Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г.В.Плеханова,
т. ХХIУ, вып. 2, 1977 г.

ФОРМЫ ДВОЙНИКОВ С ВХОДЯЩИМИ УГЛАМИ

В.А.МОКИЕВСКИЙ, АЛИЯ А.МАХМУД

Между гранями сдвойникованных кристаллов часто возникают входящие углы, по которым иногда можно определить закон двойникования. Входящие углы, как давно было замечено, способствуют ускоренному росту двойника по сравнению с монокристаллом. Однако при двойниковании входящие углы возникают не всегда. Иногда обобщенные грани сдвойникованных индивидов могут быть параллельными друг другу или образовывать "выходящие" углы.

До сих пор теоретически не был разработан вопрос, какие грани индивидов двойника могут давать входящие углы и какие будут параллельны друг другу в зависимости от того или иного закона двойникования. Витке и Карридо впервые перечислили двуцветные гранные формы, причем при описании этих форм указывалась только цветность [8]. Общее число форм осталось неизвестным. И.И.Шафрановским был поднят вопрос о применении двуцветных форм и форм с входящими углами для описания двойниковых образований [5]. Затем И.И.Шафрановский и В.А.Письменный попытались вывести все двуцветные формы путем раскраски кристаллографических моделей [6]. Многие формы ими были пропущены: так, вместо шести двуцветных кубов было найдено только три. Поэтому В.А.Мокиевский заново попытался вывести двуцветные простые гранные формы, которых оказалось 305 [3]. При повторном выводе авторы настоящей статьи обнаружили неточность в нумерации и установили 304 двуцветные формы. В их число входят как формы с входящими углами, так и формы без них.

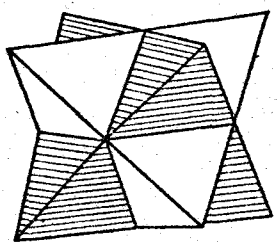


Рис. 1. Правильный октаэдр второй степени, по Е.С.Федорову, или двойник прорастания двух правильных тетраэдров

Многогранники с входящими углами всегда сводятся, по Е.С.Федорову [4], к выпуклым многогранникам, продолжая грани которых можно получить тот или иной койлоэдр. Так, например, продолжением граней октаэдра можно получить койлоэдр, представляющий модель двойника из двух тетраэдров с входящими углами при ребрах исходного октаэдра (рис.1).

Следовательно, только те простые двуцветные формы двойников будут давать входящие углы, которые можно разложить на две простые формы, встречающиеся у каждого компонента в отдельности. Это отвечает

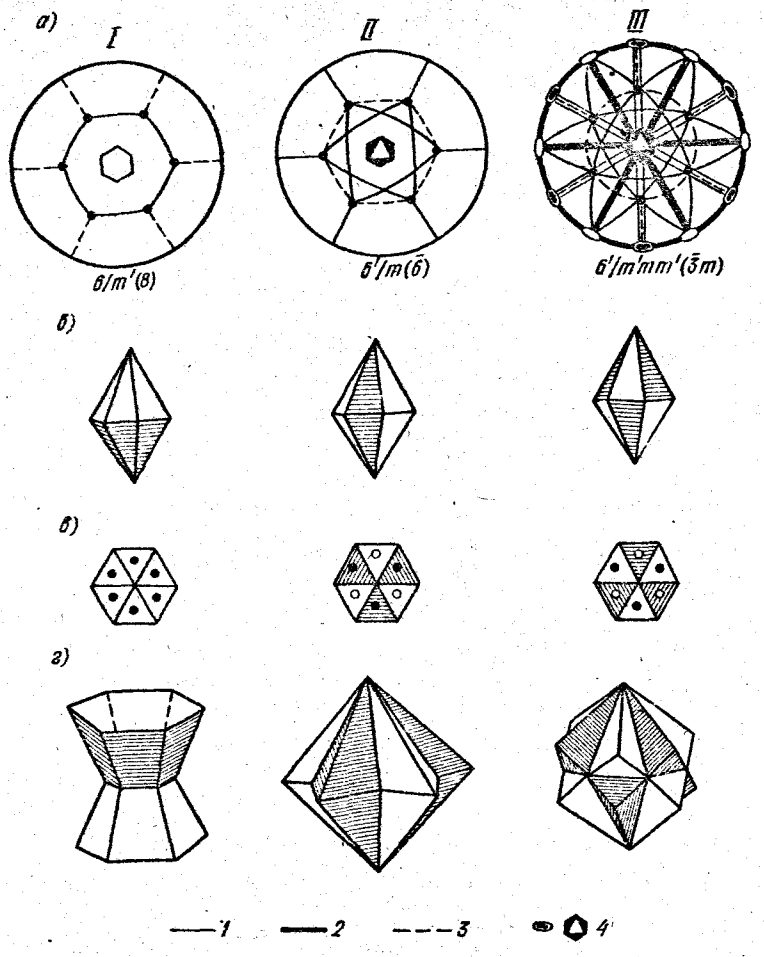


Рис.2. Гемиэдрические разновидности двуцветной гексагональной дипирамиды с одноцветными гранями: а – стереографические проекции двуцветных групп симметрии; б – аксонометрические изображения двуцветных разновидностей гексагональных дипирамид; в – проекции соответствующих разновидностей гексагональных дипирамид по способу А.В.Шубникова [7] на плоскость, перпендикулярную главной оси симметрии; г – аксонометрические проекции комбоэдров, соответствующих трем типам дипирамид

