

ПОЛЕ ПРИТЯЖЕНИЯ МНОГОГРАННИКОВ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТИ

Г.Г.КРАВЦОВ

Теоретическое поле объектов неправильной формы приходится постоянно вычислять в процессе интерпретации гравитационных аномалий способом подбора. Есть достаточно оснований при подборе в качестве универсального элемента плотностной модели геологической среды использовать тело, ограниченное поверхностями первого порядка. Для многогранника с переменной плотностью, представленной как функция координат многочленом, составляющие поля притяжения описываются элементарными функциями. Аналитический переход к общему решению сводится, по существу, к интегрированию пробных выражений с радикалом, причем центральное место занимает вычисление интеграла:

$$I = \int \frac{(Mx + N)dx}{(\bar{p}x^2 + \bar{q}x + \bar{r})\sqrt{\bar{p}_1x^2 + \bar{q}_1x + \bar{r}_1}} \quad \left(\bar{p} > 0, \bar{p}_1 > 0, \frac{\bar{q}}{\bar{p}} \neq \frac{\bar{q}_1}{\bar{p}_1}, 4\bar{p}\bar{r} - \bar{q}^2 > 0 \right),$$

решение которого отсутствует в наиболее полном справочнике неопределенных интегралов [1]. Значительно упростило исследование проблемы в целом найденное для этого интеграла табличное значение

$$I = \frac{M\mu + NH}{2\sqrt{RR_\mu}} \ln \frac{\sqrt{R_\mu X} - (\mu - Hx)\sqrt{R}}{\sqrt{R_\mu X} + (\mu - Hx)\sqrt{R}} + \frac{M\nu + NH}{\sqrt{RR_\nu}} \operatorname{arctg} \frac{(Hx - \nu)\sqrt{R}}{\sqrt{R_\nu X}},$$

где

$$2H = \bar{p}_1\bar{q} - \bar{p}\bar{q}_1; \quad R = \sqrt{L^2 - 2HP}; \quad R_\mu = \bar{p}\mu^2 + \bar{q}H\mu + \bar{r}H^2;$$

$$L = \bar{p}\bar{r}_1 - \bar{p}_1\bar{r}; \quad 2\mu = L + R; \quad R_\nu = \bar{p}\nu^2 + \bar{q}H\nu + \bar{r}H^2;$$

$$P = \bar{q}_1\bar{r} - \bar{q}\bar{r}_1; \quad 2\nu = L - R; \quad X = \bar{p}_1x^2 + \bar{q}_1x + \bar{r}_1.$$

Остановимся на результатах решения прямой задачи в случае косоусеченной призмы с линейно меняющейся плотностью $\rho(x, y, z) = \sigma_3x + \sigma_2y + \sigma_1z + \sigma$. Полученное решение легко обобщается на случай произвольного многогранника.

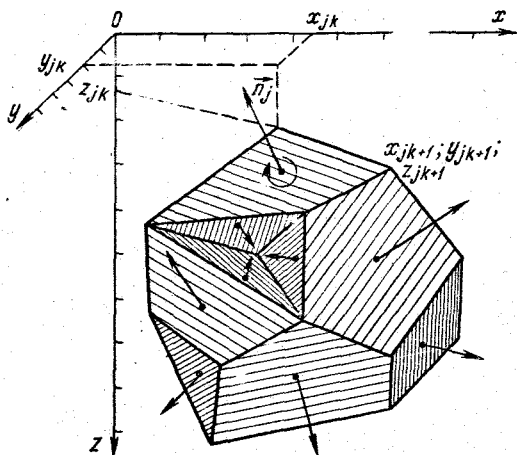


Рис.1. Произвольный многогранник

Геометрические особенности неправильного n -гранника характеризуются коэффициентами уравнения $A_j x + B_j y + C_j z + D_j = 0$ семейства плоскостей $j = \overline{1, n}$, высекающих в пространстве его объем (рис.1). Коэффициенты вычисляются по заданным координатам не лежащих на прямой линии трех точек плоскости. В качестве таких точек можно, например, использовать вершины многогранника, относящиеся к грани с индексом j .

У m -гранной призмы с образующей, параллельной, в частности, оси y (рис.2), в уравнении плоскости ее боковых граней пропадает один член с коэффициентом $B_j = 0$. В результате остальные коэффициенты выражаются явным образом достаточно просто через координаты угловых точек проекции призмы на координатную плоскость xOz (рис.2,б):

$$a_k x + c_k z + d_k = 0 \quad (k = \overline{1, m}),$$

где

$$a_k = z_k - z_{k+1}; \quad c_k = x_{k+1} - x_k; \quad d_k = x_k z_{k+1} - x_{k+1} z_k;$$

$$x_{m+1} = x_1; \quad z_{m+1} = z_1.$$

Основания призмы (рис.2,а) по определению не могут быть параллельными оси y , что позволяет исключить для них в общем уравнении плоскости избыточный параметр, положив $B_j = 1$:

$$y = M_q x + N_q z + a_q \quad (q = \overline{1, 2}), \quad (I)$$

где

$$M_q = -A_j/B_j; \quad N_q = -C_j/B_j; \quad a_q = -D_j/B_j.$$

Все итоговые формулы отнесены к точке $(0, 0, 0)$, расположенной в начале системы координат xyz . Если параметры многогранника и точка наблюдения заданы в иной системе координат $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$, оси которой параллельны соответственно осям x , y и z , то некоторые параметры при совмещении начала координат с точкой наблюдения (α, ρ, γ) преобразуются по формулам

