

УДК 622.235.535.2

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ СЕЙСМОВЗРЫВНЫХ ВОЛН НА ГОРНЫЙ МАССИВ, ВКЛЮЧАЮЩИЙ ВЫРАБОТКУ

**А.П.ГОСПОДАРИКОВ, Я.Н.ВЫХОДЦЕВ, М.А.ЗАЦЕПИН**

Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург, Россия

В статье в рамках динамической теории упругости представлена математическая модель воздействия сейсмозрывных волн на массив горных пород, включающий выработку. Увеличение объемов добычи полезных ископаемых в сложных горно-геологических условиях с учетом влияния энергии взрыва тесно связано с анализом основных параметров напряженно-деформированного состояния массива горных пород, включающего выработку. Последнее приводит к необходимости определения безопасных параметров буровзрывных работ, обеспечивающих эксплуатационное состояние горной выработки. Основную опасность при взрыве заряда взрывчатого вещества вблизи действующей выработки представляет сейсмозрывная волна, характеристики которой определяются свойствами грунта и параметрами буровзрывных работ. Определение полей напряжений и скоростей смещений в массиве горных пород требует привлечения для своего решения современного математического аппарата. Для численного решения поставленной краевой задачи методом конечных разностей авторами построена оригинальная расчетно-разностная схема. Применение метода расщепления для решения двухмерной краевой задачи сводится к решению пространственно одномерных дифференциальных уравнений. Для полученного численного алгоритма разработана эффективная вычислительная программа. Приведены численные решения модельной задачи для случая, когда форма горной выработки представлена эллипсом.

**Ключевые слова:** горная выработка, математическая модель, сейсмозрывная волна, разностная схема, численный алгоритм

**Как цитировать эту статью:** Господариков А.П. Математическое моделирование воздействия сейсмозрывных волн на горный массив, включающий выработку / А.П.Господариков, Я.Н.Выходцев, М.А.Зацепин // Записки Горного института. 2017. Т. 226. С. 405-411. DOI: 10.25515/PMI.2017.4.405

**Введение.** Напряжения, возникающие в окрестности горной выработки при сейсмическом воздействии взрыва на нее, зависят от многих причин, но, в первую очередь, от мощности заряда взрывчатого вещества (ВВ), расстояния до выработки, скорости детонации, смеси заряда ВВ и т.д. [5, 6, 10]. Для определения влияния воздействия взрывной волны на горную выработку необходимо провести большое количество натурных испытаний, что экономически и технически не всегда возможно. Поэтому для оценки взрывного воздействия на горную выработку в работе используется численное моделирование взаимодействия продольной волны, распространяющейся в упругой среде, с выработкой [12].

**Постановка задачи.** В качестве математической модели воздействия взрывных волн на горную выработку в работе используются уравнения динамической теории упругости Мизеса [3, 9], записанные в криволинейных координатах (рис.1).

На рисунке представлены две системы координат, где введены следующие обозначения:

1)  $O_{1\zeta\eta}$  – прямоугольная система координат; начало координат  $O_1$  – центр масс горной выработки; ось  $O_{1\zeta}$  параллельна скорости перемещения фронта невозмущенной волны;

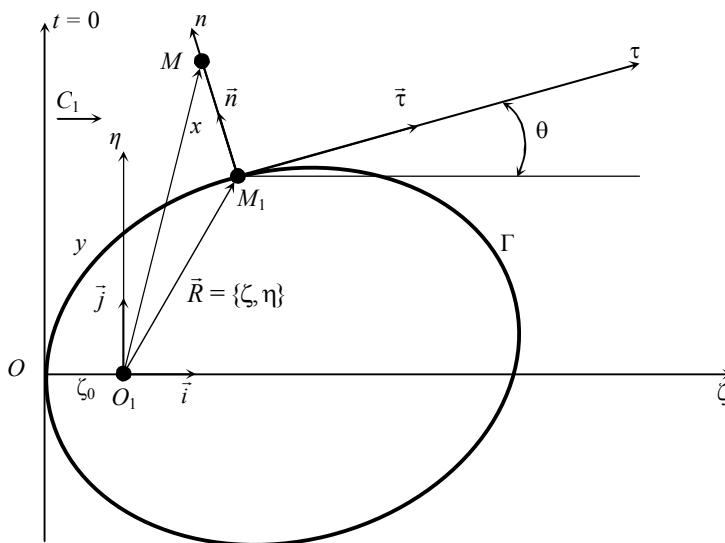


Рис.1. Введенные системы координат



2)  $M_1xy$  – криволинейная система координат;  $x$  – расстояние ( $MM_1$ ) от точки  $M$  до границы горной выработки;  $y$  – длина дуги  $\Gamma$ , отсчитываемая от точки  $O$  до точки  $M_1$ ;  $O$  – точка встречи фронта  $C_1$  падающей волны с граничной поверхностью выработки в начальный момент времени ( $t = 0$ ).

