Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г.В.Плеханова,
т. /XXУП, 1978 г.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГНОЗИРУЮЩЕГО СИГНАЛА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СУШИЛЬНЫМ БАРАБАНОМ

В.Г.ДЕЙЧ, В.В.СТАЛЬСКИЙ

Ранее авторами была предложена математическая модель процесса сушки кеков во вращающемся сушильном барабане с продольной подачей сушильного агента [2]. На основе этой модели была поставлена и решена методами классического вариационного исчисления задача оптимального управления сушильным агрегатом.

Для решения потребовались некоторые преобразования и аппроксимации: «дискретизация" задачи и, что более существенно, отказ от учёта ограничений технологического характера на управляющие воздействия – температуру сушильного агента и его скорость. Это побудило авторов предпринять попытку применить к рассматриваемой задаче принцип максимума Понтрягина [3]. Алгоритм, к которому приводит этот принцип, требует решения системы двух уравнений с частными производными, содержащей разрывные нелинейности. Один из путей решения состоит в применении метода последовательных приближений и оценке скорости его сходимости. Другой, упрощенный вариант [3] основан на том, что оптимальные управления выражаются через «будущие" значения отклонения выходной влажности продукта от заданного значения. Можно поэтому попытаться, не решая всей системы уравнений, воспользоваться прогнозированием выходного сигнала на основе результатов измерений.

Такое решение действительно может быть получено, причем требуемый прогноз осуществляется с помощью теории Винера-Колмогорова по некоторому «промежуточному" параметру, используемому в существующей автоматической системе управления.

Полученная упрощенная математическая модель динамики сушильного барабана [2], имеет вид уравнения с частными производными первого порядка для влажности материала $u(t,l)$ как функции времени t, $t \geqslant 0$ и координаты l вдоль барабана, $0 \leqslant l \leqslant L$ (здесь L – длина барабана):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_{\text{м}} \frac{\partial u}{\partial l} = -f\left(t, l; v(t), T(t)\right)\varphi(u), \qquad (1)$$

где $v_{\text{м}}$ – скорость движения материала по барабану; $v(t)$, $T(t)$ – соответственно скорость сушильного агента и его температура; $\varphi(u)$ – кривая сушки [5];

$$f(t,l;v,T)=\alpha(v)(T-T_{м})\exp\left(-\beta(v)\int_{0}^{l}g_{м}\left(t-\frac{\lambda}{v_{м}}\right)d\lambda\right)\ ; \qquad (2)$$

$\alpha(v)$ и $\beta(v)$ - величины, пропорциональные (зависящие от v) коэффициентам тепло- и массообмена; $T_{м}$ - температура материала; $g_{м}(t)$ - массовый расход материала на входе.

Уравнение (I) удобно линеаризовать, положив

$$q(u)=\int_{u_0}^{u}\frac{du}{\varphi(u)}\ , \qquad (3)$$

причем нижний предел выбирается так, чтобы $q(u)=u$ при $u\geqslant u_{кр}$, т.е. в области, где $\varphi(u)\equiv$ I. Функция $q(t,l)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial q}{\partial t}+v_{м}\frac{\partial q}{\partial l}=-f\left(t,l;v(t),T(t)\right) \qquad (4)$$

и начально-краевым условиям

$$\begin{aligned} q(0,l)&=q_1(l)\ ,\\ q(t,0)&=q_0(t)\ . \end{aligned} \qquad (5)$$

Подлежащий минимизации функционал [3], выбирается в виде:

$$J(v,T;\theta)=\int_{0}^{\theta}\left[\left(C_1v(t)T(t)+C_2v^{3}(t)\right)+\mu\left(q(t)-q_3\right)^{2}\right]dt\ , \qquad (6)$$

где θ - время управления; C_1, C_2, μ - постоянные; q_3 - значение параметра q, отвечающее заданному значению выходной влажности.

Ограничения на величины управляющих воздействий имеют вид

$$\begin{aligned} T_{min}&\leqslant T(t)\leqslant T_{max}\ ,\\ v_{min}&\leqslant v(t)\leqslant v_{max}\ . \end{aligned} \qquad (7)$$

Задача оптимального управления ставится следующим образом: найти пару кусочно непрерывных функций $\{T(t),v(t)\}$, удовлетворяющих (7) и доставляющих минимум функционалу (6) при условиях (4), (5).

