Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института
им.Г.В.Плеханова, т./XVIII, вып. 1, 1975 г.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОСНОВНОГО ВОЗМУЩАЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА КАЛОРИФЕРЫ ШАХТ КОМБИНАТА "ВОРКУТАУГОЛЬ"

Н.М.Третьяков, Ю.А.Модестов

Основным возмущающим воздействием на шахтные калориферы и другие теплообъекты (бойлерные, котельные, водоводы и т.п.) в системах автоматического регулирования температуры является величина приращения температуры наружного воздуха за некоторый постоянный интервал наблюдения. В пределе – это скорость изменения температуры наружного воздуха, которая является случайной величиной и подчинена статистическим закономерностям.

Знание статистических характеристик основного возмущения в указанных системах необходимо при синтезе и анализе, а также для выбора и настройки регуляторов. Основной интерес в этом случае представляет средневероятная (срединная) величина возмущения.

Основные статистические характеристики возмущения получены обработкой исходного материала наблюдений, в качестве которого использовались результаты замеров температуры воздуха метеостанциями Воркутинского аэропорта за девять лет в течение отопительных сезонов (сентябрь–май) с интервалом наблюдения 3 ч (всего 19 440 замеров). Разность между соседними замерами и представляет собой приращение температуры воздуха, т.е. основное возмущение.

Результаты обработки случайной величины $p_i^* \cdot 10^{-3}$ из простой статистической совокупности оформлены в виде статистического ряда, разделенного на разряды с интервалом в $1^{\circ}C$ за 3 ч (см.таблицу).

Изменение случайной величины по месяцам

Разряды, °С за 3 ч	$p_i^* \cdot 10^{-3}$								
	IX	X	XI	XII	I	II	III	IУ	У
–(17,5÷16,5)	–	–	–	–	–	–	0,6	–	–
–(15,5÷14,5)	–	–	–	–	–	–	1,2	–	–
–(13,5÷12,5)	–	–	–	–	–	–	0,6	–	–
–(11,5÷10,5)	–	–	–	–	–	–	1,2	–	1,0
–(10,5÷9,5)	–	0,5	–	–	–	0,8	1,2	1,0	–
–(9,5÷8,5)	–	–	0,6	–	–	–	1,2	2,0	1,0
–(8,5÷7,5)	–	–	–	1,2	1,0	–	6,8	2,0	2,0
–(7,5÷6,5)	1,2	–	1,2	2,4	1,0	2,4	6,2	5,0	2,0
–(6,5÷5,5)	1,8	0,5	2,4	3,5	5,0	6,3	9,4	10,0	4,0
–(5,5÷4,5)	6,0	2,0	5,4	8,8	10,0	7,9	12,5	12,0	6,0
–(4,5÷3,5)	7,2	7,0	11,9	15,0	19,0	15,7	27,0	23,0	18,0
–(3,5÷2,5)	13,1	14,0	41,2	35,3	46,0	46,3	54,0	62,0	40,0
–(1,5÷0,5)	34,7	31,0	106,0	98,9	102,0	102,0	100,0	118,0	92,0
–(0,5÷0,5)	81,3	73,0	202,0	201,0	209,0	198,7	155,0	147,0	176,0
0,5–1,5	197,2	185,0	314,0	299,0	270,0	263,0	252,0	236,0	291,0
1,5–2,5	333,5	400,0	168,0	183,3	174,0	173,5	151,0	153,0	193,0
2,5–3,5	190,0	172,0	80,0	79,8	77,0	102,0	85,0	104,0	90,0
3,5–4,5	71,1	58,0	33,4	38,7	41,0	39,2	63,0	63,0	46,0
4,5–5,5	32,9	29,0	17,9	14,4	18,0	19,6	26,2	27,0	18,0
5,5–6,5	16,1	14,0	7,8	10,9	11,0	5,5	18,1	18,0	12,0
6,5–7,5	8,4	9,0	4,8	4,0	8,0	7,9	7,5	6,0	4,0
7,5–8,5	4,2	3,0	1,2	2,9	4,0	3,9	6,8	5,0	2,0
8,5–9,5	3,0	–	1,8	0,6	1,0	2,4	3,1	3,0	1,0
9,5–10,5	1,2	–	0,6	–	3,0	2,4	4,4	1,0	1,0
10,5–11,5	–	0,5	0,6	–	–	–	4,4	1,0	1,0
11,5–12,5	–	0,5	–	–	–	–	–	1,0	1,0
15,5–16,5	–	–	–	–	–	–	1,8	–	–
	–	–	–	–	–	–	0,6	–	–
$\Sigma p_i^* \cdot 10^{-3}$	1000,0	1000,0	1000,8	1000,0	1000,0	999,5	1000,0	1000,0	1000,0

