Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института
им.Г.В.Плеханова, т./XVIII, вып. 1, 1975 г.

ОБ ОДНОМ ЧАСТОТНОМ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В.Б.Смирнова

Рассматривается замкнутая система автоматического регулирования (рис. 1), состоящая из линейной системы L с распределенными параметрами и одного нестационарного нелинейного элемента N.

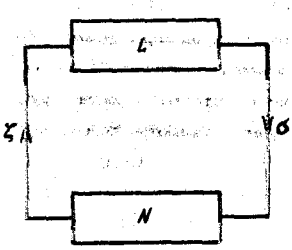


Рис. 1. Структурная схема нелинейной системы автоматического регулирования

Математическое описание линейной системы L сводится к интегральному уравнению Вольтерра

$$\sigma(t)=\sigma_0(t)-\int_0^t \gamma(t-\tau)\zeta(\tau)d\tau\ , \qquad (1)$$

где функция $\sigma_0(t)$ описывает собственные колебания системы.

Преобразование Лапласа от функции $\gamma(t)$

$$X(p)=\int_0^\infty \gamma(t)e^{-pt}dt$$

называется передаточной функцией системы L, а выражение $X(i\omega)$ – ее частотной характеристикой.

Нелинейный элемент N описывается непрерывной функцией

$$\zeta=\varphi(\sigma,t). \qquad (2)$$

Предполагается, что

$$\varphi(0,t)\equiv 0\ , \qquad (3)$$

$$|\varphi(\sigma,t)|<C\,. \tag{4}$$

Кроме того, существуют такие непрерывные функции $\varphi_+(\sigma)$, $\varphi_-(\sigma)$, что $\varphi_+(0)=\varphi_-(0)=0$ и для всех $\sigma\neq 0$ выполнено условие

$$0<\varphi_-/\sigma\leqslant\zeta/\sigma\leqslant\varphi_+/\sigma<k\leqslant+\infty \quad \text{при} \quad t\in[0,+\infty)\,. \tag{5}$$

Таким образом, точка $(\sigma,\varphi(\sigma,t))$ расположена на плоскости $\{\sigma,\zeta\}$ между осью абсцисс и прямой $\zeta=k\sigma$ (рис. 2).

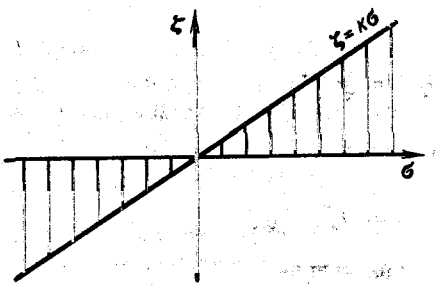


Рис. 2. Область значений нелинейной функции $\varphi(\sigma,t)$

Устойчивость рассматриваемых систем регулирования освещалась в литературе [2-4]. При различных предположениях относительно нелинейности, ядра и внеинтегрального члена уравнения (1) получен ряд достаточных условий устойчивости, сформулированных в виде ограничений на частотную характеристику системы L. В случае, когда система L описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, А.В. Нечитайло была предложена новая форма частотного критерия, использующая значения передаточной функции $\chi(p)$ вдоль прямой $p=-\alpha+i\omega\,(\omega\in(-\infty,+\infty))$.

В настоящей статье "сдвинутый" частотный критерий переносится на системы, математическое описание которых задается в более общем виде.

Т е о р е м а 1. Пусть функции $\sigma_0(t)$ и $\gamma(t)$ абсолютно непрерывны,

$$\sigma_0(t),\dot{\sigma}_0(t),\dot{\gamma}(t)\in L_1[0,+\infty) \tag{6}$$

и существует такое положительное число λ , что

$$e^{\lambda t}\gamma(t)\in L_1[0,+\infty)\cap L_2[0,+\infty)\,. \tag{7}$$

Если, кроме того, для некоторого $\alpha\in[0,\lambda)$ и для всех вещественных ω выполнено неравенство

$$\mathrm{Re}\,\chi(i\omega-\alpha)+\frac{1}{k}\geqslant 0\,, \tag{8}$$

то

$$\sigma(t)\longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t\longrightarrow+\infty\,.$$