С учетом введенных систем координат имеем соотношение вида

$$\vec{r} = \vec{R} + x\vec{n},$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки  $M$ ;  $\vec{R}$  – радиус-вектор точки  $M_1$ ;  $\vec{n}$  – орт нормали  $n$ ,  $\vec{\tau}$  – орт касательной  $\tau$  в точке  $M_1$ .

Тогда справедливо

$$d\vec{r} = d\vec{R} + x d\vec{n} + dx\vec{n} = dy\vec{\tau} + dx\vec{n} + k(y)x dy\vec{\tau} = (1 + k(y)x) dy\vec{\tau} + dx\vec{n},$$

где  $k(y)$  – кривизна линии  $\Gamma$  в точке  $M_1$ .

Окончательно получим

$$(d\vec{r})^2 = dx^2 + (1 + k(y)x)^2 dy^2 = dx^2 + H^2 dy^2,$$

где  $H = 1 + k(y)x$  – коэффициент Ламе.

Введем обозначения:  $v_1, v_2$  – компоненты вектора скорости частицы массива горных пород по координатным осям  $M_1x$  и  $M_1y$  соответственно; а через  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$  – компоненты тензора напряжений. Тогда уравнения движения и продифференцированный по времени закон Гука, записанные в безразмерной форме, примут вид [1, 7, 8]:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{1}{H} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} + \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial x} (\sigma_{11} - \sigma_{22}); \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{1}{H} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{2}{H} \frac{\partial H}{\partial x} \sigma_{12}; \\ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial t} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{(1-2b)}{H} \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{(1-2b)}{H} \frac{\partial H}{\partial x} v_1; \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial t} = (1-2b) \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{1}{H} \left( \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} v_1 \right); \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial t} = b \left( \frac{1}{H} \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial x} v_2 \right). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $b = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$ ;  $\nu$  – коэффициент Пуассона; материальные координаты  $x, y$  отнесены к ха-

рактерному размеру горной выработки  $L = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$ , м;  $S$  – площадь выработки, м<sup>2</sup>; компоненты вектора скорости  $v_1$  и  $v_2$  – к скорости распространения продольных волн в массиве  $c = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$ , м/с;  $E$  – модуль Юнга, Па;  $\rho$  – плотность среды, кг/м<sup>3</sup>; компоненты тензора напряжений отнесены к величине  $\rho c^2$ ; компоненты вектора скорости – к величине  $c$ ; время  $t$  – к величине  $L/c$ .

Систему дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных (1) можно записать в матричной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + B \frac{\partial U}{\partial x} + pC \frac{\partial U}{\partial y} + qQU = 0, \quad (2)$$

где  $U = \{v_1, v_2, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}^T$  – вектор неизвестных;  $p = \frac{1}{H}$ ;  $q = \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x}$ .

Постоянные матрицы пятого порядка, присутствующие в матричном уравнении (2), имеют вид

$$B = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-2b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1-2b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для замыкания системы (1) краевыми условиями в работе рассматриваются следующие условия:

1. Граничные условия на поверхности полости (горной выработки):

$$\sigma_{11}|_{x=0} = \sigma_{12}|_{x=0} = 0$$

или в матричном виде

$$SU|_{x=0} = 0, \quad (3)$$

где прямоугольная матрица  $S$  имеет вид

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Условие периодичности

$$U|_{y=0} = U|_{y=l}, \quad (4)$$

где  $l$  – длина дуги линии  $\Gamma$ .