Для каждого месяца по статистическим рядам вычислены статистические характеристики распределений, т.е. математическое ожидание m_x^*, дисперсия D_x^*, среднеквадратическое отклонение σ_x, симметрия S и эксцесс E_x:

	IX	X	XI	XII	I	II	III	IУ	У
m_x^*	–0,003	–0,032	–0,039	–0,036	0,033	0,010	0,024	0,013	0,059
D_x^*	3,109	3,239	3,645	3,972	4,082	4,101	7,688	5,813	4,130
σ_x	1,763	1,627	1,800	1,836	2,020	2,026	2,772	2,412	2,032
S	0,151	0,140	0,380	–0,023	0,428	0,304	–0,026	–0,024	0,326
E_x	2,70	4,24	3,15	2,52	2,25	2,75	5,40	1,78	4,98

Распределения вполне можно считать симметричными, так как небольшие разнозначные отклонения S от нуля объясняются чисто случайными выбросами на границах рядов из-за ограниченности статистического материала. Значения же эксцессов для всех распределений положительны и настолько больше нуля, что это никак нельзя объяснить недостатком статистического материала или случайными отклонениями. Таким образом, мы имеем дело с островершинными распределениями. Поэтому невозможно сгладить статистические ряды нормальным законом.

Гистограмма на рис. 1 построена по вычисленным для февраля m_x^* и σ_x. Совершенно очевидно, что сглаживание нормальным законом статистического распределения невозможно. Ошибка между этими распределениями приближенно выражается кривой $y(x)$, построенной по точкам, полученным в результате вычитания из ординат гистограммы ординат нормального распределения по серединам разрядов.

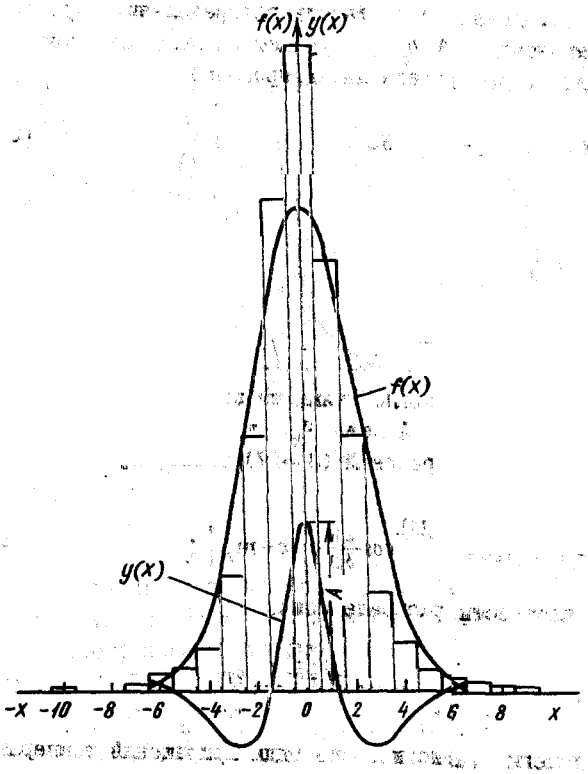


Рис. 1. Гистограмма распределения температур, кривая плотности распределения нормального закона $f(x)$ и кривая $y(x)$ для февраля

Попытаемся связать искомое теоретическое распределение одновременно с нормальным законом и эксцессом. Будем искать уравнение такого распределения, которое бы при симметричной кривой $S \simeq 0$ в зависимости от эксцесса принимало бы островершинный $(E_x > 0)$, нормальный $(E_x = 0)$ или плосковершинный $(E_x < 0)$ характер. Такое уравнение можно искать в виде

$$\varphi(x) = f(x) + y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}} + y(x). \qquad (1)$$

С этой целью для каждого месяца были построены кривые $y(x)$, которые можно аппроксимировать рядом Фурье, учитывая только первую гармонику, т.е.

$$y(x) = y_0 + B\cos\omega x \qquad (2)$$

с ограничением

$$\int_{-x_{max}}^{+x_{max}} y(x)\,dx = 0 \,. \qquad (3)$$

Последнее необходимо в связи с ограничениями, наложенными на уравнение плотности распределения (1); $\varphi(x) \geq 0$ при любых x и $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1$.