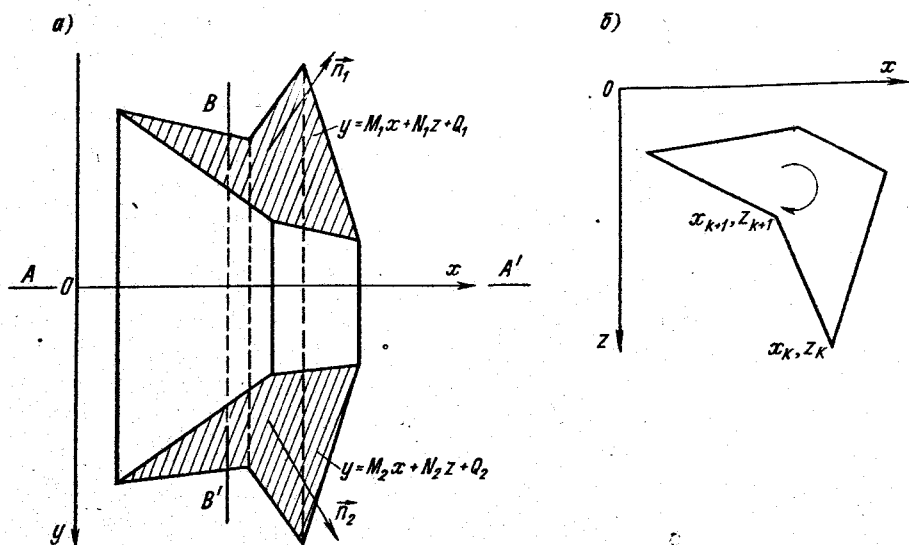


Рис.2. Проекция многоугольной усеченной призмы на координатные плоскости xOy и xOz

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \delta_3\alpha + \delta_2\beta + \delta_1\gamma + \tilde{\delta} ; \\ x &= \tilde{x} - \alpha ; \quad D_j = A_j\alpha + B_j\beta + C_j\gamma + \tilde{D}_j \quad (j = \overline{1, n}) ; \\ y &= \tilde{y} - \beta ; \quad d_k = a_k\alpha + c_k\gamma + \tilde{d}_k \quad (k = \overline{1, m}) ; \\ z &= \tilde{z} - \gamma ; \quad a_q = M_q\alpha + N_q\gamma + \tilde{a}_q - \beta \quad (q = \overline{1, 2}) . \end{aligned} \right\} (2)$$

Остальные параметры многогранника сохраняют свои значения.

Интегрированием по объему усеченной призмы общих интегральных соотношений Ньютоновского потенциала и его первых частных производных получены выражения, удобные для программирования на ЭВМ:

$$W = \frac{1}{6} f \sum_{k=1}^m \left[(\Delta_1 a_q - \theta_1 d_k) J + \sigma_2 d_k \hat{J} - \left(\frac{g + \Delta_2}{a} c + \frac{w - \theta_2}{\Delta} \theta \right) J_1 - \frac{g}{a} a_q J_2 + \frac{d_k}{\Delta} \left(\delta_3 \hat{J}_3 + \delta_1 \hat{J}_3 + 3\delta_2 \hat{J}_3 + 2 \frac{d_k^2}{\Delta} \xi_1 J_3 - w J_4 \right) \right] \Big|_{q=1}^{q=2} ; \quad (3)$$

$$W_x = \frac{1}{2} f \sum_{k=1}^m \left[(\Delta_1 M_q - \theta_1 a_k - \theta_3) J + \left(\frac{g_1 c + u_1 \Delta_2}{a} - \frac{\theta w_1 + \theta_2 b_k c}{\Delta} \right) J_1 + \frac{g_1}{a} a_q J_2 + \frac{w_2 J_3 - w_1 J_4}{\Delta} d_k \right] \Big|_{q=1}^{q=2} ; \quad (4)$$

$$W_y = \frac{1}{2} f \sum_{k=1}^m \left[-\Delta_1 J + \left(\frac{g_2 c - u_2 \Delta_2}{a} - \theta \frac{d_k}{\Delta} \delta_2 + \theta_2 \right) J_1 + \frac{g_2}{a} a_q J_2 + \delta_2 \frac{J_3 - d_k J_4}{\Delta} d_k \right] \Big|_{q=1}^{q=2} ; \quad (5)$$

$$W_2 = \frac{1}{2} \rho \sum_{k=1}^m \left[(\Delta_1 N_q - \theta_1 \epsilon - \theta_4) J + \left(\frac{g_3 c - u_3 \Delta_2}{a} + \frac{\theta w_2 + \theta_2 a_k b_k}{\Delta} \right) J_1 + \right. \\ \left. + \frac{g_3}{a} a_q J_2 + \frac{w_1 J_3 + w_2 J_4}{\Delta} d_k \right] \Big|_{q=1}^{q=2} \quad (6)$$