2. Начальные условия в начальный момент времени  $t = 0$  определяют поля напряжений и скоростей по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^0 &= \sigma^0(\zeta_0 - \zeta)(\sin^2 \theta - b \cos^2 \theta); \\ \sigma_{12}^0 &= -\sigma^0(\zeta_0 - \zeta)(1-b)\sin \theta \cos \theta; \\ \sigma_{22}^0 &= \sigma^0(\zeta_0 - \zeta)(\cos^2 \theta + b \sin^2 \theta); \\ v_1^0 &= -\sigma^0(\zeta_0 - \zeta)\sin \theta; \\ v_2^0 &= \sigma^0(\zeta_0 - \zeta)\cos \theta, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\sigma^0(s) = \begin{cases} f(s), & s \geq 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases}$ ; функция  $f(s)$  задает эпюру падающей сейсмовзрывной волны;  $s$  – расстояние точки среды до фронта волны в момент времени  $t = 0$ .

**Решение задачи.** Для численного решения краевой задачи (2)-(5) (дифференциальное матричное уравнение с соответствующими граничными и начальными условиями) методом конечных разностей в работе построена расчетная разностная схема. В этом случае уравнение (2) запишем в дивергентной форме [4]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(BU)}{\partial x} + \frac{\partial(pCU)}{\partial y} + TU = 0, \quad (6)$$

где  $T = qQ - \frac{\partial p}{\partial y}C$ .

Далее область изменения переменных  $x, y$  (расчетная область) разбивается на прямоугольники прямыми линиями  $x = x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, J$ ) и  $y = y_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ), а в пространстве  $(x, y, t)$ , выделяя элементарный параллелепипед  $V$ , ограниченный плоскостями  $x = x_{j-1}$ ,  $x = x_j$ ,  $y = y_{n-1}$ ,  $y = y_n$ ,  $t = t'$ ,  $t = t' + \tau$ , получим конечно-разностную схему поставленной краевой задачи (рис.2) для определения основных параметров напряженного состояния массива горных пород, включающего выработку.

Интегрируя матричное уравнение (6) по объему (параллелепипед  $V$ )

$$\int_V \left( \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial(BU)}{\partial x} + \frac{\partial(pCU)}{\partial y} \right) dV = - \int_V TU dV$$

и преобразовав левую часть последнего выражения по формуле Гаусса:

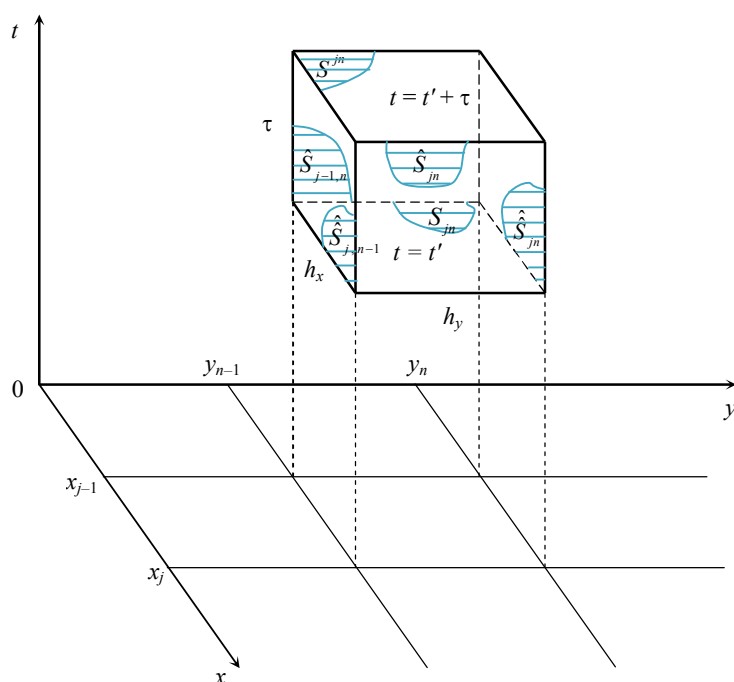


Рис.2. Конечно-разностная схема

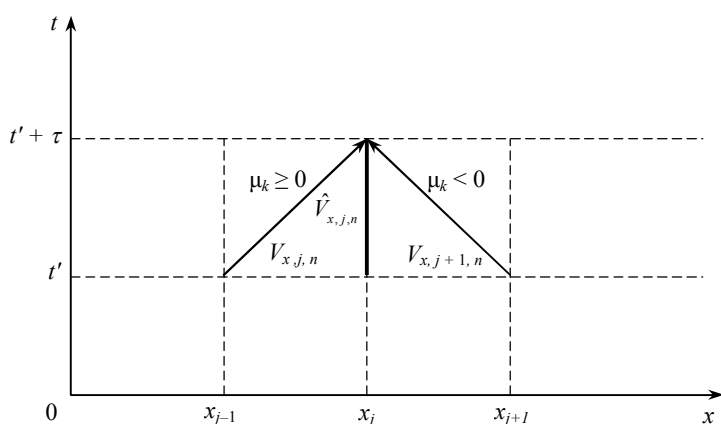


Рис.3. Инварианты Римана

$$\int_S [U \cos(\vec{n}, t) + BU \cos(\vec{n}, x) + pCU \cos(\vec{n}, y)] dS = - \int_V TU dV,$$

где  $S$  – поверхность рассматриваемого параллелепипеда  $V$ , т.е.  $S = S^{jn} \cup S_{jn} \cup \hat{S}_{jn} \cup \hat{S}_{j-1,n} \cup \hat{S}_{j,n-1} \cup \hat{S}_{j,n-1}$ ;  $\vec{n}$  – направление внешней нормали к ней, а также считая, что на каждой грани вектор неизвестных  $U$  сохраняет постоянное значение с точностью до малых первого порядка получим

$$(U^{jn} - U_{jn})h_x h_y + B(\hat{U}_{jn} - \hat{U}_{j-1,n})h_y \tau + C(p_{jn} \hat{U}_{jn} - p_{j,n-1} \hat{U}_{j,n-1})h_x \tau = -(TU)_{jn} h_x h_y \tau, \quad (7)$$

$U^{jn}$ ,  $U_{jn}$  – значения вектора неизвестных  $U$  на верхней и нижней гранях  $S^{jn}$ ,  $S_{jn}$  соответственно;  $\hat{U}_{jn}$ ,  $\hat{U}_{j-1,n}$  – значения вектора неизвестных  $U$  на боковых гранях  $\hat{S}_{jn}$ ,  $\hat{S}_{j-1,n}$ , перпендикулярных оси  $M_1 x$ ;  $\hat{U}_{jn}$ ,  $\hat{U}_{j,n-1}$  – значения вектора неизвестных  $U$  на боковых гранях  $\hat{S}_{jn}$ ,  $\hat{S}_{j,n-1}$ , перпендикулярных оси  $M_1 y$ .

Величины  $\hat{U}_{jn}$ ,  $\hat{U}_{jn}$  определяются методом расщепления [3, 11], в соответствии с которым значения вектора неизвестных  $U$  на боковых гранях находятся из решения пространственно одномерных уравнений [2, 3]. Тогда для определения вектора неизвестных  $U$  рассматривается краевая задача вида

$$\frac{\partial U}{\partial t} + B \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad U(x, y_n, t') = \begin{cases} U_{jn}, & x \leq x_j \\ U_{j+1,n}, & x > x_j \end{cases}; \quad t' \leq t < t' + \tau. \quad (8)$$

Обозначая через  $\Lambda_x$  матрицу левых собственных векторов матрицы  $B$ , отвечающих ее собственным значениям  $\mu_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 5$ ), и полагая  $U = \Lambda_x^{-1} V_x$ , из уравнения (8) получим

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} + M \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

где  $M = \Lambda_x B \Lambda_x^{-1} = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_5)$ .

Из уравнения (9) следует, что компоненты  $V_x^k$  (инварианты Римана) вектора  $V_x$  сохраняют постоянные значения на прямых линиях  $\mu_k t - x = \text{const}$  (рис.3).



Следовательно, имеем

$$\hat{V}_{x,jn}^{(k)} = \begin{cases} V_{x,jn}^{(k)}, & \mu_k \geq 0; \\ V_{x,j+1,n}^{(k)}, & \mu_k < 0. \end{cases}$$

Последнее выражение запишем в матричном виде:

$$\hat{V}_{x,jn} = P^+ V_{x,jn} + P^- V_{x,j+1,n}, \quad (10)$$

где  $P^\pm = \frac{1}{2}(|P| \pm P)$ ;  $P = \text{diag}\{\text{sign}(\mu_k)\}$ ;  $|P| = \text{diag}\{|P_{kk}|\}$ .