Решение поставленной задачи с помощью принципа максимума приводит к следующему необходимому условию [3]: чтобы пара допустимых функций $\{v_0(t),T_0(t)\}$ была оптимальным управлением, необходимо, чтобы

$$H(p,q,T_0,v_0)=\max_{T,v}H(p,q,T,v)\ , \qquad (8)$$

где $q=q(t,l)$ - решение задачи (4), (5); $p=p(t,l)$ - решение "сопряженной" задачи

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v_м \frac{\partial p}{\partial l} = 0, \tag{9}$$

$$p(\theta, l) = 0,$$

$$p(t, L) = -2\mu(q(t, L) - q_з), \tag{I0}$$

а $H(p, q, T, v)$ – «гамильтониан»,

$$H(p, q, T, v) = -\left\{ \int_0^L p(t, l)\left[v_м \frac{\partial q}{\partial l} + f(t, l, v(t), T(t)\right] dl + \right.$$
$$\left. + C_1 v(t) T(t) + C_2 v^3(t) + \mu\left(q(t, L) - q_з\right)^2 \right. . \tag{II}$$

Максимум в (8) берется по всем значениям T, v, удовлетворяющим (7).

В настоящей работе мы ограничиваемся случаем, когда скорость сушильного агента $v(t) \equiv \text{const}$, и рассматриваем лишь одно управляющее воздействие $T(t)$. Тогда, поскольку уравнения (4), (9) и функционал (6) линейны относительно $T(t)$, необходимое условие (8) дает для оптимального управления $T_0(t)$ релейный закон:

$$T_0(t) = \frac{1}{2} T_{max}\left(1 - sgn\left(\chi(t) + C\right)\right) + \frac{1}{2} T_{min}\left(1 + sgn\left(\chi(t) + C\right)\right), \tag{I2}$$

где

$$\chi(t) = \int_0^L p(t, l) \exp\left(-\rho \int_0^l g_м(t - \lambda / v_м) d\lambda\right) dl + C_1 v. \tag{I3}$$

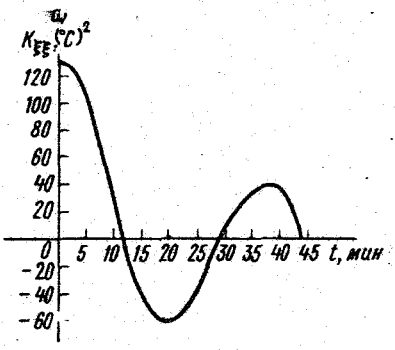
Решая (9) и (I0), найдем, что

$$p(t, l) = \begin{cases} 0 & \text{при } l \leqslant L - (\theta - t) v_м \\ -2\mu\left(q\left(t + \dfrac{L - l}{v_м}, L\right) - q_з\right) & \text{при } l > L - (\theta - t) v_м . \end{cases} \tag{I4}$$

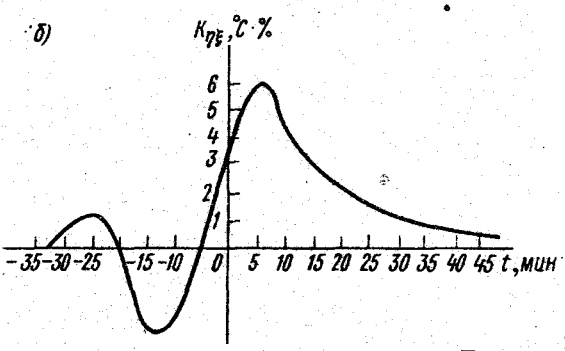
Из (I2)–(I4) вытекает, что оптимальное управление $T_0(t)$ в момент времени t полностью определяется значениями выходного параметра $q(\tau, L)$ при значениях τ:

$$t \leqslant \tau \leqslant \theta. \tag{I5}$$

Это обстоятельство и приводит к мысли воспользоваться теорией прогноза случайных процессов. Предыдущие исследования [4] выявили наличие доступного измерению «упреждающего» параметра, хорошо коррелирующего с выходной влажностью продукта. Таким параметром является усредненная температура $T_б$



б)



Автокорреляционная функция параметра $T_б$ (а) и взаимнокорреляционная функция $T_б$ и $u_{вых}$ (б)

внутри барабана, измеряемая на расстоянии $\approx \frac{2}{3}L$ от его входа. Этот параметр ранее был успешно использован для синтеза системы автоматической стабилизации влажности [4].