В дополнение к ранее принятым в записи этих выражений использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} l_1 &= M_q x_k + N_q z_k + a_q; & \tau &= c_k^2 - a_k^2; & e_1 &= x_k l_2 - x_{k+1} l_1; \\ l_2 &= M_q x_{k+1} + N_q z_{k+1} + a_q; & \varepsilon &= a_k c_k; & e_2 &= z_{k+1} l_1 - z_k l_2; \\ a &= M_q^2 + N_q^2 + 1; & r_1 &= x_k^2 + z_k^2; & \theta &= c_k e_1 + a_k e_2; \\ d &= M_q \sigma_3 - \sigma_2 + N_q \sigma_1; & r_2 &= x_{k+1}^2 + z_{k+1}^2; & b &= e_1^2 + d_k^2 + e_2^2; \\ \xi &= a_k \sigma_3 + c_k \sigma_1; & R_1 &= \sqrt{r_1 + l_1^2}; & c &= M_q e_2 + N_q e_1 + d_k; \\ \xi_1 &= c_k \sigma_3 - a_k \sigma_1; & R_2 &= \sqrt{r_2 + l_2^2}; & q &= (2a_q d/a - 3\sigma) a_q; \\ \Delta &= a_k^2 + c_k^2; & b_k &= l_2 - l_1; & u &= c_k \sigma_3 + b_k \sigma_2 - a_k \sigma_1; \\ u_1 &= N_q b_k - a_k; & w &= d_k (3\sigma - 2d_k \xi / \Delta); \\ u_2 &= M_q a_k + N_q c_k; & w_1 &= d_k (\tau \sigma_3 - 2\varepsilon \sigma_1) / \Delta + 2a_k \sigma; \\ u_3 &= M_q b_k + c_k; & w_2 &= d_k (\tau \sigma_1 + 2\varepsilon \sigma_3) / \Delta - 2c_k \sigma; \\ \varphi_1 &= (e_2 z_k - e_1 x_k) / (d_k R_1); & \Phi_1 &= (c z_k + e_1 a_q) / (a_k a_q R_1); \\ \varphi_2 &= (e_2 z_{k+1} - e_1 x_{k+1}) / (d_k R_2); & \Phi_2 &= (c z_{k+1} + e_1 a_q) / (a_k a_q R_2); \\ v &= \Delta + b_k^2; & g_1 &= a_q [\sigma_3 (a - 2M_q^2) + 2(\sigma_2 - N_q \sigma_1) M_q] / a + 2M_q \sigma; \\ h_1 &= l_1 + R_1; & g_2 &= a_q [\sigma_2 (a - 2) + 2(M_q \sigma_3 + N_q \sigma_1)] / a - 2\sigma; \\ h_2 &= l_2 + R_2; & g_3 &= a_q [\sigma_1 (a - 2N_q^2) + 2(\sigma_2 - M_q \sigma_3) N_q] / a + 2N_q \sigma; \\ \Delta_1 &= cu/a; & \lambda_1 &= c_k x_k - a_k z_k; & v_1 &= \lambda_1 + b_k l_1; \\ \Delta_2 &= bd/v; & \lambda_2 &= c_k x_{k+1} - a_k z_{k+1}; & v_2 &= \lambda_2 + b_k l_2; \\ \theta_1 &= \theta \xi_1 / \Delta; & \theta_3 &= (c_k d_k + b_k e_2) \sigma_2; & J &= (R_2 - R_1) / v; \\ \theta_2 &= b \xi / v; & \theta_4 &= (b_k e_1 - a_k d_k) \sigma_2; & \hat{J} &= (v_2 R_2 - v_1 R_1) / v; \\ J_1 &:= \text{if } b = 0 \text{ then } 0 \text{ else } \frac{1}{\sqrt{v}} \ln \left| \frac{v_2 + R_2 \sqrt{v}}{v_1 + R_1 \sqrt{v}} \right|; \end{aligned}$$

$$J_2 := \text{if } \alpha_k = 0 \vee a_q = 0 \text{ then } 0 \text{ else } \arctg(\varphi_2) - \arctg(\varphi_1) ;$$

$$J_3 := \text{if } d_k = 0 \text{ then } 0 \text{ else } \ln|h_2/h_1| ;$$

$$\hat{J}_3 := \text{if } d_k = 0 \text{ then } 0 \text{ else } (\lambda_2 x_{k+1} + d_k z_{k+1}) \ln|h_2| - (\lambda_1 x_k + d_k z_k) \ln|h_1| ;$$

$$J_3^x := \text{if } d_k = 0 \text{ then } 0 \text{ else } (\lambda_2 z_{k+1} - d_k x_{k+1}) \ln|h_2| - (\lambda_1 z_k - d_k x_k) \ln|h_1| ;$$

$$J_3^0 := \text{if } d_k = 0 \text{ then } 0 \text{ else } \lambda_2 \ln|h_2| - \lambda_1 \ln|h_1| ;$$

$$J_4 := \text{if } d_k = 0 \text{ then } 0 \text{ else } \arctg(\varphi_2) - \arctg(\varphi_1) .$$

Буквой f обозначена постоянная тяготения.