Комбоэдры из двух гексагональных пирамид (I), из двух тригональных дипирамид (II) и из двух ромбоэдров (III)

1 – проекции ребер простых форм компонентов; 2 – проекция плоскости m'; 3 – проекции ребер гексагональной дипирамиды при входящих углах; 4 – проекция оси $2'$ и $6'$

старинным понятиям голоэдрии и гемиэдрии. В качестве голоэдрической формы здесь выступает двуцветная простая форма двойника, а в качестве гемиэдрической – соответственная простая форма компонента, содержащая вдвое меньше граней. Если известна двуцветная группа симметрии двойника прорастания, то по стереографической проекции легко найти все формы, которые могут давать входящие углы. Это будут грани, не перпендикулярные двуцветным элементам симметрии (на рисунках обычно заштриховываются). Грани, перпендикулярные заштрихованным элементам симметрии, будут двуцветными (составными), т.е. грань одного компонента будет как бы продолжением грани второго компонента. На этой обобщенной грани может проходить макроскопический двойниковый шов.

Таким образом, отдельно взятая грань простой двуцветной формы двойника, которая может дать входящие углы, является одноцветной и ее симметрия в двойнике и в компоненте совпадает. Меняется только тип простой формы и число граней (у двойника граней в два раза больше, чем у компонента). Грани компонентов, не дающие входящих углов, в двойнике двуцветны. Тип простой формы у двойника и у компонента один (число граней одинаковое).

Поясним сказанное на примере хорошо известного двойника прорастания кальцита (класс симметрии $\bar{3}m$) по (0001), который имеет такую же двуцветную группу $6/m'm'm$, как и шпинелевый двойник. На рис.2 приведена стереографическая проекция двойниковой группы симметрии и показаны формы гексагональной двуцветной дипирамиды с входящими и выходящими углами, образованными гранями двух ромбоэдров. В табл.I под № 44 перечислены формы компонентов, соответствующие им формы двойника с удвоенным числом граней (с возможными входящими углами) и формы двойника с сохранением числа граней, но с изменением их симметрии (формы без входящих углов). Как видно, в данном случае формы с входящими углами в двойнике могут дать только две простые формы компонентов: ромбоэдры дают гексагональную дипирамиду, а два скаленоэдра – дигексагональную дипирамиду.

На стереографической проекции легко найти ребра при входящих углах. Ими будут гномостереографические проекции ребер гексагональной дипирамиды, составленной из ромбоэдров [2]. Заметим, что у двойника пересекающиеся гранные формы компонентов не обязательно будут давать входящие углы. Указанные ромбоэдры могут образовать просто дипирамиду (рис.2, б).

Входящие углы отображают особенности образования двойника. Если, например, двойник возникает при фазовом переходе второго рода (α – β –превращения кварца), то входящие углы не возникнут. Разумеется, могут быть и другие причины, препятствующие образованию форм с входящими углами.

Гексагональная дипирамида с входящими углами может образоваться и из других простых форм компонентов – гексагональных пирамид и тригональных дипирамид (см. табл.I, № 38 и 39). В первом случае ребрами при входящих углах будут только ребра, перпендикулярные главной оси (см. рис.2, г), а во втором – только ребра, наклонные к главной оси.

Поскольку при пересечении двух простых форм в двойнике всегда образуется третья простая двуцветная форма, то число простых реберных форм при входящих углах не может быть больше трех – максимального числа реберных форм

Таблица 1

Формы с входящими углами и без них
для 58 шубниковских групп

№ п/п	Группа симметрии двойника, в скобках классическая подгруппа	Исходная форма компонента, в скобках симметрия ее грани	Симметрия двуцветной (составной) грани без входящих углов	Форма с удвоенным числом граней, которая может дать входящие углы (симметрия грани указана в гр. 3)
1	2	3	4	5
1	$\bar{1}'$ (1)	Моноэдр (1)	–	Пинакоид
2	$2'$ (1)	Моноэдр (1)	$2'$	–
		"	–	Пинакоид
		"	–	Диэдр
3	m'(1)	Моноэдр (1)	m'	–
		"	–	Пинакоид
		"	–	Диэдр
4	$2'/m'$ ($\bar{1}$)	Пинакоид (1)	$2'$	–
		"	m'	–
		"	–	Ромбическая призма
5	$2'/m$ (m)	Моноэдр (m)	–	Пинакоид
		Пинакоид (1)	$2'$	–
		Диэдр (1)	–	Ромбическая призма
6	$2/m'$(2)	Моноэдр (2)	–	Пинакоид
		Пинакоид (1)	m'	–
		Диэдр (1)	–	Ромбическая призма
7	$2'm m'$(m)	Моноэдр (m)	$2'm m'$	–
		"	–	Диэдр
		"	–	Пинакоид
		Пинакоид (1)	m'	–
		Диэдр (1)	–	Ромбическая призма
		"	m'	–
		"	–	Ромбическая пирамида
8	$2m'm'$(2)	Моноэдр (2)	$2m'm'$	–
		Пинакоид (1)	m'	–
		"	–	Ромбическая призма
		Диэдр (1)	m'	–
		"	–	Ромбическая пирамида
9	$22'2'$ (2)	Моноэдр (2)	–	Пинакоид
		Пинакоид (1)	$2'$	–

