Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г.В.Плеханова,
т. XXXVII, 1978 г.

СОБСТВЕННАЯ И ВЗАИМНАЯ ЕМКОСТЬ „ТОЧЕЧНЫХ" ЭЛЕКТРОДОВ В ПРИСУТСТВИИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ

Е.С.КРИЧЕВСКИЙ, В.Г.ДЕЙЧ, В.П.ТЕРЕХОВ

Пусть на расстоянии d от плоскопараллельного слоя толщиной a с диэлектрической проницаемостью ε помещен сферический проводник радиуса r (рис.I), либо конденсатор, состоящий из двух таких проводников, расположенных на расстоянии l друг от друга (рис.2). Будем предполагать, что величина r много меньше остальных линейных размеров.

Рассмотрим задачу определения собственной (первый случай) и взаимной (конденсаторной) емкости такой системы (второй случай). Отметим, что более общая задача, когда среда, окружающая электроды, и инородный слой имеют диэлектрические проницаемости ε_1 и ε_2 соответственно, легко сводится к описанному в конце статьи частному случаю. Такая задача возникает, например, при необходимости оценить влияние на показания емкостного первичного преобразователя влажности прослойки материала, отличающейся от средней по объему.

Займемся вначале первым случаем. Для вычисления емкости воспользуемся приближенным методом Хоу [4], суть которого состоит в следующем. Вычисляется потенциал поля, созданного зарядом Q, равномерно распределенным по поверхности проводника. За величину емкости принимается отношение Q к величине этого потенциала, усредненной по поверхности проводника. Полный потенциал на поверхности шарика равен сумме $Q\cdot(4\pi\varepsilon_0 r)^{-1}$ и потенциала φ, созданного плотностями зарядов σ_1 и σ_2, индуцированными на плоскостях раздела сред. Таким образом, задача сводится к нахождению потенциала φ.

Плотности σ_1 и σ_2 удовлетворяют системе двух интегральных уравнений Г.А.Гринберга [I], которые в данном случае записываются следующим образом. Введем декартовы координаты, ось z которых проходит через центр сферы, а плоскость $z = 0$ совпадает с верхней границей раздела. Обозначим через $P(x,y,z)$ функцию $\frac{1}{2\pi}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ (ядро Пуассона для полупространства). Уравнения для σ_1, σ_2 имеют вид

$$\sigma_1(x',y') = \alpha\left[-QP(x',y',d) + \iint \sigma_2(x'',y'')P(x'-x'',y'-y'',a)\,dx''dy''\right], \quad (I)$$

$$\sigma_2(x',y') = \alpha\left[QP(x',y',d+a) + \iint \sigma_1(x'',y'')P(x'-x'',y'-y'',a)\,dx''dy''\right],$$

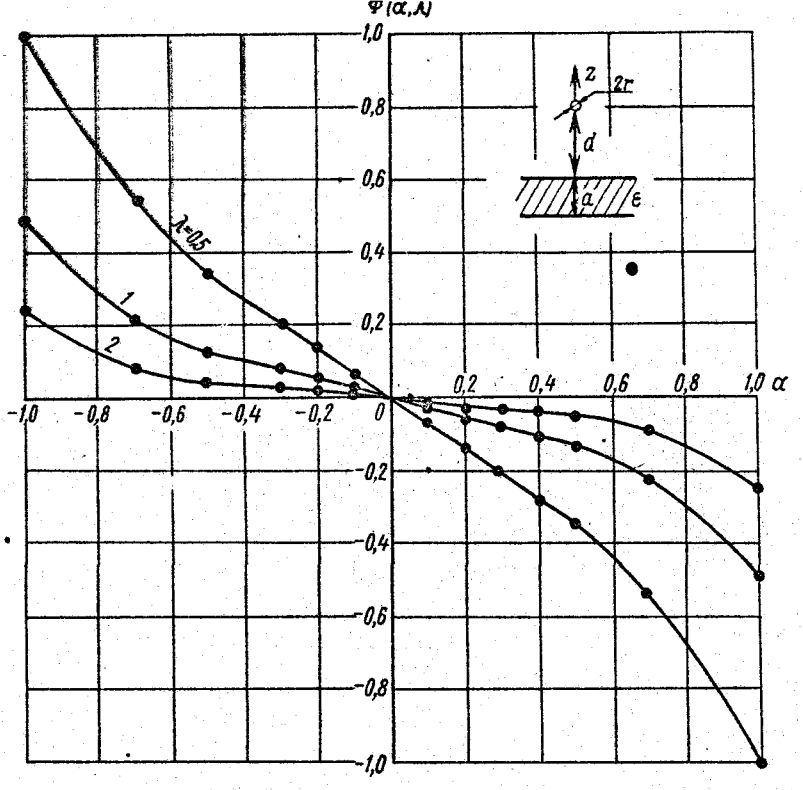


Рис. 1. Кривые для расчета емкости усредненного электрода по формуле (9)