Формулы (3)–(6) позволяют вычислять соответствующие составляющие поля притяжения вне, внутри и на поверхности усеченной призмы, что согласуется с характеристическими свойствами ньютоновского потенциала [4]. Последующее дифференцирование выражений (4)–(6) по координатам точки наблюдения позволило прийти к общему решению для производных потенциала высшего порядка. Эта операция выполнялась применительно к достаточно малой окрестности притягиваемой точки, в пределах которой функции J_1 , J_2 , J_3 , J_4 сохраняют единый аналитический облик. Такие точки лежат в стороне от плоскостей, высекающих объем призмы. Особый случай принадлежности точки наблюдения той или иной плоскости дополнительно исследовался предельным переходом при двустороннем подходе к плоскости. Связь между параметрами призмы и переменными дифференцирования α , ρ и γ устанавливалась равенствами (2).

Ограничимся приведением результатов дифференцирования для случая постоянной плотности ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$), который представляет первостепенный интерес при вычислении на основе соотношения Пуассона магнитного поля однородно намагниченных тел сложной формы:

$$W_{xx} = f\sigma \sum_{k=1}^m \left(-t_1 \tilde{J}_1 + \frac{M_q^2}{a} J_2 - \frac{a_k}{\Delta} P_1 \right) \Big|_{q=1}^{q=2} ; \quad W_{x\rho} = f\sigma \sum_{k=1}^m \frac{u_1 \tilde{J}_1 - M_q J_2}{a} \Big|_{q=1}^{q=2} ;$$

$$W_{x\gamma} = f\sigma \sum_{k=1}^m \left(t_1 \tilde{J}_1 + \frac{M_q N_q}{a} J_2 - \frac{a_k}{\Delta} P_2 \right) \Big|_{q=1}^{q=2} ; \quad W_{y\rho} = f\sigma \sum_{k=1}^m \frac{-u_2 \tilde{J}_1 + J_2}{a} \Big|_{q=1}^{q=2} ;$$

$$W_{z\gamma} = f\sigma \sum_{k=1}^m \left(t_2 \tilde{J}_1 + \frac{N_q^2}{a} J_2 - \frac{c_k}{\Delta} P_2 \right) \Big|_{q=1}^{q=2} ; \quad W_{y\gamma} = f\sigma \sum_{k=1}^m \frac{-u_3 \tilde{J}_1 - N_q J_2}{a} \Big|_{q=1}^{q=2} ;$$

$$W_{x\alpha\alpha} = f\sigma \sum_{k=1}^m \left(e_2 t_3 J_5 - t_1 F - a_k J_9 \right) \Big|_{q=1}^{q=2} ; \quad W_{x\rho\rho} = f\sigma \sum_{k=1}^m \frac{e_2 J_5 - u_2 F}{a} \Big|_{q=1}^{q=2} ;$$

$$\begin{aligned}
 W_{x\alpha\gamma} &= f\sigma \sum_{k=1}^m (e_1 t_3 J_5 + t_1 F_1 - c_k J_9) \Big|_{q=1}^{q=2} ; & W_{x\beta\gamma} &= f\sigma \sum_{k=1}^m \frac{-e_1 M_q J_5 - u_1 F_1}{a} \Big|_{q=1}^{q=2} ; \\
 W_{x\gamma\gamma} &= f\sigma \sum_{k=1}^m (e_2 t_4 J_5 + t_2 F + a_k J_9) \Big|_{q=1}^{q=2} ; & W_{y\beta\beta} &= f\sigma \sum_{k=1}^m \frac{-d_k J_5 + u_2 F_2}{a} \Big|_{q=1}^{q=2} ; \\
 W_{z\gamma\gamma} &= f\sigma \sum_{k=1}^m (e_1 t_4 J_5 - t_2 F_1 + c_k J_9) \Big|_{q=1}^{q=2} ; & W_{y\beta\gamma} &= f\sigma \sum_{k=1}^m \frac{e_1 J_5 + u_2 F_1}{a} \Big|_{q=1}^{q=2} ; \\
 W_{x\alpha\beta} &= f\sigma \sum_{k=1}^m \frac{-e_2 M_q J_5 + u_1 F}{a} \Big|_{q=1}^{q=2} ; & W_{y\gamma\gamma} &= f\sigma \sum_{k=1}^m \frac{-e_1 N_q J_5 + u_3 F_1}{a} \Big|_{q=1}^{q=2} ,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \delta_1 &= (c_k x_k + a_k z_k) l_1 / \Delta ; & \delta_2 &= (c_k x_{k+1} + a_k z_{k+1}) l_2 / \Delta ; \\
 t &= b_k c_k^2 / \Delta - u_1 N_q / a ; & t_1 &= u_1 M_q / a + \varepsilon b_k / \Delta ; \\
 t_2 &= u_3 N_q / a - \varepsilon b_k / \Delta ; & t_3 &= M_q^2 / a - a_k^2 / \Delta ; & t_4 &= N_q^2 / a - c_k^2 / \Delta ;
 \end{aligned}$$

$$\tilde{J}_1 := \text{if } b \neq 0 \text{ then } J_1 \text{ else if } R_1 R_2 = 0 \text{ then } 0 \text{ else } \left| \ln(R_2 / R_1) \right| \sqrt{v} ;$$