1	2	3	4	5
		Пинакоид (1)	–	Ромбическая призма
		Диэдр (1)	–	" "
		"	–	Ромбический тетраэдр
10	mmm' $(2mm)$	Моноэдр ($2mm$)	–	Пинакоид
		Пинакоид (m)	$2'mm'$	–
		Ромбическая призма (1)	m'	–
		Диэдр (m)	–	Ромбическая призма
		Ромбическая пирамида (1)	–	Ромбическая дипирамида
11	$mm'm'$	Пинакоид (2)	$2m'm'$	–
	$(2/m)$	Пинакоид (m)	$2'mm'$	–
		"	–	Ромбическая призма
		Ромбическая призма (1)	m'	–
		" "	–	Ромбическая дипирамида
12	$m'm'm'$	Пинакоид (2)	$2m'm'$	–
	(222)	Ромбическая призма (1)	m'	–
		Ромбический тетраэдр (1)	–	Ромбическая дипирамида
13	$3'$	Моноэдр (3)	–	Пинакоид
		Тригональная призма (1)	–	Гексагональная призма
		Тригональная пирамида (1)	–	Ромбоэдр
14	$3m'$ (3)	Моноэдр (3)	$3m'$	–
		Тригональная призма (1)	m'	–
		" "	–	Гексагональная призма
		" "	–	Дитригональная призма
		Тригональная пирамида (1)	m'	–
		" "	–	Гексагональная пирамида
		" "	–	Дитригональная пирамида
15	$32'$ (3)	Моноэдр (3)	–	Пинакоид
		Тригональная призма (1)	$2'$	–
		" "	–	Гексагональная призма
		" "	–	Дитригональная призма
		Тригональная пирамида (1)	–	Тригональная дипирамида
		" "	–	Ромбоэдр
		" "	–	Тригональный трапецоэдр
16	$\bar{3}m'(\bar{3})$	Пинакоид (3)	$3m'$	–
		Гексагональная призма (1)	$2'$	–
		" "	m'	–
		" "	–	Дигексагональная призма
		Ромбоэдр (1)	m'	–

1	2	3	4	5
		Ромбоэдр (1)	–	Гексагональная дипирамида
		"	–	Тригональный скаленоэдр
17	$\bar{3}'m'(32)$	Пинакоид (3)	$3m'$	–
		Тригональная призма (2)	–	Гексагональная призма
		Дитригональная призма (1)	–	Дигексагональная призма
		Гексагональная призма (1)	m'	–
		Тригональная дипирамида (1)	–	Гексагональная дипирамида
		Ромбоэдр (1)	m'	–
		Тригональный трапецоэдр (1)	–	Тригональный скаленоэдр
18	$\bar{3}'m(3m)$	Моноэдр ($3m$)	–	Пинакоид
		Тригональная призма (m)	–	Гексагональная призма
		Гексагональная призма (1)	$2'$	–
		Дитригональная призма (1)	–	Дигексагональная призма
		Тригональная пирамида (m)	–	Ромбоэдр
		Гексагональная пирамида (1)	–	Гексагональная дипирамида
		Дитригональная пирамида (1)	–	Тригональный скаленоэдр
19	$4'(2)$	Моноэдр (2)	$4'$	–
		Пинакоид (1)	–	Тетрагональная призма
		Диэдр (1)	–	Тетрагональная пирамида
20	$4'/m(2/m)$	Пинакоид (2)	$4'$	–
		Пинакоид (m)	–	Тетрагональная призма
		Ромбическая призма (1)	–	Тетрагональная дипирамида
21	$4/m'(4)$	Моноэдр (4)	–	Пинакоид
		Тетрагональная призма (1)	m'	–
		"	–	Тетрагональная дипирамида
22	$4'/m'(\bar{4})$	Пинакоид (2)	$4'$	–
		Тетрагональная призма (1)	m'	–
		Тетрагональный тетраэдр (1)	–	Тетрагональная дипирамида
23	$4'mm'$ $(2mm)$	Моноэдр ($2mm$)	$4'mm'$	–
		Пинакоид (m)	–	Тетрагональная призма
		Ромбическая призма (1)	Тетрагональная призма m'	–
		"	–	Дитетрагональная призма
		Диэдр (m)	–	Тетрагональная пирамида
		Ромбическая пирамида (1)	Тетрагональная пирамида m'	–
		"	–	Дитетрагональная пирамида
24	$4m'm'(4)$	Моноэдр (4)	$4m'm'$	–
		Тетрагональная призма (1)	m'	–

1	2	3	4	5
		Тетрагональная призма (1)	–	Дитетрагональная призма
		Тетрагональная пирамида (1)	m'	–
		" "	–	Дитетрагональная пирамида
25	$4'22'$	Пинакоид (2)	4	–
	(222)	"	–	Тетрагональная призма
		Ромбическая призма (1)	Тетрагональная призма ($2'$)	–
		" "	–	Дитетрагональная призма
		" "	–	Тетрагональная дипирамида
		Ромбический тетраэдр (1)	–	" "
		" "	–	Тетрагональный трапецоэдр
26	$4\,2'2'$	Моноэдр (4)	–	Пинакоид
	(4)	Тетрагональная призма (1)	$2'$	–
		" "	–	Дитетрагональная призма
		Тетрагональная пирамида (1)	–	Тетрагональная дипирамида
		" "	–	Тетрагональный трапецоэдр
27	$4'/mmm'$	Пинакоид ($2mm$)	$4'mm'$	–
	(mmm)	"	–	Тетрагональная призма
		Ромбическая призма (m)	–	Тетрагональная дипирамида
		" "	Тетрагональная призма $2'mm'$	–
		" "	–	Дитетрагональная призма
		Ромбическая дипирамида (1)	Тетрагональная дипирамида m'	–
		" "	–	Дитетрагональная дипирамида
28	$4/mm'm'$	Пинакоид (4)	$4m'm'$	–
	($4/m$)	Тетрагональная призма (m)	$2'mm'$	–
		" "	–	Дитетрагональная призма
		Тетрагональная дипирамида (1)	m'	–
		" "	–	Дитетрагональная дипирамида
29	$4/m'mm$	Моноэдр ($4mm$)	–	Пинакоид
	($4mm$)	Тетрагональная призма (m)	$2'mm'$	–
		Дитетрагональная призма (1)	m'	–
		Тетрагональная пирамида (m)	–	Тетрагональная дипирамида
		Дитетрагональная пирамида (1)	–	Дитетрагональная дипирамида
30	$4/m'm'm'$	Пинакоид (4)	$4m'm'$	–
	(422)	Тетрагональная призма (2)	$2m'm'$	–