Автокорреляционная функция $K_{\xi\xi}(t)$ (см. рисунок, а) и взаимнокорреляционная функция $K_{\eta\xi}(t)$ (см. рисунок, б) для параметров $\eta(t) = T_б$ и $\xi(t) = u_{вых}$ получены экспериментально.

Функции $K_{\xi\xi}(t)$ и $K_{\eta\xi}(t)$ достаточно хорошо описываются слецующими типичными (см. например [6]) выражениями:

$$K_{\xi\xi}(t) = \sigma_\xi^2 e^{-\alpha|t|}\cos\gamma t, \quad -\infty < t < \infty, \qquad (16)$$

$$K_{\eta\xi}(t) = \begin{cases} R_{\eta\xi}\, e^{-\rho(t-\tau)}, & 0 < \tau \leqslant t < \infty, \\ R_{\eta\xi}\, e^{-\alpha(t-\tau)}\cos\gamma(t-\tau), & -\infty < t \leqslant \tau. \end{cases} \qquad (17)$$

Постоянные, входящие в (16), (17), имеют значения: $\sigma_\xi = 11{,}2$°C; $\alpha = 0{,}03$ мин$^{-1}$; $\gamma = 0{,}4$ мин$^{-1}$; $\rho = 0{,}05$ мин$^{-1}$; $\tau = 5{,}2$ мин; $R_{\eta\xi} = 6$°C·%.

Задача (линейного) прогноза величины $\eta(t+\nu)$, которая представляет собой выходную влажность в момент времени $t+\nu$ по значениям $\xi(s)$ при $s \leqslant t$, т.е. по всем значениям параметра $T_б$ в моменты времени, предшествующие t, состоит в построении передаточной функции $\bar{C}(p)$ фильтра, на вход которого подаются значения $\xi(s)$, а на выходе получается прогнозирующая величина $\tilde{\eta}(t)$. Таким образом:

$$\tilde{\eta}(t) = \int_{-\infty}^{t} C(t-s)\,\xi(s)\,ds, \qquad (18)$$

где $C(t)$ – весовая функция, отвечающая передаточной функции $\bar{C}(p)$.

При этом фильтр должен быть оптимальным в смысле среднеквадратичной ошибки, т.е.

$$M\left(\tilde{\eta}(t) - \eta(t+\nu)\right)^2 \longrightarrow \min. \qquad (19)$$

Метод решения поставленной задачи хорошо известен (см. например [1]). Передаточная функция оптимального фильтра должна удовлетворять уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega s}\left\{e^{i\omega\nu}\hat{K}_{\eta\xi}(\omega) - \bar{C}(i\omega)\hat{K}_{\xi\xi}(\omega)\right\}d\omega = 0, \quad s > 0, \qquad (20)$$

где $\hat{K}_{\xi\xi}(\omega)$ и $\hat{K}_{\eta\xi}(\omega)$ – соответственно спектральная функция процесса $\xi(t)$ и взаимная спектральная функция процессов $\eta(t)$ и $\xi(t)$.

Уравнение (20) есть уравнение оптимальной фильтрации Винера, записанное в частотной области. Удовлетворяющая (20) функция $\bar{C}(p)$ находится из следующих условий [I]: а) $\bar{C}(p)$ не имеет полюсов в правой полуплоскости; б) $e^{i\omega\nu}\hat{K}_{\eta\xi}(\omega) - \bar{C}(i\omega)\hat{K}_{\xi\xi}(\omega)$ является граничным значением на мнимой оси функции, не имеющей особенностей в левой полуплоскости.