$$\tilde{J}_3 := \text{if } b = 0 \text{ then } (\text{if } z_k z_{k+1} = 0 \text{ then } 0 \text{ else } \ln|z_{k+1} / z_k|) \text{ else}$$

$$\text{if } r_1 = 0 \vee r_2 = 0 \text{ then } \text{sign}(a_q) \ln \left| \frac{l_2 \text{sign}(a_q) + R_2}{l_1 \text{sign}(a_q) + R_1} \right| \text{ else } \ln|h_2 / h_1| ;$$

$$J_5 := \text{if } b = 0 \text{ then } 0 \text{ else } (v_2 / R_2 - v_1 / R_1) / b ;$$

$$J_6 := \text{if } b = 0 \text{ then } 0 \text{ else } (x_{k+1} / R_2 - x_k / R_1) / b ;$$

$$J_7 := \text{if } b = 0 \text{ then } 0 \text{ else } (l_2 / R_2 - l_1 / R_1) / b ;$$

$$J_8 := \text{if } b = 0 \text{ then } 0 \text{ else } (z_{k+1} / R_2 - z_k / R_1) / b ;$$

$$J_9 := (\text{if } r_2 = 0 \text{ then } 0 \text{ else } \delta_2 / (r_2 R_2)) - (\text{if } r_1 = 0 \text{ then } 0 \text{ else } \delta_1 / (r_1 R_1)) ;$$

$$P_1 = c_k \tilde{J}_3 + a_k J_4 ; \quad P_2 = c_k \tilde{J}_4 - a_k \tilde{J}_3 ;$$

$$F = e_1 J_7 + d_k J_8 ; \quad F_1 = d_k J_6 + e_2 J_7 ; \quad F_2 = e_1 J_6 + e_2 J_8 .$$

В формулах вторых производных усложнились правила вычисления функций J_1 и J_3 , что и привело к замене их более общими выражениями $\tilde{J}_1$ и $\tilde{J}_3$. Этим функциям в положении притягиваемой точки на ребрах призмы свойственна как следствие расходящихся несобственных интегралов логарифмическая особенность. В формулах потенциала и его первых производных ее проявление нейтрализуется обращением в нуль коэффициентов, стоящих перед функциями

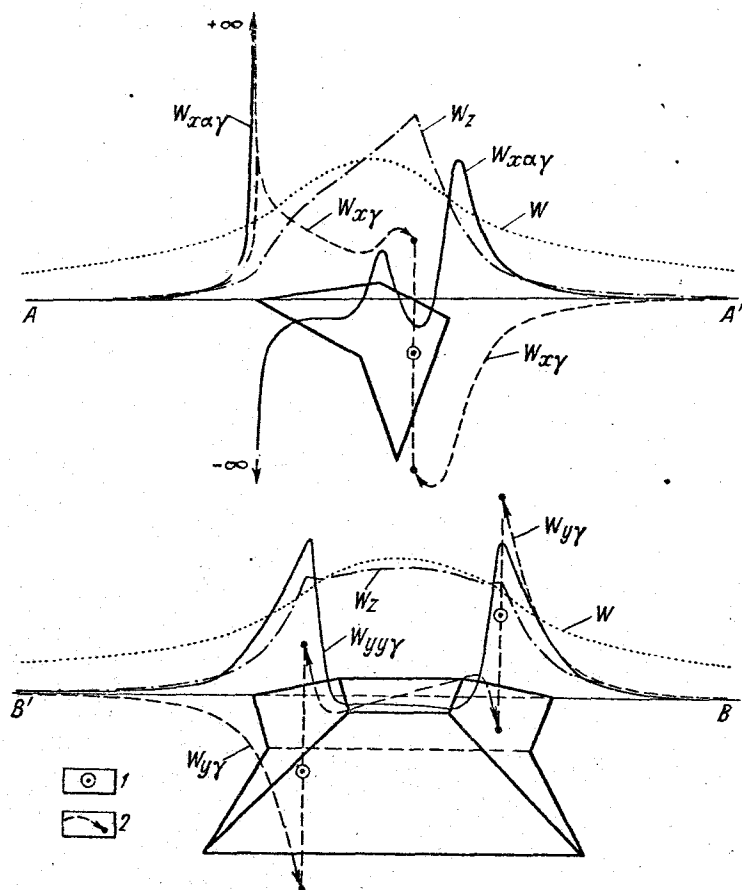


Рис.3. Кривые некоторых составляющих поля притяжения на линиях AA' и BB' (см. рис.2, а), пересекающих грани и ребро призмы

- 1 - значения вторых производных на гранях призмы;
2 - предельные значения вторых производных при внутреннем и внешнем подходе к граням призмы

случае постоянной плотности разрыва непрерывности (рис.3):

На основе выведенных формул можно найти выражения составляющих поля притяжения произвольного многогранника (см. рис.1). Упростим рассуждения. Проведем их для многогранника, не имеющего граней, параллельных оси y . Его поверхность всегда можно аппроксимировать основаниями нескольких кососеченных призм, ориентированных по оси y и опирающихся, при необходимости, внутри многогранника на дополнительно рассекающие его плоскости. Чтобы придать всему процессу вычислений единообразие, обход вершин в основаниях призмы будем ориентировать по внешней нормали $\vec{n}_q$ (см. рис.2, а). Примем за основу обход нормали по часовой стрелке, что потребует в формулах призмы смену знака на противоположный на пределе интегрирования $q' = 1$.