1	2	3	4	5
		Дитетрагональная призма (1)	m'	–
		Тетрагональная дипирамида (1)	m'	–
		Тетрагональный трапецоэдр (1)	–	Дитетрагональная дипирамида
31	$4'/m'mm'$	Пинакоид (2)	$4'mm'$	–
	$(\bar{4}2m)$	Тетрагональная призма (2)	$2\,m'm'$	–
		Тетрагональная призма (m)	$2'mm'$	–
		Дитетрагональная призма (1)	m'	–
		Тетрагональная дипирамида (1)	m'	–
		Тетрагональный тетраэдр (m)	–	Тетрагональная дипирамида
		Тетрагональный скаленоэдр (1)	–	Дитетрагональная дипирамида
32	$\bar{4}'$ (2)	Моноэдр (2)	–	Пинакоид
		Пинаконд (1)	–	Тетрагональная призма
		Диэдр (1)	–	Тетрагональный тетраэдр
33	$\bar{4}'2'm$	Моноэдр ($2mm$)	–	Пинакоид
	$(2mm)$	Пинакоид (m)	–	Тетрагональная призма
		Ромбическая призма (1)	Тетрагональная призма $2'$	–
		Ромбическая призма (1)	–	Дитетрагональная призма
		Диэдр (m)	–	Тетрагональный тетраэдр
		Ромбическая пирамида (1)	–	Тетрагональная дипирамида
		" "	–	Тетрагональный скаленоэдр
34	$\bar{4}2'm'$	Пинакоид (2)	$2\,m'm'$	–
	$(\bar{4})$	Тетрагональная призма (1)	m'	–
		" "	–	Дитетрагональная призма
		" "	$2'$	–
		Тетрагональный тетраэдр (1)	m'	–
		" "	–	Тетрагональная дипирамида
		" "	–	Тетрагональный скаленоэдр
35	$\bar{4}'2\,m'$	Пинакоид (2)	$2\,m'm'$	–
	(222)	"	–	Тетрагональная призма
		Ромбическая призма (1)	Тетрагональная призма m'	–
		" "	–	Дитетрагональная призма
		" "	–	Тетрагональная дипирамида
		Ромбический тетраэдр (1)	Тетрагональный тетраэдр m'	–
		" "	–	Тетрагональный скаленоэдр

Продолжение табл. 1

1	2	3	4	5
36	$6'$ (3)	Моноэдр (3)	$6'$	–
		Тригональная призма (1)	–	Гексагональная призма
		Тригональная пирамида (1)	–	Гексагональная пирамида
37	$6/m'$ ($\bar{3}$)	Пинакоид (3)	6	–
		Гексагональная призма (1)	m'	–
		Ромбоэдр (1)	–	Гексагональная дипирамида
38	$6/m'$ (6)	Моноэдр (6)	–	Пинакоид
		Гексагональная призма (1)	m'	–
		Гексагональная пирамида (1)	–	Гексагональная дипирамида
39	$6'/m$ ($\bar{6}$)	Пинакоид (3)	$6'$	–
		Тригональная призма (m)	–	Гексагональная призма
		Тригональная дипирамида (1)	–	Гексагональная дипирамида
40	$6'mm'$ ($3m$)	Моноэдр ($3m$)	$6'mm'$	–
		Тригональная призма (m)	–	Гексагональная призма
		Гексагональная призма (1)	m'	–
		Дитригональная призма (1)	–	Дигексагональная призма
		Тригональная пирамида (m)	–	Гексагональная пирамида
		Гексагональная пирамида (1)	m'	–
		Дитригональная пирамида (1)	–	Дигексагональная пирамида
41	$6m'm'$ (6)	Моноэдр (6)	$6m'm'$	–
		Гексагональная призма (1)	m'	–
		" "	–	Дигексагональная призма
		Гексагональная пирамида (1)	m'	–
		" "	–	Дигексагональная пирамида
42	$6'22'$ (32)	Пинакоид (3)	$6'$	–
		Тригональная призма (2)	–	Гексагональная призма
		Гексагональная призма (1)	$2'$	–
		Дитригональная призма (1)	–	Дигексагональная призма
		Тригональная дипирамида (1)	–	Гексагональная дипирамида
		Ромбоэдр (1)	–	" "
		Тригональный трапецоэдр (1)	–	Гексагональный трапецоэдр
43	$62'2'$ (6)	Моноэдр (6)	–	Пинакоид
		Гексагональная призма (1)	$2'$	–
		" "	–	Дигексагональная призма
		Гексагональная пирамида (1)	–	Гексагональная дипирамида
		" "	–	Гексагональный трапецоэдр