Доказательство. Пусть $\sigma(t)$ – решение уравнения (I), (2)

при $t \geq 0$. Введем стандартные обозначения

$$\sigma_1(t) = \sigma(t) - \sigma_0(t) ; \tag{9}$$

$$\zeta_T(t) = \begin{cases} \zeta(t), & t \in [0,T] ; \\ 0 \quad , & t < 0, t > T ; \end{cases} \tag{10}$$

$$\sigma_T(t) = -\int_0^t \gamma(t-\tau)\,\zeta_T(\tau)\,d\tau \tag{11}$$

и рассмотрим функционал

$$I = \int_0^\infty [\zeta_T(t)\sigma_T(t) - \frac{1}{k}\zeta_T^2(t)]dt .$$

Согласно обозначениям (10), (11)

$$I = \int_0^T [\zeta(t)\sigma_1(t) - \frac{1}{k}\zeta^2(t)]dt .$$

Параллельно, воспользовавшись обозначением

$$\tilde{\mu}(t) = \mu(t)e^{\alpha t}$$

построим для $\alpha \in [0,\lambda)$ функции $\tilde{\zeta}(t)$, $\tilde{\zeta}_T(t)$, $\tilde{\sigma}_1(t)$, $\tilde{\sigma}_T(t)$. Заметим, что

$$\tilde{\sigma}_T(t) = -\int_0^t \tilde{\gamma}(t-\tau)\,\tilde{\zeta}_T(\tau)\,d\tau$$

и

$$\zeta(t)\sigma_1(t) - \frac{1}{k}\zeta^2(t) = e^{-2\alpha t}\left[\tilde{\zeta}(t)\tilde{\sigma}_1(t) - \frac{1}{k}\tilde{\zeta}^2(t)\right] .$$

Тогда по второй теореме о среднем значении

$$I = \int_0^{T^*} [\tilde{\zeta}(t)\tilde{\sigma}_1(t) - \frac{1}{k}\tilde{\zeta}^2(t)]dt \qquad (T^* \in [0,T]) ,$$

или

$$I = \int_0^\infty [\tilde{\zeta}_{T^*}(t)\tilde{\sigma}_{T^*}(t) - \frac{1}{k}\tilde{\zeta}_{T^*}^2(t)]dt . \tag{12}$$

Учитывая, что при каждом значении T^* все функции, входящие в состав подынтегрального выражения в равенстве (12), суммируемы с квадратом на полуоси $[0,+\infty)$, как доказано А.Х.Гелигом [3], воспользуемся равенством Парсеваля

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ F[\tilde{\sigma}_{T^*}] - \frac{1}{k} F[\tilde{\zeta}_{T^*}] \right\} F^*[\tilde{\zeta}_{T^*}]\,d\omega ,$$

где

$$F[\mu] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t) e^{-i\omega t} dt,$$

$$(\mu(t) \in L_2[0, +\infty)) \qquad (13)$$

$$F^*[\mu] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mu(t) e^{i\omega t} dt .$$

Применим теперь теорему о свертке

$$I = \frac{1}{2\pi} \int [-F[\tilde{\gamma}] - \frac{1}{k}] |F[\tilde{\xi}_{T^*}]|^2 d\omega = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathrm{Re}\, \chi(i\omega - \alpha) + \frac{1}{k}] |F[\tilde{\xi}_{T^*}]|^2 d\omega .$$

Принимая во внимание неравенство (8), установим, что $I \leq 0$, откуда, в соответствии с обозначением (9), учитывая неравенство (4) и суммируемость функции $\sigma_0(t)$ на полуоси $[0, +\infty]$, получим оценку

$$\int_0^T [\xi(t)\sigma(t) - \frac{1}{k} \xi^2(t)] dt \leq \varkappa , \qquad (14)$$

где $\varkappa$ не зависит от T.

Из условий (6) и (7) теоремы 1 следует, что функция $\sigma(t)$ равномерно непрерывна. Предположим, что

$$\sigma(t) \not\to 0 \qquad \text{при} \qquad t \longrightarrow +\infty .$$

Опираясь на неотрицательность подынтегрального выражения в оценке (14) и рассуждая, как в лемме 1 [1], придем к противоречию с указанной оценкой. Этим теорема 1 доказана.