Вычисления, проделанные в предположении, что $\nu > \tau$, т.е. что прогноз делается на время, большее величины запаздывания, во взаимнокорреляционной функции $K_{\eta\xi}(t)$, приводят к передаточной функции оптимального фильтра

$$\bar{C}(p) = G\,\frac{p^2 + 2\alpha p + \alpha^2 + \gamma^2}{(p+\rho)\left(p + \sqrt{\alpha^2+\gamma^2}\right)}\,, \tag{21}$$

где постоянная

$$G = \frac{R_{\eta\xi}\, e^{-\rho(\nu-\tau)}\left(\alpha^2 + \rho^2 + \gamma^2 + 2\alpha\rho\right)}{2\sigma^2\alpha\left(\rho + \sqrt{\alpha^2+\gamma^2}\right)}\,, \tag{22}$$

Для вычисления среднеквадратичной ошибки прогноза воспользуемся формулой [I]

$$\delta = \left\{\sigma_\eta^2 - \int_{-\infty}^{\infty} |\bar{C}(i\omega)|^2 \hat{K}_{\xi\xi}(\omega)\, d\omega\right\}^{1/2}. \tag{23}$$

Подынтегральная функция в (23) – рациональна, ее числитель – полином шестого, а знаменатель – полином восьмого порядка. Ввиду большой трудоемкости вычисления соответствующего интеграла ограничимся первой грубой оценкой:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\bar{C}(i\omega)|^2 \hat{K}_{\xi\xi}(\omega)\, d\omega \geqslant \min_{\omega} |\bar{C}(i\omega)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{K}_{\xi\xi}(\omega)\, d\omega =$$

$$= \min_{\omega} |\bar{C}(i\omega)|^2\, \sigma_{\xi\xi}^2 \geqslant \frac{R_{\eta\xi}^2\, e^{-\rho(\nu-\tau)}}{\sigma_{\xi\xi}^2}\, 1{,}3\,. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (23), найдем оценку для ошибки прогноза:

$$\delta \leqslant \sigma_\eta \left(1 - 1{,}3 \cdot \frac{R_{\eta\xi}^2}{\sigma_{\xi\xi}^2\, \sigma_{\eta\eta}^2}\, e^{-\rho(\nu-\tau)}\right)^{1/2}. \tag{25}$$

Величина $R_{\eta\xi} / \sigma_{\xi\xi}\sigma_{\eta\eta} \equiv r_{\eta\xi}$ представляет собой коэффициент корреляции между величинами $\xi(t)$ и $\eta(t+\tau)$, т.е. между T_σ и выходной влажностью через время τ , равный 0,88. Таким образом,

$$\delta \leqslant \sigma_\eta \left(1 - 0{,}96\, e^{-\rho(\nu-\tau)}\right)^{1/2}. \tag{26}$$

Выражение (26) является среднеквадратичной ошибкой прогноза на время ν . В частности, при $\nu = \tau$, т.е. при прогнозе на время, равное

времени запаздывания, (26) означает, что ошибка составит менее $0{,}2\sigma_\eta$, т.е. менее 20% среднеквадратичного отклонения выходной влажности. Из (26) видно также, что погрешность растет с увеличением времени прогноза ν.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов, т. 1, М., Наука, 1971.

2. Дейч В.Г., Стальский В.В. Оптимальное управление процессом сушки во вращающейся барабанной сушилке. – Теоретические основы химической технологии, 1975, т. IX, № 1.

3. Дейч В.Г., Стальский В.В. Решение задачи оптимального управления процессом сушки во вращающейся барабанной сушилке. Тезисы докладов всесоюзн. конф. „Интенсификация процессов сушки и использование для этих целей новой техники", изд. Калининского политехн. ин-та, 1977.

4. Дейч В.Г., Стальский В.В., Стороженко С.В. Синтез автоматической системы управления процессом сушки во вращающемся сушильном барабане. – Записки Ленинградского горного института, 1975, т. 68, вып. 1.

5. Лыков А.В. Теория сушки. М., Энергия, 1968.

6. Райбман Н.С., Чадеев В.М. Построение моделей процессов производства. М., Энергия, 1975.