогичные уравнения, и материальный баланс для всех компонентов характеризуется системой уравнения вида (4), где индекс $i$ пробегает значения $i=1, 2, \ldots, n$. Эту систему можно записать одним уравнением, если ввести $i$-аргумент в функции уравнения (4), т. е. заменить в нем:

$$\begin{aligned} &C_i = C(i, x, y, z, t); \qquad \vec{v}_i = \vec{v}(i, x, y, z, t); \\ &f_{i_{\text{хим}}} = f_{\text{хим}}(j, C); \qquad Q_i = Q(i, x, y, z, t), \end{aligned} \tag{5}$$

где $i$ — признак, отличающий один компонент от другого; $j$ — признак, отличающий один вид превращения от другого.

Одно уравнение получается также при введении понятия вектор-функции $\vec{C} = [C_i], i=1, \ldots, n$ и т. д. Однако существа дела ни та, ни другая запись не меняет.

Соотношения (5) являются введением к следующему обобщению уравнений материального баланса. Материал в пространстве массопереноса может содержать бесконечное количество компонентов. Первый пример тому — смесь частиц различной крупности, естественно получающаяся после горных работ, дробления и измельчения; признаком $i$-компонента здесь является крупность, которая изменяется не дискретно, а непрерывно $0 \leqslant l \leqslant l_{\max}$, т. е. признак $i$ принимает бесконечно много «плавно» изменяющихся значений. Второй пример — смесь твердых частиц, каждая из которых состоит из сростков двух минералов в разном процентном соотношении, например, кварца и магнетита; такой признак ($i$) как средняя магнитная восприимчивость $\chi_m$ каждой частицы «плавно» меняется от $\chi_m$ для чистого кварца до $\chi_m$ для магнетита. По той же причине обогащаемые угли и антрациты содержат частицы с «плавно» изменяющейся плотностью $\rho_{\min} < \rho < \rho_{\max}$ и т. д. При таком обстоятельстве требуется составлять бесконечное число уравнений материального баланса вида (4). Однако задача просто решается, если вместо понятия концентрации одного компонента ввести понятие «плотность распределения концентрации» всех компонентов смеси

$$\gamma(i, x, y, z, t) = \frac{\partial C(i, x, y, z, t)}{\partial i}. \tag{6}$$

Здесь под признаком $i$ понимается либо $l$, либо $\chi_m$, либо $\rho$ из предыдущих примеров, либо любой другой признак для других случаев. Величина $\gamma(i, x, y, z, t)di$ равна концентрации узкой фракции смеси $i \div i+di$ в окрестностях точки $(x, y, z, t)$. Теперь узкая фракция $i \div i+di$ рассматривается как отдельный компонент смеси. Если среда рассматривается как составляющий компонент смеси, то справедливо соотношение

$$\int_{i\,\min}^{i\,\max} \gamma(i, x, y, z, t)di = 1, \tag{7}$$

т. е. суммарная концентрация всех компонентов в любой точке $(x, y, z, t)$ равна единице.

В отсутствие химической реакции система уравнений материального баланса (1) записывается одним уравнением

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\operatorname{div}(\vec{v}\gamma) + q, \tag{8}$$

где $\gamma=\gamma(i, x, y, z, t)$; $\vec{v}=\vec{v}(i, x, y, z, t)$; $q=q(i, x, y, z, t)$, что получается заменой $C_i=\gamma di$ с последующим сокращением $di$; при этом $q$ соответствует функции стоков и источников.

Частицы смеси могут отличаться друг от друга не одним признаком, а двумя и более $(i, j)$. Например, упомянутые частицы, включающие сростки кварца и магнетита, отличаются признаками $\chi_m$, $\rho$. Здесь вводится двумерная плотность распределения концентрации $\gamma(i, j, x, y, z, t)$, так что $\gamma didj$ есть концентрация узкой фракции $di$, $dj$ в точке $(x, y, z, t)$. Для этого случая также справедливо уравнение (8).

Второе обстоятельство касается вероятностного толкования функции $\gamma$, а именно величина $\gamma di$ равна вероятности обнаружить частицу, обладающую признаком $i \div i+di$, в точке $(x, y, z, t)$ со всеми вытекающими отсюда последствиями. Это обстоятельство весьма важно в статистическом подходе к силам, действующим на частицы в пространстве массопереноса.