1	2	3	4	5
44	$6'/m'mm'$	Пинакоид (3 m)	$6'mm'$	–
	($\bar{3}m$)	Гексагональная призма (m)	$2'mm'$	–
		Гексагональная призма (2)	$2m'm'$	–
		Дигексагональная призма (1)	m'	–
		Гексагональная дипирамида (1)	m'	–
		Ромбоэдр (m)	—	Гексагональная дипирамида
		Тригональный скаленоэдр (1)	—	Дигексагональная дипирамида
45	$6/mm'm'$	Пинакоид (6)	$6\,m'm'$	–
	($6/m$)	Гексагональная призма (m)	$2'mm'$	–
		" "	—	Дигексагональная призма
		Гексагональная дипирамида (1)	m'	–
		" "	—	Дигексагональная дипирамида
46	$6/m'mm$	Моноэдр ($6mm$)	—	Пинакоид
	($6mm$)	Гексагональная призма (m)	$2'mm'$	–
		Дигексагональная призма (1)	m'	–
		Гексагональная пирамида (m)	—	Гексагональная дипирамида
		Дигексагональная пирамида (1)	—	Дигексагональная дипирамида
47	$\bar{6}'/mmm'$	Пинакоид ($3m$)	$6'mm'$	–
	($\bar{6}2m$)	Тригональная призма ($2mm$)	—	Гексагональная призма
		Гексагональная призма (m)	$2'mm'$	–
		Дитригональная призма (m)	—	Дигексагональная призма
		Тригональная дипирамида (m)	—	Гексагональная дипирамида
		Гексагональная дипирамида (1)	m'	–
		Дитригональная дипирамида (1)	—	Дигексагональная дипирамида
48	$6/m'm'm'$	Пинакоид (6)	$6m'm'$	–
	(622)	Гексагональная призма (2)	$2m'm'$	–
		Дигексагональная призма (1)	m'	–
		Гексагональная дипирамида (1)	m'	–
		Гексагональный трапецоэдр (1)	—	Дигексагональная дипирамида
49	$\bar{6}$ (3)	Моноэдр (3)	—	Пинакоид
		Тригональная призма (1)	m'	–
		Тригональная пирамида (1)	—	Тригональная дипирамида
50	$\bar{6}'2'm$	Моноэдр ($3m$)	—	Пинакоид
	($3m$)	Тригональная призма (m)	$2'mm'$	–
		Гексагональная призма (1)	m'	–
		Дитригональная призма (1)	m'	–
		Тригональная пирамида (m)	—	Тригональная дипирамида
		Гексагональная пирамида (1)	—	Гексагональная дипирамида
		Дитригональная пирамида (1)	—	Дитригональная дипирамида

1	2	3	4	5
51	$\bar{6}'2m'$	Пинакоид (3)	$3m'$	–
	(32)	Тригональная призма (2)	$2m'm'$	–
		Гексагональная призма (1)	m'	–
		Дитригональная призма (1)	m'	–
		Тригональная дипирамида (1)	m'	–
		Ромбоэдр (1)	—	Гексагональная дипирамида
		Тригональный трапецоэдр (1)	—	Дитригональная дипирамида
52	$\bar{6}2'm'$	Пинакоид (3)	$3m'$	–
	($\bar{6}$)	Тригональная призма (m)	$2'mm'$	–
		" "	—	Гексагональная призма
		" "	—	Дитригональная призма
		Тригональная дипирамида (1)	m'	–
		" "	—	Гексагональная дипирамида
		" "	—	Дитригональная дипирамида
53	$m'\bar{3}'$	Куб (2)	$2m'm'$	–
	(23)	Тетраэдр (3)	—	Октаэдр
		Ромбододекаэдр (1)	m'	–
		Пентагон-додекаэдр (1)	m'	–
		Тригон-тритетраэдр (1)	—	Тетрагон-триоктаэдр
		Тетрагон-тритетраэдр (1)	—	Тригон-триоктаэдр
		Пентагон-тритетраэдр (1)	—	Дидодекаэдр
54	$\bar{4}'3m'$	Куб (2)	$2m'm'$	–
	(23)	Тетраэдр (3)	$3m'$	–
		Ромбододекаэдр (1)	m'	–
		Пентагон-додекаэдр (1)	—	Тетрагексаэдр
		Тригон-тритетраэдр (1)	m'	–
		Тетрагон-тритетраэдр (1)	m'	–
		Пентагон-тритетраэдр (1)	—	Гексатетраэдр
55	$4'32'$	Куб (2)	$4'$	–
	(23)	Тетраэдр (3)	—	Октаэдр
		Ромбододекаэдр (1)	$2'$	–
		Пентагон-додекаэдр (1)	—	Тетрагексаэдр
		Тригон-тритетраэдр (1)	—	Тетрагон-триоктаэдр
		Тетрагон-триоктаэдр (1)	—	Тригон-триоктаэдр
		Пентагон-тритетраэдр (1)	—	Пентагон-триоктаэдр
56	$m\bar{3}m'$	Куб ($2mm$)	$4'mm'$	–
	($m\bar{3}$)	Октаэдр (3)	$3m'$	–
		Ромбододекаэдр (m)	$2'mm'$	–
		Пентагон-додекаэдр (m)	—	Тетрагексаэдр