В уравнении (2) y_0 – ордината смещения $y(x)$ относительно оси абсцисс; B – экспоненциальная огибающая ряда Фурье,

$$B = (A - y_0)e^{-nx}, \tag{4}$$

где $A - y_0$ – начальная амплитуда $y(x)$ с учетом смещения y_0; A – амплитуда, равная разности между ординатами гистограммы и плотности распределения нормального закона в нулевом разряде; n – степень затухания начальной амплитуды $(A - y_0)$.

Предположим что $y(x)$ не существует за пределами участка $x = m \pm 3\sigma$, т.е. участка, на котором укладывается плотность распределения нормального закона $f(x)$, а амплитуда $A - y_0$ затухает на половине этого же участка за один период. Тогда пределы интегрирования

$$a = \pm x_{max} = m \pm 3\sigma. \tag{5}$$

Соответственно

$$n = \frac{1}{\sigma}; \tag{6}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3\sigma}. \tag{7}$$

После введения ограничений и установления из экспериментальных распределений зависимости амплитуды A от E_x и σ, имеющей вид $A = \frac{E_x}{\pi^2\sigma^2}$ уравнение (2) с учетом выражений (3)–(7) преобразуется к виду

$$y(x) = -0{,}062\frac{E_x}{\pi^2\sigma^2}\left[1 - 17{,}129e^{\frac{-(x-m)}{\sigma}}\cos\frac{2\pi}{3\sigma}(x-m)\right]; \tag{8}$$

тогда искомое уравнение плотности распределения

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} - 0{,}062\frac{E_x}{\pi^2\sigma^2}\left[1 - 17{,}129e^{-\frac{x-m}{\sigma}}\cos\frac{2\pi}{3\sigma}(x-m)\right]. \tag{9}$$

Этим уравнением сглажены статистические ряды приращений температуры за все месяцы. Методика сглаживания сводится к вычислению значений $y(x)$ по формуле (8) и суммированию с табличными данными для нормального распределения $f(x)$[x] для одних и тех же x. Пример сглаживания характеризует рис. 2.

Гипотеза о соответствии полученной теоретической плотности распределения $\varphi(x)$ статистическим распределениям проверялась по критерию согласия Пирсона χ^2 для четырех независимых условий, наложенных на частоты p_i^*. Вероятности того, что за счет чисто случайных причин мера расхождения теоретического и статистического распределений не меньше, чем фактически наблюдаемая для рассмотренных распределений,

---

[x] Здесь и далее использована методика, приведенная А.К.Митропольским в кн. "Техника статистических вычислений" (М., "Наука", 1971.).

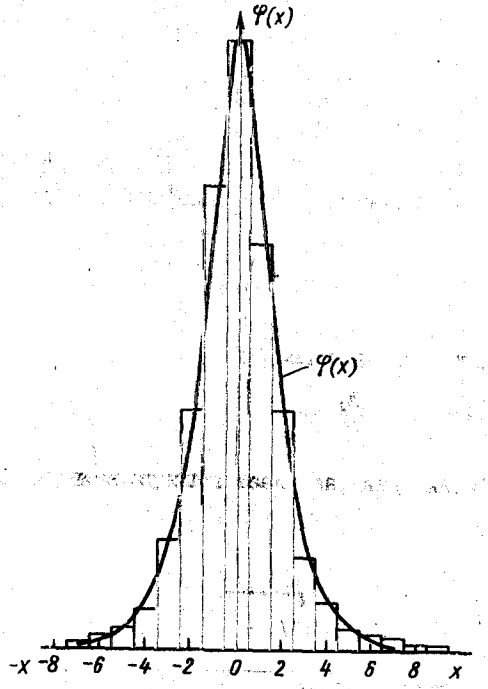


Рис. 2. Гистограмма распределения температур и кривая $\varphi(x)$ для февраля

укладываются в интервале 0,4–0,6. Такие вероятности не являются малыми, следовательно, гипотеза о том, что статистические распределения описываются теоретической кривой $\varphi(x)$, непротиворечива.