**Статистические силы и поле скоростей частиц.** Уравнения материального баланса сами по себе не определяют картины массопереноса, так как, помимо неизвестных функций $C_i$ или $\gamma$, они содержат неизвестные функции $\vec{v}$, что делает число уравнений по крайней мере вдвое меньше числа неизвестных. Нужны еще уравнения, определяющие поле скоростей частиц $\vec{v}$. Самая трудная часть задачи массопереноса и заключается в нахождении $\vec{v}$. Ниже $\vec{v}$ ищется на основе понятия о силах (в том числе случайных), действующих на частицы.

Ниже рассматриваются: случайная градиентная сила $F_г$, случайная сила сопротивления движению $F_{дв}$, гравитационно-архимедова сила $F_{га}$, магнитно-архимедова сила $F_{ма}$, электро-магнитно-архимедова сила $F_{эма}$.

Для $F_г$ можно записать

$$\vec{F}_г = -\frac{k_1}{C_i}\operatorname{grad} C_i = -\frac{k_1}{\gamma di}\operatorname{grad}(\gamma di), \frac{н}{м^3}, \tag{9}$$

где $k_1$ — коэффициент пропорциональности.

Это есть сила отнесения к единице объема $i$-х частиц или же частиц узкой фракции $i \div i+di$. Она получается строго математически на основе следующих рассуждений. В окрестности точки $(x, y, z, t)$

берется малый объем пространства $V$, ограниченный поверхностью $S$. О поверхность $S$ извне ударяются частицы $i$ (или $i \div i+di$), в результате чего появляется давление на $S$. Это давление берется пропорциональным ($k_1$) концентрации $C_i$ (или $\gamma$) частиц около локального элемента поверхности. Суммирование всех локальных давлений дает силу, действующую извне на всю поверхность $S$. Эта сила распределяется поровну между частицами $i$-го (или $i \div i+di$-го) компонента и численно равна $\vec{F}_г$ в уравнении (9).

Все диффузионные процессы вызываются этой силой, без нее они отсутствуют.

Общее выражение для $\vec{F}_{дв}$

$$\vec{F}_{дв} = f_{дв}\left(\vec{v}, \frac{d\vec{v}}{dt}\right), \quad \frac{н}{м^3}. \tag{10}$$

Для многих процессов массопереноса доминирующей составляющей в $\vec{F}_{дв}$ является вязкое трение, а силы инерции не учитываются

$$\vec{F}_{дв} = -k_2\vec{v}, \quad \frac{н}{м^3}, \tag{11}$$

где $k_2$ — коэффициент вязкого трения.

Сила $F_{дв}$ возникает, если частица, помимо хаотической составляющей скорости, имеет не равную нулю скорость $\vec{v}$, что заставляет ее последовательно продвигаться сквозь строй других частиц. При этом из-за столкновений с другими частицами она непрерывно теряет количество движения; средняя потеря его в 1 *сек* равна $\vec{F}_{дв}$. Наряду с потерей, количество движения добавляется внешними силами, например, тяготения, которые гонят частицу сквозь другие. Сила $\vec{F}_{дв}$ участвует во всех процессах массопереноса.

Если частица движется в вакууме, то $F_{дв}$ есть сила инерции $\vec{F}_{дв} = \frac{dmv}{dt}$.

Для $F_{га}$ запишем

$$\vec{F}_{га} = \vec{g}(\rho_i - \bar{\rho}), \quad \frac{н}{м^3}, \tag{12}$$

где $\bar{\rho} = \bar{\rho}(x, y, z, t)$ — средняя плотность всех компонентов смеси в окрестностях локальной точки $(x, y, z, t)$.

При этом

$$\bar{\rho} = \sum_{i=1}^{n} C_i \rho_i, \quad \text{или} \quad \bar{\rho} = \int_{\rho_{min}}^{\rho_{max}} \rho\gamma d\rho. \tag{13}$$

Эта сила заставляет всплывать легкие и тонуть тяжелые частицы во всех гравитационных сепараторах (при разделении жидкого металла и шлака, при флотационных процессах и т. д.).

Для $F_{ма}$ запишем

$$\vec{F}_{ма} = (\chi_{m_i} - \bar{\chi}_m) H \operatorname{grad} H, \quad \frac{н}{м^3}, \tag{14}$$

где $H = H(x, y, z)$ — напряженность внешнего магнитного поля; $\bar{\chi}_m = \bar{\chi}_m(x, y, z, t)$ — средняя магнитная восприимчивость всех частиц в окрестностях точки $(x, y, z, t)$, отнесенная к 1 $м^3$.