J_1 и J_3 . У третьих производных, и то лишь при постоянной плотности призмы, логарифмическая особенность полностью сменяется особенностью алгебраической. Таким образом, вторые и третьи производные не определены только на ребрах призмы, т.е. вычисленные по приведенным формулам для этих точек значения лишены какого-либо смысла. Из теории потенциала также известно, что вторые производные при пересечении поверхности тела претерпевают скачок. Исследование предельных значений третьих производных при внутреннем и внешнем подходе к гладкой поверхности призмы показало, что эти производные в

При вычислении эффекта системы призм, заполняющих многогранник, суммирование сумм по q , приходящихся на вспомогательные основания призм внутри многогранника, дает нуль. Следовательно, для n -гранника вычисления сведутся к последовательному обходу оснований призм только на его оболочке и последующему суммированию получаемых для них сумм. К такому же выводу приходим и в случае многогранника, осложненного внутренними полосами (многосвязная область интегрирования).

Преобразуем найденные для усеченной призмы формулы потенциала и его частных производных путем подстановки в них вместо параметров M_q , N_q и Q_q их значений по уравнению (I). Сменив, кроме того, символ пределов интегрирования $\left|_{q=1}^{q=2}\right.$ на символ обхода граней $\sum_{j=1}^n$, получаем решение для общего случая многогранника:

$$W = \frac{1}{6} \rho \sum_{j=1}^n \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{m_j} \left\{ \bar{c} [\bar{u} D_j \bar{J} - (\bar{b} \bar{d} / \bar{v} + \bar{g}) \bar{J}_1] + \bar{g} D_j \bar{J}_2 \right\};$$

$$W_x = \frac{1}{2} \rho \sum_{j=1}^n \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{m_j} [\bar{c} \bar{u} A_j \bar{J} - (\bar{b} \bar{d} \bar{u}_1 / \bar{v} + \bar{c} \bar{g}_1) \bar{J}_1 + \bar{g}_1 D_j \bar{J}_2];$$

$$W_y = \frac{1}{2} \rho \sum_{j=1}^n \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{m_j} [\bar{c} \bar{u} B_j \bar{J} - (\bar{b} \bar{d} \bar{u}_2 / \bar{v} + \bar{c} \bar{g}_2) \bar{J}_1 + \bar{g}_2 D_j \bar{J}_2];$$

$$W_z = \frac{1}{2} \rho \sum_{j=1}^n \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{m_j} [\bar{c} \bar{u} C_j \bar{J} - (\bar{b} \bar{d} \bar{u}_3 / \bar{v} + \bar{c} \bar{g}_3) \bar{J}_1 + \bar{g}_3 D_j \bar{J}_2];$$

$$W_{x\alpha} = \rho \delta \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{a} \sum_{k=1}^{m_j} (\bar{u}_1 \bar{J}_1 - A_j \bar{J}_2); \quad W_{x\beta} = \rho \delta \sum_{j=1}^n \frac{B_j}{a} \sum_{k=1}^{m_j} (\bar{u}_1 \bar{J}_1 - A_j \bar{J}_2);$$

$$W_{x\gamma} = \rho \delta \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{a} \sum_{k=1}^{m_j} (\bar{u}_1 \bar{J}_1 - A_j \bar{J}_2); \quad W_{y\beta} = \rho \delta \sum_{j=1}^n \frac{B_j}{a} \sum_{k=1}^{m_j} (\bar{u}_2 \bar{J}_1 - B_j \bar{J}_2);$$

$$W_{2\gamma} = \rho \delta \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{a} \sum_{k=1}^{m_j} (\bar{u}_3 \bar{J}_1 - C_j \bar{J}_2); \quad W_{y\gamma} = \rho \delta \sum_{j=1}^n \frac{B_j}{a} \sum_{k=1}^{m_j} (\bar{u}_3 \bar{J}_1 - C_j \bar{J}_2);$$

$$W_{x\alpha\alpha} = \rho \delta \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{a} \sum_{k=1}^{m_j} (\bar{e}_2 A_j \bar{J}_3 + \bar{u}_1 \bar{F}); \quad W_{x\beta\beta} = \rho \delta \sum_{j=1}^n \frac{B_j}{a} \sum_{k=1}^{m_j} (\bar{e}_2 B_j \bar{J}_3 + \bar{u}_2 \bar{F});$$

$$W_{x\alpha\gamma} = \rho \delta \sum_{j=1}^n \frac{A_j}{a} \sum_{k=1}^{m_j} (\bar{e}_1 A_j \bar{J}_3 - \bar{u}_1 \bar{F}_1); \quad W_{x\beta\gamma} = \rho \delta \sum_{j=1}^n \frac{B_j}{a} \sum_{k=1}^{m_j} (\bar{e}_1 A_j \bar{J}_3 - \bar{u}_1 \bar{F}_1);$$