1	2	3	4	5
		Тетрагон-триоктаэдр (1)	m'	-
		Тригон-триоктаэдр (1)	m'	-
		Дидодекаэдр (1)	-	Гексаоктаэдр
57	$m'\bar{3}'m$	Куб ($2mm$)	$4'mm'$	-
	($\bar{4}3m$)	Тетраэдр ($3m$)	-	Октаэдр
		Ромбододекаэдр (m)	$2'mm'$	-
		Тетрагексаэдр (1)	m'	-
		Тригон-тритетраэдр (m)	-	Тетрагон-триоктаэдр
		Тетрагон-тритетраэдр (m)	-	Тригон-триоктаэдр
		Гексатетраэдр (1)	-	Гексаоктаэдр
58	$m'\bar{3}m'$	Куб (4)	$4m'm'$	-
	(432)	Октаэдр (3)	$3m$	-
		Ромбододекаэдр (2)	$2m'm'$	-
		Тетрагон-триоктаэдр (1)	m'	-
		Тригон-триоктаэдр (1)	m'	-
		Тетрагексаэдр (1)	m'	-
		Пентагон-триоктаэдр (1)	-	Гексаоктаэдр

для простых гранных форм. Двуцветная симметрия входящих и выходящих углов гранных двойниковых форм, которые могут образовать койлоэдры, дает только три группы: m' (вдоль ребра), $2'$ (биссектриса входящего или выходящего угла) и $2'mm'$ (m' вдоль ребра). Остальные две группы двуцветной симметрии ребер: $\perp m'$, $2m'm'$ – могут реализоваться у ребер между составными (двуцветными) гранями двойников.

Поскольку гексагональная дипирамида распадается по гемиэдрии на две гексагональные пирамиды, две тригональные дипирамиды и два ромбоэдра, можно говорить, что существует три гемиэдрических типа двуцветных гексагональных дипирамид с одноцветными гранями. Эти гемиэдрические типы порождают три сорта койлоэдров (рис.2, г). Аналогично три типа койлоэдров дает ромбическая дипирамида: первый – два ромбических тетраэдра (все три реберные формы при входящих углах), второй – две ромбические пирамиды (ребра только одной формы при входящих углах) и третий – две ромбические призмы (ребра двух реберных форм находятся во входящих углах), что показано в табл.I соответственно № I2, I0, II.

Из табл.I легко найти все типы койлоэдров для любой двуцветной формы. Следует только иметь в виду, что по симметрии число койлоэдров для данной формы может быть значительным. Так, гексагональных двуцветных дипирамид, образованных из гексагональных пирамид, по симметрии будет пять, поскольку они могут встретиться в пяти группах симметрии $\bar{3}'2'm$ ($3m$), $6/m'm'm$($6mm$), $622'$ (6), $6/m'$ (6), $\bar{3}'m$ ($3m$). Если же койлоэдры составлены из тригональных дипирамид (рис.2, г), то по симметрии их тоже будет пять: $\bar{6}2'm'$ ($\bar{6}$),

$6'/mmm'$ ($\bar{6}2m$), $6'22'$ (32), $6'/m$ ($\bar{6}$), $\bar{3}'m'$ (32). Койлоэдры из двух ромбоэдров также по симметрии образуют пять разновидностей: $\bar{6}'2m$ (32), $6'/m'mm'$ ($\bar{3}m$), $6'22'$ (32), $6'/m'$ ($\bar{3}$), $\bar{3}m'$ ($\bar{3}$). Гексагональные дипирамиды с двуцветными гранями дают четыре разновидности: $6'/m'mm'(\bar{3}m)$, $6/mm'm'(6/m)$, $6'/mmm'$ ($\bar{6}2m$) и $6/m'm'm'$ (622). Грани этих разновидностей имеют симметрию m' (рис.2). Всего гексагональных дипирамид I9.

Наибольшее геометрическое разнообразие койлоэдров дает тригексагональная дипирамида, так как она может быть составлена из двух тригексагональных пирамид, из гексагональных дипирамид, из гексагональных трапецоэдров, из тригональных скаленоэдров и из дитригональных дипирамид. Пять разновидностей койлоэдров дает также дитетрагональная дипирамида (табл.2).

Таблица 2

Разновидности простых форм двойников

Двуцветная форма	Число разновидностей с гранями		Гемиэдрические составляющие форм с входящими углами для разновидностей с одноцветными гранями	
	двуцветными	одноцветными	Число	Название
1	2	3	4	5
Моноэдр	11	–	–	–
Пинакоид	31	21	1	Моноэдры
Диэдр	2	3	1	Моноэдры
Ромбическая призма	3	9	2	Пинакоиды, диэдры
Ромбический тетраэдр	–	1	1	Диэдры
Ромбическая пирамида	–	2	1	"
Ромбическая дипирамида	–	3	3	Ромбические тетраэдры, ромбические призмы, ромбические пирамиды
Тригональная призма	6	–	–	–
Тригональная пирамида	1	–	–	–
Тригональная дипирамида	2	3	1	Тригональные пирамиды
Тригональный трапецоэдр	–	1	1	" "
Тригональный скаленоэдр	–	3	3	Ромбоэдры, дитригональные пирамиды, тригональные трапецоэдры
Ромбоэдр	2	3	1	Тригональные пирамиды
Дитригональная призма	2	3	1	Тригональные призмы
Дитригональная пирамида	–	1	1	Тригональные пирамиды
Дитригональная дипирамида	–	3	3	Тригональные трапецоэдры, тригональные дипирамиды, дитригональные пирамиды
Тетрагональная призма	16	8	1	Пинакоиды
Тетрагональная пирамида	2	2	1	Диэдры
Тетрагональная дипирамида	4	12	3	Тетрагональные тетраэдры, тетрагональные пирамиды, ромбические призмы