Здесь

$$\overline{\chi_m} = \sum_{i=1}^{n} \chi_{mi} C_i, \quad \text{или} \quad \overline{\chi_m} = \int_{\chi_{min}}^{\chi_{max}} \chi_m \gamma \, d\chi_m. \tag{15}$$

Сила $\vec{F}_{ма}$ «втягивает» в области сгущения магнитных силовых линий частицы с большим $\chi_m$ выталкивая при этом частицы с меньшим $\chi_m$. Эта сила используется в магнитных сепараторах при обогащении магнитных руд.

Для $F_{эма}$ запишем

$$\vec{F}_{эма} = (q_i - \overline{q})\vec{E} + [\vec{v}_i \times \vec{B}](q_i - \overline{q}), \tag{16}$$

где $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$ — напряженность внешнего электрического поля; $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z, t)$ — индукция внешнего магнитного поля; $q_i$ — электрический заряд $i$-х частиц на 1 $м^3$; $\overline{q}_i(x, y, z, t)$ — средний заряд всех частиц в окрестности точки $(x, y, z, t)$ на 1 $м^3$ (определяется как средневзвешенная по концентрациям по уравнениям типа (13) или (15), обычно $\overline{q} = 0$).

Сила $F_{эма}$ учитывает силы Кулона и Лоренца.

Возможны и другие силы, действующие на частицы. Не все перечисленные силы действуют на $i$-е частицы; это зависит от конкретного типа аппарата, в котором совершается массоперенос. Все силы даны в расчете на 1 $м^3$; чтобы получить силу, действующую на одну частицу, надо разделить выражение для силы на число этих частиц, суммарный объем которых 1 $м^3$. Если в окрестности локальной точки $(x, y, z, t)$ среда является доминирующим компонентом, то $\overline{\rho}$, $\overline{\chi_m}$, $\overline{q}$ заменяются на $\rho_{ср} = \text{const}$, $\chi_{mср} = \text{const}$, $q_{ср} = \text{const}$.

Все силы, кроме $F_{дв}$, заставляют $i$-е частицы двигаться со средней скоростью $\vec{v}_i$ относительно соседних частиц среды, а если среды нет, то относительно смеси всех компонентов, которые образуют «среду» с переменными свойствами. Движению сопутствует противодействующая сила $F_{дв}$. Поэтому справедливо уравнение баланса сил

$$\vec{F}_{дв} + \vec{F}_{г} + \vec{F}_{га} + \vec{F}_{ма} + \vec{F}_{эма} = 0. \tag{17}$$

Вместе с уравнением материального баланса это уравнение является необходимым и достаточным для описания картины массопереноса, так как оно определяет поле скоростей $\vec{v}_i$, входящее в $\vec{F}_{дв}$.

Теперь имеется достаточное количество уравнений, чтобы вычислить неизвестные функции $C_i(x, y, z, t)$ и $\vec{v}_i(x, y, z, t)$.

Если $F_{дв} = -k_2 \vec{v}_i$, то поле скоростей представляется выражением

$$\vec{v}_i(x, y, z, t) = \frac{1}{k_2}(\vec{F}_{г} + \vec{F}_{га} + \vec{F}_{ма} + \vec{F}_{эма}), \quad \frac{м}{сек}. \tag{18}$$

Общие уравнения материального и силового баланса дают множество частных уравнений массопереноса, пригодных для тех или иных конкретных случаев.

*Уравнение диффузии* получается исключением $\vec{v}_i$ из уравнения баланса (1) с помощью уравнения (18), причем в последнем силами $F_{га}$, $F_{ма}$, $F_{эма}$ пренебрегаем.

Подставляя $\vec{v_i} = -\frac{1}{k_2} \cdot \frac{k_1}{C_i} \operatorname{grad} C_i$ в уравнение (1), получим

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = D \Delta C_i, \tag{19}$$

где $D = \frac{k_1}{k_2}$ — коэффициент диффузии, *м²/сек*.

Диффузия — это массоперенос $i$-х частиц в доминирующей среде под действием сил $F_{дв} = -k_2 \vec{v_i}$ и $\vec{F_г}$.