Окончательно решение разностного уравнения (7) примет вид

$$U^{jn} = \left[ E - \frac{\tau}{h_x} \Phi_x - \frac{\tau}{h_y} (p_{jn} \Phi_y^+ + p_{j,n-1} \Phi_y^-) \right] U_{jn} + \frac{\tau}{h_x} (\Phi_x^+ U_{j-1,n} + \Phi_x^- U_{j+1,n}) + \\ + \frac{\tau}{h_y} (p_{j,n-1} \Phi_y^+ U_{j,n-1} + p_{jn} \Phi_y^- U_{j,n+1}) - (TU)_{jn} \tau, \quad (11)$$

где

$$\Phi_x^\pm = \Lambda_x M^\pm \Lambda_x^{-1}; \quad \Phi_y^\pm = \Lambda_y M^\pm \Lambda_y^{-1}; \quad M^\pm = \frac{1}{2}(|M| \pm M); \\ \Phi_x = \Phi_x^+ + \Phi_x^- = \Lambda_x |M| \Lambda_x^{-1}; \quad \Phi_y = \Phi_y^+ + \Phi_y^- = \Lambda_y |M| \Lambda_y^{-1}.$$

Формула (11) позволяет получить выражение для значений вектора неизвестных  $U$  во внутренних узлах верхнего слоя, отвечающего моменту времени  $(t' + \tau)$ , через значения этого вектора в узлах нижнего слоя для момента времени  $t'$ .

Далее с помощью полученной формулы (11) осуществляется переход с временного слоя, отвечающего моменту времени  $t=t'$ , на следующий временной слой  $t=t'+\tau$ . При этом отметим, что формула (11) позволяет найти новые значения вектора неизвестных  $U$  только во внутренних ячейках расчетной области, т.е. в ячейках, не имеющих общих точек с границей полости. Поэтому для нахождения решения в граничных ячейках необходимо привлечь краевые условия (3)-(4).

Обозначая через  $S_{l,p}$ ,  $p \in \overline{1:N}$  ячейки, примыкающие к границе полости, краевые условия (3) на поверхности полости примут вид

$$S \hat{U}_{0,p} = 0, \quad (12)$$

или перейдя в (12) к инвариантам Римана:

$$S \Lambda_x^{-1} \hat{V}_{x,0,p} = 0. \quad (13)$$

Матричное равенство (12) имеет два условия для определения компонент вектора неизвестных  $\hat{U}_{0,p}$ . Еще три необходимых соотношения получим из условия сохранения инвариантов Римана, отвечающих неположительным собственным значениям матрицы  $B$ :

$$\hat{V}_{x,0,p} = V_{x,1,p}^{(k)}; \quad k = 3, 4, 5, \quad (14)$$

или в матричной форме данное равенство запишем в виде

$$\Gamma \hat{V}_{x,0,p} = \Gamma V_{x,1,p}, \quad (15)$$

где матрица  $\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Объединяя матричные уравнения (13) и (15), получим искомую систему алгебраических уравнений для определения всех компонент вектора неизвестных  $\hat{V}_{x,0,p}$ , решение которой записывается в виде

$$\hat{V}_{x,0,p} = \begin{pmatrix} S\Lambda_x^{-1} \\ \Gamma \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \Gamma V_{x,1,p} \end{pmatrix} \equiv Y.$$

При этом последние три компоненты вектора  $\hat{V}_{x,0,p}$  по-прежнему определяются соотношениями (14). Таким образом, вектор  $\hat{V}_{x,0,p}$  представим в виде

$$\hat{V}_{x,0,p} = P^- V_{x,1,p} + P^+ Y.$$

Далее введем фиктивные ячейки  $S_{0,p}$  и положим  $V_{x,0,p} = Y$ . Тогда получим

$$\begin{cases} \hat{V}_{x,0,p} = P^+ V_{x,0,p} + P^- V_{x,1,p}; \\ \hat{U}_{0,p} = \Lambda_x^+ U_{0,p} + \Lambda_x^- U_{1,p}. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь  $\Lambda_x^\pm = \Lambda_x^{-1} P^\pm \Lambda_x$ ,

$$U_{0,p} = \Lambda_x^{-1} Y = \Lambda_x^{-1} \begin{pmatrix} S\Lambda_x^{-1} \\ \Gamma \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \Gamma U_{1,p} \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} S\Lambda_x^{-1} \\ \Gamma \end{pmatrix} \Lambda_x \right)^{-1} = \begin{pmatrix} S \\ \Gamma \Lambda_x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \Gamma U_{1,p} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где матрица  $\Gamma \Lambda_x = \begin{pmatrix} e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{pmatrix}$ ;  $e_3, e_4, e_5$  – собственные векторы матрицы  $B$ , отвечающие ее неположительным собственным значениям.