$$W_{x\gamma\gamma} = \rho \delta \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{a} \sum_{k=1}^{m_j} (\bar{e}_2 C_j \bar{J}_3 + \bar{u}_3 \bar{F}); \quad W_{y\beta\beta} = \rho \delta \sum_{j=1}^n \frac{B_j}{a} \sum_{k=1}^{m_j} (-\bar{d}_k B_j \bar{J}_3 - \bar{u}_2 \bar{F}_2);$$

$$W_{2\gamma\gamma} = \rho \delta \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{a} \sum_{k=1}^{m_j} (\bar{e}_1 C_j \bar{J}_3 - \bar{u}_3 \bar{F}_1); \quad W_{y\beta\gamma} = \rho \delta \sum_{j=1}^n \frac{B_j}{a} \sum_{k=1}^{m_j} (\bar{e}_1 B_j \bar{J}_3 - \bar{u}_2 \bar{F}_1);$$

$$W_{x\alpha\beta} = \rho \delta \sum_{j=1}^n \frac{B_j}{a} \sum_{k=1}^{m_j} (\bar{e}_2 A_j \bar{J}_3 + \bar{u}_1 \bar{F}); \quad W_{y\gamma\gamma} = \rho \delta \sum_{j=1}^n \frac{B_j}{a} \sum_{k=1}^{m_j} (\bar{e}_1 C_j \bar{J}_3 - \bar{u}_3 \bar{F}_1);$$

где x_{jk} , y_{jk} , z_{jk} ($k = \overline{1, m_j}$; $j = \overline{1, n}$) - координаты вершин многогранника; n - общее число граней у многогранника; m_j - число вершин в плоскости грани с порядковым номером j ;

$$\bar{c}_k = x_{jk+1} - x_{jk}; \quad \bar{e}_1 = x_{jk} y_{jk+1} - x_{jk+1} y_{jk}; \quad \bar{d} = \sigma_3 A_j + \sigma_2 B_j + \sigma_1 C_j;$$

$$\bar{b}_k = y_{jk+1} - y_{jk}; \quad \bar{d}_k = x_{jk} z_{jk+1} - x_{jk+1} z_{jk}; \quad \bar{b} = \bar{e}_1^2 + \bar{d}_k^2 + \bar{e}_2^2;$$

$$\bar{a}_k = z_{jk+1} - z_{jk}; \quad \bar{e}_2 = y_{jk} z_{jk+1} - y_{jk+1} z_{jk}; \quad \bar{c} = \bar{e}_2 A_j - \bar{d}_k B_j + \bar{e}_1 C_j;$$

$$x_{jm_j+1} = x_{j1}; \quad \bar{R}_1 = \sqrt{x_{jk}^2 + y_{jk}^2 + z_{jk}^2}; \quad \bar{g} = (2D_j \bar{d} / \bar{a} - 3\sigma) D_j;$$

$$y_{jm_j+1} = y_{j1}; \quad \bar{R}_2 = \sqrt{x_{jk+1}^2 + y_{jk+1}^2 + z_{jk+1}^2}; \quad \bar{u} = \bar{c}_k \sigma_3 + \bar{b}_k \sigma_2 + \bar{a}_k \sigma_1;$$

$$z_{jm_j+1} = z_{j1}; \quad \bar{v}_1 = \bar{c}_k x_{jk} + \bar{b}_k y_{jk} + \bar{a}_k z_{jk}; \quad \bar{v} = \bar{c}_k^2 + \bar{b}_k^2 + \bar{a}_k^2;$$

$$\bar{a} = A_j^2 + B_j^2 + C_j^2; \quad \bar{v}_2 = \bar{c}_k x_{jk+1} + \bar{b}_k y_{jk+1} + \bar{a}_k z_{jk+1}; \quad \bar{J} = (\bar{R}_2 - \bar{R}_1) / \bar{v};$$

$$\bar{u}_1 = \bar{a}_k B_j - \bar{b}_k C_j; \quad \bar{g}_1 = D_j [2A_j (\sigma_2 B_j + \sigma_1 C_j) - (\bar{a} - 2A_j^2) \sigma_3] / \bar{a} - 2A_j \sigma;$$

$$\bar{u}_2 = \bar{c}_k C_j - \bar{a}_k A_j; \quad \bar{g}_2 = D_j [2B_j (\sigma_3 A_j + \sigma_1 C_j) - (\bar{a} - 2B_j^2) \sigma_2] / \bar{a} - 2B_j \sigma;$$

$$\bar{u}_3 = \bar{b}_k A_j - \bar{c}_k B_j; \quad \bar{g}_3 = D_j [2C_j (\sigma_3 A_j + \sigma_2 B_j) - (\bar{a} - 2C_j^2) \sigma_1] / \bar{a} - 2C_j \sigma;$$

$$\Phi_3 = \bar{e}_1 C_j / (D_j \bar{R}_1); \quad \bar{\Phi}_1 = (\bar{c} z_{jk} + \bar{e}_1 D_j) / (\bar{a}_k D_j \bar{R}_1);$$

$$\Phi_4 = \bar{e}_1 C_j / (D_j \bar{R}_2); \quad \bar{\Phi}_2 = (\bar{c} z_{jk+1} + \bar{e}_1 D_j) / (\bar{a}_k D_j \bar{R}_2);$$