1	2	3	4	5
Тетрагональный трапецоэдр	–	2	2	Ромбические тетраэдры, тетрагональные пирамиды
Тетрагональный тетраэдр	2	2	1	Диэдры
Тетрагональный скаленоэдр	–	3	3	Тетрагональные тетраэдры, ромбические пирамиды, ромбические тетраэдры
Дитетрагональная призма	3	9	2	Тетрагональные призмы, ромбические призмы
Дитетрагональная пирамида	–	2	2	Тетрагональные пирамиды, ромбические пирамиды
Дитетрагональная дипирамида	–	5	5	Тетрагональные трапецоэдры, тетрагональные дипирамиды, дитетрагональные пирамиды, тетрагональные скаленоэдры, ромбические дипирамиды
Гексагональная призма	18	11	1	Тригональные призмы
Гексагональная пирамида	2	3	1	Тригональные пирамиды
Гексагональная дипирамида	4	15	3	Ромбоэдры, гексагональные пирамиды, тригональные дипирамиды
Гексагональный трапецоэдр	–	2	2	Тригональные трапецоэдры, гексагональные пирамиды
Дигексагональная призма	3	9	2	Гексагональные призмы, дитригональные призмы
Дигексагональная пирамида	–	2	2	Гексагональные пирамиды, дитригональные пирамиды
Дигексагональная дипирамида	–	5	5	Гексагональные трапецоэдры, дигексагональные пирамиды, дитригональные дипирамиды, гексагональные дипирамиды
Куб	6	–	–	–
Кубический тетраэдр	1	–	–	–
Тригон-тритетраэдр	1	–	–	–
Тетрагон-тритетраэдр	1	–	–	–
Гексатетраэдр	–	1	1	Пентагон-тритетраэдры
Тетрагексаэдр	2	3	1	Пентагон-додекаэдры
Октаэдр	2	3	1	Тетраэдры
Тригон-триоктаэдр	2	3	1	Тетрагон-тритетраэдры
Тетрагон-триоктаэдр	2	3	1	Тригон-тритетраэдры
Пентагон-триоктаэдр	–	1	1	Пентагон-тритетраэдры
Гексаоктаэдр	–	3	3	Пентагон-триоктаэдры, гексатетраэдры, дидодекаэдры
Ромбододекаэдр	6	–	–	–
Пентагон-додекаэдр	1	–	–	–
Дидодекаэдр	–	1	1	Пентагон-тритетраэдры
Итого	138	166	66	

У двойников кубических двуцветных групп симметрии ряд двойниковых форм не образует входящих углов: куб, тетраэдр, ромбододекаэдр, тригон-тритетраэдр, тетрагон-тритетраэдр и пентагон-додекаэдр. Перечисленные формы не могут быть разложены на гемиэдрические с сохранением кубической симметрии. Они дают только составные грани в двойниках. Двойниковый пентагон-тритетраэдр существовать не может, так как для него нет соответственной двуцветной группы. Остальные формы кубических кристаллов могут давать входящие углы в двойниках прорастания кубической симметрии.

Сказанное, разумеется, не распространяется на все двойники кубических кристаллов [I]. Так, в шпинелевом двойнике прорастания многие простые формы компонентов могут образовывать входящие углы, в том числе куб и ромбододекаэдр. Возможные входящие углы в таких случаях находят с помощью той же табл.I. Поскольку шпинелевый двойник прорастания имеет симметрию $6'/m'mm'$ ($\bar{3}m$), формы с входящими углами будут те же, например, что и для кальцита при двойниковании по грани (OOOI) (см. табл.I, № 44). Здесь необходимо только учитывать так называемые ложные формы, на которые распадутся простые формы кубического компонента, если у него сохранится лишь подгруппа $\bar{3}m$. Куб здесь станет "ромбоэдром", ромбододекаэдр распадется на "гексагональную призму" и "ромбоэдр", октаэдр – на "ромбоэдр" и "пинакоид" и т.д. Перечень таких ложных форм приведен в работе И.И. и Г.И.Шафрановских[x]. Аналогичным образом следует поступать во всех случаях, когда группа симметрии двойника является надгруппой нетривиальной подгруппы класса симметрии компонента [I].

В двойниках срастания положение с входящими углами несколько меняется. Напомним, что группа симметрии двойника срастания является надгруппой индекса 2 группы симметрии плоскости срастания (границы срастания) [I] и должна быть подгруппой группы симметрии того же двойника при прорастании. Поясним сказанное на шпинелевом двойнике при срастании по грани (III) или кальцита при срастании по пинакоиду (рис.3). Двуцветная группа такого двойника $\bar{6}'2'm$ (при прорастании $6'/m'mm'$) является надгруппой индекса 2 группы симметрии грани октаэдра ($3m$). Если в двойнике прорастания "ромбоэдры" из граней октаэдра компонентов давали форму с входящими углами в виде гексагональной дипирамиды, то в двойнике срастания эти грани октаэдра образуют две тригональные дипирамиды

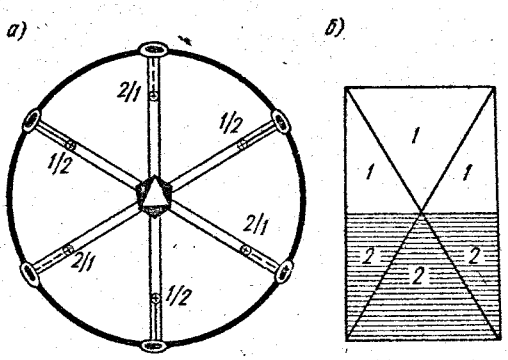


Рис.3. Двойник срастания двух октаэдров по шпинелевому закону: а – проекция двуцветной группы симметрии; б – колонка из двух октаэдров в двойниковой ориентировке
В числителе дроби – грань компонента, которая проектируется в верхней полусфере, в знаменателе – симметричная ей грань другого компонента, проектируемая в нижней полусфере

[x] См. настоящий сборник: И.И.Шафрановский, Г.И.Шафрановский. „Таблицы ложных простых форм искаженных кристаллов".