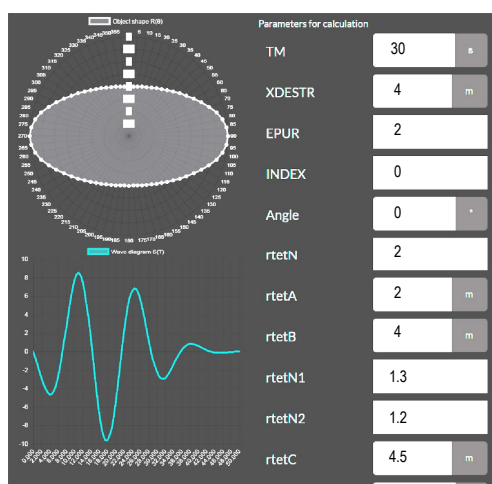


Рис.4. Конфигурация расчета

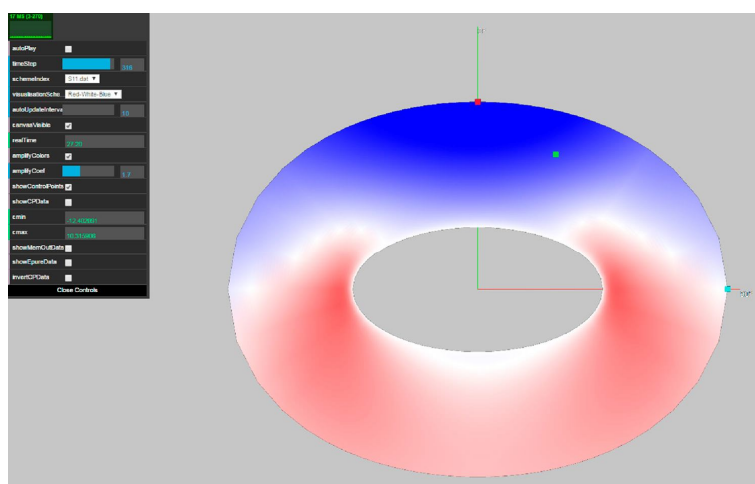


Рис.5. Визуализация процесса с реперными точками

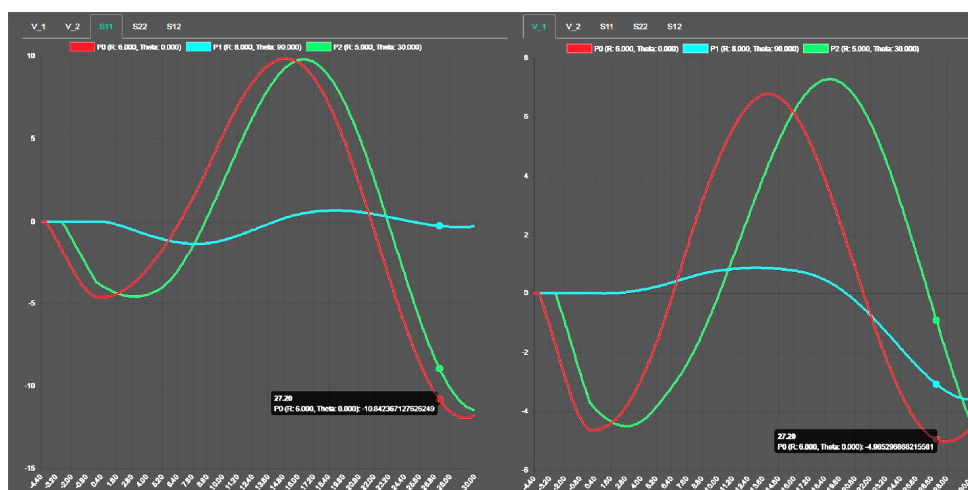


Рис.6. Визуализация сценария: реперные точки и графики напряжений (слева), графики скоростей (справа)





Кроме того, вводим фиктивные ячейки  $S_{j0}, S_{jN}$  ( $j \in \overline{1:J}$ ) и положим  $U_{0,j} = U_{n-1,j}$ ,  $U_{N,j} = U_{1,j}$ . Отметим, что формулы (16) полностью совпадают с формулами (10), и, следовательно, соотношение (11) справедливо для всей расчетной области.