В теореме 1 частотный критерий получен в предположении, что "сдвинутая" передаточная функция $\chi(p-\alpha)$ аналитична в правой полуплоскости. Предположим теперь, что условие (8) выполняется для такого значения $\alpha > 0$, что у функции $\chi(p-\alpha)$ появляются полюсы в правой полуплоскости и, соответственно, функция $\tilde{\gamma}(t)$ экспоненциально растет при $t \to +\infty$. В этом случае справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. Пусть функция $\sigma_0(t)$ и $\gamma(t)$ абсолютно непрерывны, и

$$\gamma(t), \sigma_0(t), \dot{\gamma}(t), \dot{\sigma}_0(t) \in L_1[0, +\infty) .$$

Пусть для некоторого $\alpha > 0$ и всех $\omega \in (-\infty, +\infty)$ выполнено неравенство (8), а функция $\gamma(t)$ имеет вид

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t) ,$$

где

$$\gamma_1(t) = \sum_{k=1}^{n} r_k^0 e^{-\lambda_k t} + \sum_{k=1}^{m} (r_k^1 e^{-\mu_k t} \sin \omega_k t + r_k^2 e^{-\mu_k t} \cos \omega_k t) ;$$

r_i^0, r_j^i $(i = 1, 2;\ j = 1, \ldots, m;\ l = 1, \ldots, n)$ – постоянные;

$$M \equiv \max\{\mu_1, \ldots, \mu_m, \lambda_1, \ldots, \lambda_n\} < \alpha ;$$
$$e^{\alpha t}\gamma_2(t) \in L_2[0, +\infty) .$$

Тогда, если при всех $\omega \in (-\infty, +\infty)$ выполнено дополнительное условие

$$\mathrm{Re}\Big\{\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{r_k^0}{i\omega+\lambda_k} + \frac{r_k^0}{i\omega+(2\alpha-\lambda_k)}\Big) + \sum_{k=1}^{m}\Big(\frac{r_k^1\omega_k + r_k^2\mu_k + i\omega r_k^2}{(i\omega+\mu_k)^2+\omega_k^2} + \frac{-r_k^1\omega_k + r_k^2(2\alpha-\mu_k) + ir_k^2\omega}{(i\omega+(2\alpha-\mu_k))^2+\omega_k^2}\Big)\Big\} \geqslant 0, \tag{15}$$

то

$$\sigma(t) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \longrightarrow +\infty .$$

Доказательство. Будем следовать схеме доказательства теоремы 1. Введем дополнительные обозначения

$$\sigma_2(t) = -\int_0^t \gamma_2(t-\tau)\zeta(\tau)d\tau ; \qquad \sigma_T^1(t) = -\int_0^t \gamma_2(t-\tau)\zeta_T(\tau)d\tau ;$$
$$\tilde{\sigma}^+(t) = -\int_0^t \tilde{\gamma}_1(t-\tau)\tilde{\zeta}(\tau)d\tau ; \qquad \tilde{\sigma}_T^+(t) = -\int_0^t \tilde{\gamma}_1(t-\tau)\tilde{\zeta}_T(\tau)d\tau ;$$
$$\tilde{\sigma}^-(t) = \int_0^t \tilde{\gamma}_1(\tau-t)\tilde{\zeta}(\tau)d\tau ; \qquad \tilde{\sigma}_T^- = \int_0^t \tilde{\gamma}_1(\tau-t)\tilde{\zeta}_T(\tau)d\tau$$

и рассмотрим функционал

$$I = I_1 + \int_0^T [\tilde{\sigma}^+(t) - \tilde{\sigma}^-(t)]\tilde{\zeta}(t)e^{-2\alpha t}dt , \tag{16}$$

где

$$I_1 = \int_0^T e^{-2\alpha t}[\tilde{\zeta}(t)\tilde{\sigma}_2(t) + \tilde{\sigma}^-(t)\tilde{\zeta}(t) - \frac{1}{k}\tilde{\zeta}^2(t)]dt .$$