11635

(см. рис.3). Причем одна дает выходящие углы (на проекции обозначена I/2), а другая – входящие углы (2/I).

По проекции легко определить, какие углы будут входящими и какие выходящими. Если на проекции грани верхнего индивида проектируются в верхней части полусферы, а симметричные им грани нижнего индивида – в нижней полусфере, то углы между этими гранями будут выходящими. Если же наоборот – грани нижнего индивида проектируются в верхней полусфере (нами помечено цифрой 2 в числителе), а симметричные им грани в нижней полусфере, то углы между ними будут входящими. При этом принято, что граница срастания совпадает с плоскостью проекции.

Результаты данной работы сведены в две таблицы. Табл.I представляет собой несколько измененный вариант 304 простых двуцветных форм, выведенных В.А.Мокиевским ранее [3]. Из них I38 двойниковых форм без входящих углов, но с двуцветными гранями и I66 двойниковых форм с одноцветными гранями, которые могут давать входящие углы при полном развитии составляющих их гемиэдрических форм компонентов. Разумеется, пинакоид с «входящими углами" нужно понимать условно.

В тетрагональных двойниковых группах симметрии вскрылись некоторые особенности, на которые необходимо обратить внимание. Как известно, эти группы в ряде случаев содержат классические ромбические подгруппы. Поэтому некоторые тетрагональные формы без входящих углов могут быть составлены из ромбических форм (призм, пирамид, тетраэдров и дипирамид), которые должны иметь соответственные гранные углы тетрагональных форм. Например, ромбические призмы, образующие двуцветную тетрагональную призму, должны иметь двугранные углы, равные 90^0. Вероятность этого чрезвычайно мала. Но следует иметь в виду, что перечисленные формы ромбических кристаллов имеют переменные двугранные углы, поэтому при некоторых условиях, например при определенной температуре, эти углы могут случайно отвечать углам соответствующих тетрагональных форм и форма с входящими углами может превратиться в форму без входящих углов. Эти случаи отмечены в гр.4 табл.I, где указано название тетрагональной формы. Постоянство величин двугранных входящих углов может быть только у двойников кубических кристаллов.

В табл.2 подсчитаны разновидности двуцветных форм с двуцветными (гр.2) и одноцветными (гр.3) гранями и гемиэдрические разновидности форм с входящими углами (гр.4 и 5), которых оказалось 66. В табл.2 перечислены только те гемиэдрические разновидности, которые могут дать входящие углы в двойниках, группа симметрии которых является надгруппой индекса 2 класса симметрии компонента, а не его подгрупп. В других случаях гемиэдрические, тетраэдрические и другие разновидности, как было сказано выше, определяются по таблицам И.И. и Г.И.Шафрановских. Так, например, две гемиэдрические ромбические призмы, на которые распадается октаэдр, могут дать входящие углы в двойнике с симметрией $4/mmm'$ (mmm) из компонентов с симметрией $m\bar{3}m$. Следует обратить внимание на то, что среди гемиэдрических разновидностей одной формы (гр.5 табл.2) одна является как бы полнореберной, т.е. все ребра данной формы реализуются в виде входящих углов, а остальные – неполнореберными. Полнореберная разновидность в табл.2 стоит перед неполнореберными.

Особый случай представляет гемиэдрическая разновидность ромбической пирамиды с входящими углами, состоящая из диэдров. Поскольку симметрия двуцветной ромбической пирамиды может отвечать двум группам ($2m'm'$ и $2'mm'$), существует две ориентировки диэдров, составляющих пирамиду. Одна из них при симметрии $2m'm'$ будет полнореберной, а вторая (при симметрии $2'mm'$) – неполнореберной.

Литература

1. Мокиевский В.А. Группы симметрии двойников. В кн.: Проблемы кристаллохимии минералов и эндогенного минералообразования. Л., „Наука", 1967.

2. Мокиевский В.А. Внешняя и внутренняя морфология плоскогранных кристаллов на стереографической проекции. В кн.: Идеи Е.С.Федорова в современной кристаллографии и минералогии. Л., „Наука", 1970.

3. Мокиевский В.А. Морфология кристаллов. Автореф. на соиск. учен. степени докт. геол.-мин. наук. Л., 1970. (Лен. горный ин-т им. Г.В.Плеханова).

4. Федоров Е.С. Начала учения о фигурах. Л., Изд-во АН СССР, 1953.

5. Шафрановский И.И. Кристалломорфология двойников. Зап. ВМО, ч. 90, вып. 1, 1961.

6. Шафрановский И.И., Письменный В.А. Обобщенные формы двойниковых образований. „Кристаллография", 1961, т. 6, вып. 1.

7. Шубников А.В. Симметрия и антисимметрия конечных фигур. М., Изд-во АН СССР, 1951.

8. Wittke O., Carrido J. Bull. Soc. franc., Miner. Crist. (1959), LXXXII, pp. 223-230.