*Статистическое уравнение типа Фоккера-Планка* получается при дополнительном введении силы $\vec{F}_{га} = \vec{g}(\rho_i - \rho_{ср})$. Для одномерного пространства

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} - \frac{g(\rho_i - \rho_{ср})}{k_2} \cdot \frac{\partial C_i}{\partial x}. \tag{20}$$

Это уравнение учитывает разницу в плотностях среды и $i$-х частиц. Аналогичное уравнение получится, если вместо $F_{га}$ действует сила $F_{ма}$. Уравнение такого типа применяли Э. Э. Рафалес-Ламарка и Е. А. Непомнящий для анализа массопереноса при грохочении и отсадке.

*Уравнение поведения кислорода* в ванне мартеновской печи получается из выражения (3)

$$\frac{\partial C_0}{\partial t} = -\frac{\partial (v_0 C_0)}{\partial x} + f_{хим}(C_0), \tag{21}$$

а также из формулы (18) при $F_{га} = 0$, $F_{ма} = 0$, $F_{эма} = 0$

$$v_0 = -\frac{1}{k_2} \cdot \frac{k_1}{C_0} \cdot \frac{\partial C_0}{\partial x}. \tag{22}$$

Исключение $v_0$ дает

$$\frac{\partial C_0}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2} + f_{хим}(C_0); \quad f_{хим} = -k_{хим} C_0. \tag{23}$$

Здесь индекс «0» означает кислород, $x$ — глубина в ванне.

Такое уравнение применялось Е. В. Челищевым [6, 7] в процессах производства стали, где кислород расходуется на окисление углерода, марганца, фосфора, серы и т. д. Оно отражает динамику химической реакции в условиях диффузии.

Если дополнительно учесть силу $F_{га}$, то получается

$$\frac{\partial C_0}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C_0}{\partial x^2} - \frac{g(\rho - \bar{\rho})}{k_2} \cdot \frac{\partial C_0}{\partial x} - k_{хим} C_0. \tag{24}$$

Различные уравнения, учитывающие кинетику конкретных химических реакций, могут быть получены из уравнений (3) и (18). Например, уравнение массопереноса для процесса окисления углерода в ванне мартеновской печи (или конвертера) получается в виде:

$$\frac{\partial C_C}{\partial t} = D_C \frac{\partial^2 C_C}{\partial x^2} - k_{хим} C_O C_C;$$

$$\frac{\partial C_O}{\partial t} = D_O \frac{\partial^2 C_O}{\partial x^2} - k_{хим} C_O C_C + Q_O. \tag{25}$$

Для простоты в реакции окисления углерода $C+\frac{1}{2}O_2 \rightleftarrows CO$ учитывается только прямая скорость, что дает

$$f_{\text{хим}} = -k_{\text{хим}} C_O C_C,$$

где $C_O(x, t)$, $C_C(x, t)$ — концентрации кислорода и углерода; $Q_O$ — функция «стоков-источников», которая характеризует искусственный приток (отток) кислорода в ванну за счет дутья (или добавки раскислителя).

Совокупные уравнения (25) являются нелинейными.

*Уравнение массопереноса при флотации* [4, 5] получается примерно по той же схеме. Дополнительным обстоятельством является положение о кинетике флотации, выдвинутое А. Д. Погорелым: «скорость минерализации пузырьков пропорциональна их свободной поверхности и концентрации флотируемых частиц в пульпе», что позволяет рассматривать минерализацию как «макрохимическую» реакцию и вводить ее в уравнения материального баланса (4), (8) и далее добавлять уравнение баланса сил. Такие уравнения [5] использовались для оценки хода флотационного процесса на комбинате «Апатит».

*Уравнения расслоения жидких металлов* ($i=1$) и шлака ($i=2$) [5, 8] представляют пример массопереноса двухкомпонентной смеси без среды, вернее среда образуется смесью компонентов. В этом случае надо учитывать переменность $\bar{\rho}(x, t)$ по формуле (13). Поле скоростей из выражения (18) для одномерного пространства

$$v_i = \frac{1}{k_2}\left(\vec{F}_{\text{г}} + \vec{F}_{\text{га}}\right) = \frac{1}{k_2}\left[-\frac{k_1}{C_i}\cdot\frac{\partial C_i}{\partial x} + g\left(\rho_i - \sum_{i=1}^{2} C_i \rho_i\right)\right]. \qquad (26)$$

$$i=1,2$$

Подстановка в формулу (1) окончательно дает

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} - \frac{g}{k_2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_i - \sum_{i=1}^{2} C_i \rho_i\right); \qquad (27)$$

$$i=1,2; \quad C_i = C_i(x, t).$$

Нелинейные уравнения (26) и (27) предсказывают массоперенос металла $C_1(x, t)$ и шлака $C_2(x, t)$ в металлургической ванне ($x$ — глубина в ванне). Они применялись на Хелуанском металлургическом заводе в Египте для расчета быстроты расслоения шлака и стали в ванне [8].