Перейдем к вычислению средневероятного (срединного) отклонения. Из его определения следует, что

$$\int_{m}^{x=E} \varphi(x)\,dx = 0{,}25.$$

Считая распределение симметричным относительно оси ординат и пренебрегая m из-за его малости, получим

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^E e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx - 0{,}062\frac{E_x}{\pi^2\sigma^2}\cdot x \times \int_0^E\left(1-17{,}129e^{-\frac{x}{\sigma}}\cos\frac{2\pi}{3\sigma}x\right)dx = 0{,}25. \qquad (10)$$

Правая часть уравнения (10) состоит из двух интегралов: интеграла от плотности нормального распределения $f(x)$ и интеграла от $y(x)$. После преобразования получим

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^E e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx + \frac{E_x}{\sigma}e^{-\frac{E}{\sigma}}\left(0{,}042\sin\frac{2{,}094}{\sigma}E - 0{,}020\cos\frac{2{,}094}{\sigma}E\right) = 0{,}25 - 0{,}020\frac{E_x}{\sigma} + 0{,}006\frac{E_x}{\sigma^2}\cdot E.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_0^E e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx = \left|\begin{array}{ll}\frac{x}{\sigma}=t & \text{при } x=0,\ t=0\\ \frac{dx}{\sigma}=dt & \text{при } x=E,\ t=\frac{E}{\sigma}\end{array}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{E}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

есть интеграл вероятности, который не выражается элементарными функциями, а определяется численными методами и табулирован, то

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{E/\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{E/\sigma} e^{-\frac{t^2}{2}}dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \Phi^*\left(\frac{E}{\sigma}\right) - \frac{1}{2}\cdot$$

Наконец, получим

$$\Phi^*\left(\frac{E}{\sigma}\right)+\frac{E_x}{\sigma}e^{-\frac{E}{\sigma}}\left(0{,}042\sin\frac{2{,}094}{\sigma}E-0{,}020\cos\frac{2{,}094}{\sigma}E\right)=0{,}75-0{,}020\frac{E_x}{\sigma}+0{,}006\frac{E_x}{\sigma^2}E\,. \quad (11)$$

Значение E из такого уравнения определяется графическим методом. Задаваясь произвольно взятыми значениями E, построим графики левой части уравнения (11)

$$U(E)=\Phi^*\left(\frac{E}{\sigma}\right)+\frac{E_x}{\sigma}e^{-\frac{E}{\sigma}}\left(0{,}042\sin\frac{2{,}094}{\sigma}E-0{,}020\cos\frac{2{,}094}{\sigma}E\right)$$

и правой части, представляющей линейную зависимость

$$Z(E)=0{,}006\frac{E_x}{\sigma^2}E-0{,}020\frac{E_x}{\sigma}+0{,}75\,.$$

Точка пересечения графиков этих уравнений дает искомую величину E (рис. 3).

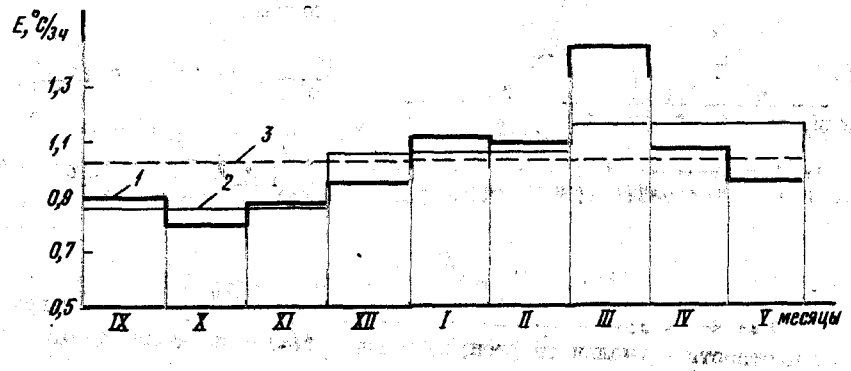


Рис. 3. Средневероятное отклонение по месяцам (1), сезонам (2) и за отопительный период (3)

Необходимо отметить, что определение E приведенным методом весьма громоздко и трудоемко. Чтобы упростить расчеты, установим для нашего распределения зависимость средневероятного отклонения от среднеквадратического, т.е. $E=f(\sigma)$. Воспользовавшись методом наименьших квадратов находим $E = 0{,}506\sigma$.

Выравнивание полученных статистических распределений (см. таблицу) могло быть выполнено и другими методами, например, распределениями I–VII (кривые Пирсона) или распределениями типа А (кривые Грамма–Шарлье). Однако конечной целью при исследовании распределений являлось не установление уравнения кривых распределения, а нахождение вероятной величины E. При выравнивании же электрических распределений указанными методами, несмотря на несомненные удобства, получаются соотношения, которые приводят к более сложным интегральным выражениям при определении E.

Таким образом, приведенные зависимости позволяют без громоздких и трудоемких операций найти необходимые числовые характеристики статистических распределений, подчиненных выведенному закону. Цифровые данные можно использовать для синтеза и анализа систем автоматического регулирования подогрева воздуха в шахтных калориферных установках, а также для других тепловых объектов в районе Воркуты и для настройки регуляторов в этих системах.