$$\bar{J}_1 := \text{if } \bar{b} = 0 \text{ then } 0 \text{ else } \frac{1}{\sqrt{\bar{v}}} \ln \left| \frac{\bar{v}_2 + \bar{R}_2 \sqrt{\bar{v}}}{\bar{v}_1 + \bar{R}_1 \sqrt{\bar{v}}} \right|;$$

$$\bar{J}_1 := \text{if } \bar{b} \neq 0 \text{ then } \bar{J}_1 \text{ else if } \bar{R}_1 \bar{R}_2 = 0 \text{ then } 0 \text{ else } |\ln(\bar{R}_2 / \bar{R}_1)| / \sqrt{\bar{v}};$$

$$\bar{J}_2 := \text{if } D_j = 0 \text{ then } 0 \text{ else if } A_j = 0 \wedge B_j = 0 \text{ then } \text{arctg}(\Phi_3) + \text{arctg}(\Phi_4) \\ \text{else if } \bar{a}_k = 0 \text{ then } 0 \text{ else } \text{arctg}(\bar{\Phi}_2) - \text{arctg}(\bar{\Phi}_1);$$

$$\bar{J}_3 := \text{if } \bar{b} = 0 \text{ then } 0 \text{ else } (\bar{v}_2 / \bar{R}_2 - \bar{v}_1 / \bar{R}_1) / \bar{b};$$

$$\bar{J}_6 := \text{if } \bar{b} = 0 \text{ then } 0 \text{ else } (x_{jk+1} / \bar{R}_2 - x_{jk} / \bar{R}_1) / \bar{b};$$

$$\bar{J}_7 := \text{if } \bar{b} = 0 \text{ then } 0 \text{ else } (y_{jk+1} / \bar{R}_2 - y_{jk} / \bar{R}_1) / \bar{b};$$

$$\bar{J}_8 := \text{if } \bar{b} = 0 \text{ then } 0 \text{ else } (z_{jk+1} / \bar{R}_2 - z_{jk} / \bar{R}_1) / \bar{b};$$

$$\bar{F} = \bar{e}_1 \bar{J}_7 + \bar{d}_k \bar{J}_8; \quad \bar{F}_1 = \bar{d}_k \bar{J}_6 + \bar{e}_2 \bar{J}_7; \quad \bar{F}_2 = \bar{e}_1 \bar{J}_6 - \bar{e}_2 \bar{J}_8.$$

Формулы значительно упростились за счет исчезновения под знаком суммы членов, зависящих только от координат вершин призмы и не зависящих от параметров A_j , B_j , C_j и D_j . Это объясняется тем, что для замкнутой многогранной поверхности, ориентированной по внешней нормали $\vec{n}_j$, каждое ребро обходится дважды в заведомо противоположных направлениях.

Переход к произвольному многограннику, в том числе и такому, у которого некоторые грани могут оказаться параллельными оси y , привел к усложнению правила вычисления обратной тригонометрической функции J_2 (достаточно сравнить выражения для J_2 и $\bar{J}_2$). Выясним геометрический смысл этой функции, опираясь на характеристические свойства потенциала масс непрерывной плотности и используя явные формулы вторых производных. Несложно установить, что именно с этой функцией связано вычисление интеграла Гаусса для замкнутой многогранной поверхности σ :

$$G(0,0,0) = \iint_{(\sigma)} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} ds = - \frac{Wx\alpha + Wy\rho + Wz\gamma}{f\sigma} = \sum_{j=1}^n G_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m_j} \bar{J}_2.$$

Функцию G можно применять для вычисления пространственных углов многогранника, совмещая для этого точку наблюдения с его вершинами (многогранные углы) или ребрами (двугранные углы). В то же время функция $G_j(0,0,0) = \sum_{k=1}^{m_j} \bar{J}_2$ представляет самостоятельный интерес, так как позволяет вычислить телесный угол видимости из начала координат на площадку сложной формы, если ее контур предварительно аппроксимирован ломаной линией. При ориентации обхода контура площадки по лучу зрения телесный угол получаем со знаком плюс.

Формулы (5), (6) впервые были применены при организации на ЭВМ подбора по аномалиям силы тяжести плотностных моделей сложно устроенной геологической среды [2, 3]. На основе формул вторых и третьих производных автором разработан и запрограммирован на ЭВМ М-222 алгоритм вычисления тесретических магнитных аномалий ΔT , Z , $\partial \Delta T / \partial x$.

Основные результаты аналитического исследования потенциала притяжения многогранника могут оказаться полезными при решении прикладных задач гравиметрии и магнитометрии, так как значительно расширяют класс используемых для этой цели моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Наука, 1971.
2. Кравцов Г.Г. Вычислительные схемы определения параметров геологических образований по магнитным и гравитационным аномалиям методом линейного программирования. - В кн.: Математизация и автоматизация в геологических исследованиях. Краткие тезисы докладов к совещанию. Л., изд. ВСЕГЕИ, 1972.
3. Кравцов Г.Г., Сегалович В.И. Методика подбора геолого-структурных моделей по заданному полю силы тяжести с помощью укрупненных многогранных элементов. - Зап. ЛПИ, 1976, т. 69, вып. 2.
4. Сретенский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала. М.-Л., Гостехиздат, 1946.