*Уравнения для расслоения нескольких жидкостей* разной плотности аналогичны уравнению (18), $i=1, 2, \ldots, n$. Такие уравнения применимы к процессам экстракции в гидрометаллургии и к формированию многослойных шлаков в пирометаллургии.

*Уравнение гравитационного обогащения*, например, в отсадочной машине [3, 5]

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} - \frac{g}{k^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\gamma\left(\rho - \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \rho\gamma d\rho\right)\right]; \quad \gamma = \gamma(\rho, x, t). \qquad (28)$$

Здесь $x$ — глубина рабочей зоны.

Неизвестная функция $\gamma(\rho, x, t)$ входит под знак интеграла. Это уравнение получается комбинацией уравнения баланса (8). Решения его предсказывают картину массопереноса «бесконечнокомпонентных» смесей. Предсказание технологических показателей обогащения и, в частности кривых извлечения узких фракций $\varepsilon(\rho)$, согласуется с экспериментальными измерениями [3, 6].

*Уравнение магнитной сепарации* [4, 5]

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} = D\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2} - \frac{1}{k_2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\gamma a\left(\varkappa_m - \int_{\varkappa_{min}}^{\varkappa_{max}} \varkappa_m\gamma\, d\varkappa_m\right)\right]; \qquad (29)$$

$$\gamma = \gamma(\varkappa_m, x, t),$$

где $a = H$ grad $H$ в рабочей зоне магнитного сепаратора.

Оно получается так же, как уравнение (28). Это уравнение применялось к расчету ожидаемых результатов магнитной сепарации, что дало результаты, согласующиеся с экспериментальными измерениями [1].

Рассмотренный метод составления статистических уравнений массопереноса наиболее существенной частью базируется на концепции статистических сил. Он дает конкретные частные уравнения в зависимости от набора сил, взятых на учет. Все приведенные частные уравнения, начиная с диффузии и кончая магнитной сепарацией, так или иначе подтверждаются практически. Более того, точное решение наиболее сложных уравнений (28) и (29) для равновесных режимов [5] совпадает с распределением Гиббса из статистической физики, которое построено на концепции энергий. Это также подтверждает правильность метода сил. При составлении новых уравнений по этому методу удача определяется правильным выбором конкретного уравнения силового (и материального) баланса, что требует знания процесса в рассматриваемом аппарате.

В этой статье не затрагиваются чисто математические вопросы решения рассматриваемых уравнений, т. е. вопросы отыскания функций $C_i(x, y, z, t)$ или $\gamma(i, x, y, z, t)$. В общем случае все они решаются численными методами, что не представляет трудностей при применении вычислительных машин.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Нгуен-Данг-Ап, Тихонов О. Н. Расчет ожидаемых результатов магнитной сепарации. «Обогащение руд», 1970, № 4.
2. Тихонов О. Н. Об одном критерии оптимальности в процессах обогащения. Доклад на междунар. конф. ICAMC. Острава, 1967.
3. Тихонов О. Н. Гравитационное разделение многокомпонентных смесей. «Обогащение руд», 1968, № 1.
4. Тихонов О. Н. О динамике процессов обогатительной технологии. Изв. вузов. «Цветная металлургия», 1968, № 3.
5. Тихонов О. Н. Решение задач по автоматизации процессов обогащения и металлургии. «Недра», 1969.
6. Челищев Е. В. Теория и практика интенсификации процессов в конвертерах и мартеновских печах. «Металлургия», 1965.
7. Явойский В. И. Теория процессов производства стали. «Металлургия», 1967.
8. Tikhonov O. N. On the statistical theory of gravity separation in liquid metal processes. 1-st Metallurgical Conference, vol. III, UAR, Cairo, 1971.