Для решения поставленной краевой задачи используем пошаговый алгоритм. Если на временном слое, отвечающем моменту времени  $t = t'$ , состояние среды уже известно, то для перехода на следующий временной слой  $t = t' + \tau$  необходимо с помощью формул типа (17) заполнить все фиктивные ячейки, а затем воспользоваться соотношением (11). При этом, как следует из (10), при каждом таком переходе протяженность расчетной области уменьшается на одну ячейку в направлении оси  $Ox$  (см. рис.2). Поэтому, если требуется построить решение в произвольном

прямоугольнике  $\begin{cases} x \in [0, x^1]; \\ y \in [0, l] \end{cases}$  для всех значений  $t \in [0, T]$ , то начальная расчетная область должна,

по крайней мере, занимать прямоугольник  $\begin{cases} x \in [0, x^1 + T]; \\ y \in [0, l]. \end{cases}$

На рис.4-6 представлены результаты решения модельной краевой задачи со следующими параметрами: горная выработка в форме эллипса с полуосями 2 и 4 м расположена в скальном грунте (модуль Юнга  $E = 57,9$  ГПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,35$ ; скорость продольных волн  $v = 5800$  м/с), эпюра падающей волны изображена на рис.4.

### Выводы

1. Получена математическая модель воздействия сейсмозрывной волны на горную выработку.
2. Разработана оригинальная расчетно-разностная схема решения рассматриваемой краевой задачи, описывающая воздействие сейсмозрывной волны на массив пород, включающих горную выработку.
3. Построен алгоритм численного решения краевой задачи, реализующий полученную математическую модель.
4. Разработан эффективный программный продукт на языке JavaScript, апробированный на решении характерной модельной задачи.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. Л.: Наука, 1978. 296 с.
2. Годунов С.К. Разностные схемы / С.К.Годунов, В.С.Рябенский. М.: Наука, 1977. 440 с.
3. Господариков А.П. Об одном подходе к математическому моделированию воздействия взрывных волн на подземный нефтепровод / А.П.Господариков, Г.А.Колтон, Е.Л.Булдаков // Записки Горного института. 2014. Т. 210. С. 37-42.
4. Господариков А.П. Динамический расчет трубопроводов на сейсмические воздействия / А.П.Господариков, Н.Л.Горохов // Записки Горного института. 2011. Т. 193. С. 318-321.
5. Ляхов Г.М. Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах. М.: Недра, 1974. 192 с.
6. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 371 с.
7. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости. М.: Физматлит, 1959. 361 с.
8. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.Н. Прокопов. М.: Наука, 1976. 400 с.
9. Шемякин Е.И. Динамические задачи теории упругости и пластичности. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1968. 337 с.
10. Bormann P. Seismic wave propagation and Earth models / P.Bormann, E.R.Engdahl, R.Kind. Ed. Bormann // New Manual of Seismological Observatory Practice. Potsdam: German Research Center for Geosciences, 2012. P. 1-105. DOI: 10.2312/GFZ.NMSOP-2\_ch2
11. Yan Bo. Subsection forward modeling method of blasting stress wave underground / Bo Yan, Xinwu Zeng, Yuan Li // Mathematical problems in engineering. 2015. Vol. 215. P. 9. DOI: 10.1155/2015/678468
12. Ziaran S. Analysis of seismic waves generated by blasting operations and their response on buildings / S.Ziaran, M.Musil, M.Cekan, O.Chlebo // International Journal of Environmental, Chemical, Ecological, Geological and Geophysical Engineering. 2013. Vol.7. № 11. P. 769-774.

**Авторы:** А.П.Господариков, д-р. техн. наук, профессор, [kafmatem@spmi.ru](mailto:kafmatem@spmi.ru) (Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург, Россия), Я.Н.Выходцев, аспирант, [m1000@list.ru](mailto:m1000@list.ru) (Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург, Россия), М.А.Зацепин, канд. физ.-мат. наук, доцент, [zatsepin@spmi.ru](mailto:zatsepin@spmi.ru) (Санкт-Петербургский горный университет, Санкт-Петербург, Россия).

Статья принята к публикации 17.04.2017.