Рассмотрим каждое из слагаемых в отдельности. Используя вторую теорему о среднем значении, получим

$$I_1 = \int_0^{T^*}[\tilde{\zeta}\tilde{\sigma}_2 + \tilde{\sigma}^-\zeta - \frac{1}{k}\zeta^2]dt = \int_0^{\infty}[\tilde{\zeta}_{T^*}\tilde{\sigma}_{T^*}^1 + \tilde{\sigma}_{T^*}^-\tilde{\zeta}_{T^*} - \frac{1}{k}\tilde{\zeta}_{T^*}^2]dt .$$

Заметим, что

$$\mathrm{Re}\{F[e^{at}\cos bt]\} = \mathrm{Re}\Big\{\frac{i\omega-a}{(i\omega-a)^2+b^2}\Big\} = -\mathrm{Re}\Big\{\frac{i\omega+a}{(i\omega+a)^2+b^2}\Big\} = -\mathrm{Re}\{F[e^{-at}\cos(-bt)]\} ;$$

$$\mathrm{Re}\left\{F[e^{at}\sin bt]\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{b}{(i\omega-a)^2+b^2}\right\}=-\mathrm{Re}\left\{\frac{-b}{(i\omega+a)^2+b^2}\right\}=-\mathrm{Re}\left\{F[e^{-at}\sin(-bt)]\right\},$$

$$\mathrm{Re}\left\{F[e^{at}]\right\}=\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{i\omega-a}\right\}=-\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{i\omega+a}\right\}=\mathrm{Re}\left\{F[e^{-at}]\right\},$$

и, следовательно, применяя равенство Парсеваля, имеем

$$I_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{F[\tilde{\sigma}^1_{T^*}]+F[\tilde{\sigma}^-_{T^*}]-\frac{1}{k}F[\tilde{\xi}_{T^*}]\right\}F^*[\tilde{\xi}_{T^*}]d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{F[\tilde{\sigma}^1_{T^*}]+F[\tilde{\sigma}^+_{T^*}]-\frac{1}{k}F[\tilde{\xi}_{T^*}]\right\}F^*[\tilde{\xi}_{T^*}]d\omega=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{Re}\chi(i\omega-\alpha)+\frac{1}{k})|F^*[\tilde{\xi}_{T^*}]|^2d\omega.$$

С учетом условия (8)

$$I_1\leqslant 0.$$

Второе слагаемое в правой части выражения (16) представляет собой сумму функции

$$\int_0^T\tilde{\sigma}^+(t)\tilde{\xi}(t)e^{-2\alpha t}dt$$

и выражений вида

$$-\int_0^T\tilde{\xi}(t)e^{-2\alpha t}\int_0^t r_k^j e^{(-\alpha+\lambda_k)(t-\tau)}\mathrm{soc}(\omega_k(\tau-t))\tilde{\xi}(\tau)d\tau=$$

$$=-\int_0^T\zeta(t)\int_0^t r_k^j e^{(-2\alpha+\lambda_k)(t-\tau)}\mathrm{soc}(\omega_k(\tau-t))\zeta(\tau)d\tau,$$

где через $\mathrm{soc}\,\omega_k t$ обозначена одна из функций $1, \sin\omega_k t, \cos\omega_k t$ при всех значениях $j=0;\ k=1,2,\ldots,n$ и $j=1,2;\ k=1,2,\ldots,m$.

Применяя к сумме в целом равенство Парсеваля и учитывая условие (15), установим ее отрицательность. Повторяя далее ход рассуждений теоремы 1, завершим доказательство теоремы 2.

Литература

1. Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р. Абсолютная устойчивость регулируемых систем. М., изд-во АН СССР, 1963.

2. Гелиг А.Х. Абсолютная устойчивость нелинейных регулируемых систем с распределенными параметрами. – "Автоматика и телемеханика", т.XXVI, 1965, № 3.

3. Гелиг А.Х. Устойчивость нелинейных регулируемых систем с распределенными параметрами в критических случаях. – "Автоматика и телемеханика", т.XXVII, 1966, № 4.

4. Якубович В.А. Частотные условия устойчивости нелинейных интегральных управлений автоматического управления. – Вестник ЛГИ, 1967, № 7.