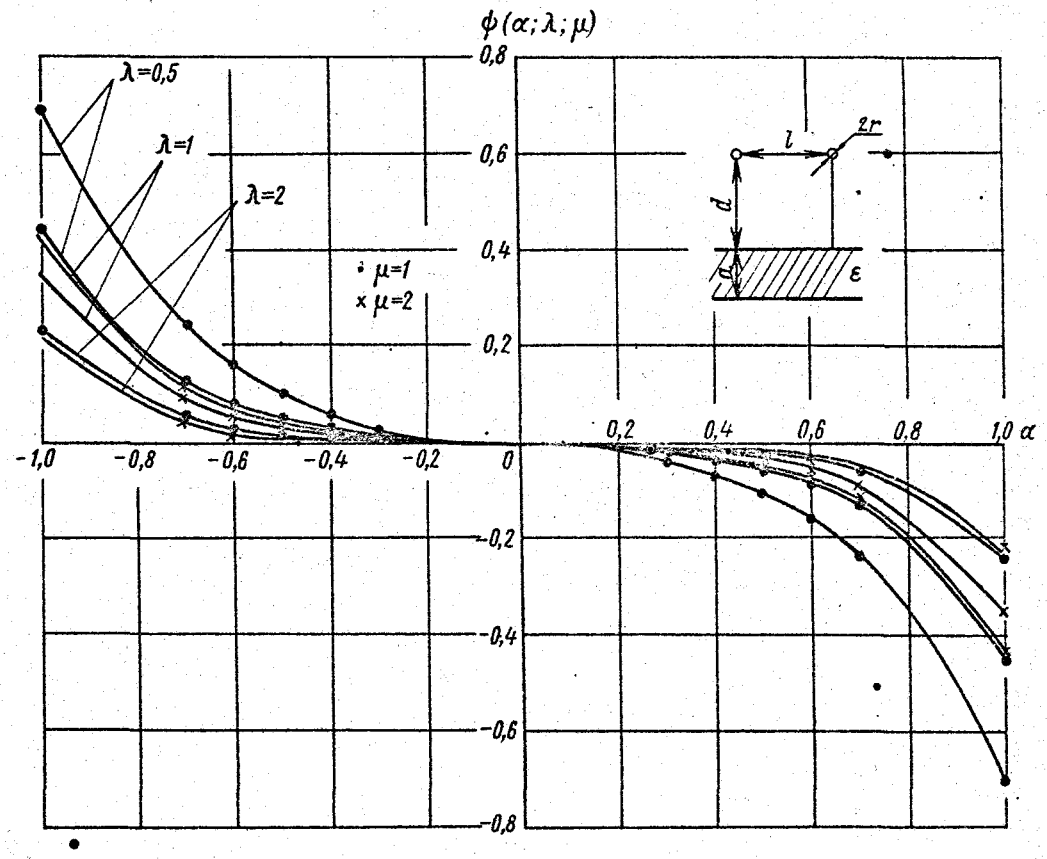


Рис. 2. Кривые для расчета конденсаторной емкости по формуле (15)

где $\alpha = (\varepsilon - 1)(\varepsilon + 1)^{-1}$.

Из системы (I) нетрудно получить уравнения, непосредственно определяющие потенциал φ. При $z \geqslant 0$ имеем

$$\varphi(x,y,z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \sigma_1(x',y') u_0(x-x', y-y', z)\,dx'dy' +$$

$$+ \iint_{-\infty}^{\infty} \sigma_2(x',y') u_0(x-x', y-y', z+a)\,dx'dy' = \varphi_1(x,y,z) + \varphi_2(x,y,z+a), \qquad (2)$$

где $u_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$.

Умножим первое из уравнений (I) на $u_0(x-x', y-y', z)$, второе на $u_0(x-x', y-y', z+a)$ и проинтегрируем их по x', y'. Тогда, учитывая соотношение

$$\iint_{-\infty}^{\infty} P(x',y',z) u_0(x-x', y-y', \xi)\,dx'dy' = u_0(x,y,z+\xi),$$

получим

$$\varphi_1(x,y,z) = \alpha\left[-Q u_0(x,y,z+d) + \varphi_2(x,y,z+a)\right], \qquad (3)$$

$$\varphi_2(x,y,z+a) = \alpha\left[Q u_0(x,y,z+d+2a) + \varphi_1(x,y,z+2a)\right]. \qquad (4)$$

Умножая выражение (4) на α и складывая его с (3), получим уравнение, содержащее только φ_1:

$$\varphi_1(x,y,z) = -\alpha Q \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n}\left[u_0(x,y,z+d+2na) - \alpha u_0(x,y,z+2(n+1)a)\right].$$

Теперь из (3) находим $\varphi_2(x,y,z+a) = Q u_0(x,y,z+d) + \alpha^{-1}\varphi_1(x,y,z)$. Таким образом, потенциал $\varphi(x,y,z)$ при $z \geqslant 0$ имеет вид

$$\varphi(x,y,z) = Q u_0(x,y,z+d) -$$

$$-(\alpha+1)Q \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n}\left[u_0(x,y,z+2na+d) - \alpha u_0(x,y,z+2(n+1)a)\right]. \qquad (5)$$

Для вычисления емкости по методу Хоу теперь следовало бы усреднить (5) по поверхности сферы. Учитывая, однако, что $r \ll d$, можно считать потенциал φ на поверхности сферы совпадающим с его значением в центре. Таким образом, полагая в (5) $x = y = 0$, $z = d$ и обозначая d/a через λ, получим искомый потенциал

$$\varphi = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 d} - \frac{(\alpha+1)Q}{8\pi\varepsilon_0 a} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n}\left(\frac{1}{\lambda+n} - \frac{\alpha}{\lambda+n+1}\right). \qquad (6)$$

Удобно ввести безразмерную функцию

$$\Phi(\alpha;\lambda) = \frac{1}{2\lambda} - \frac{\alpha+1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^{2n}\left(\frac{1}{\lambda+n} - \frac{\alpha}{\lambda+n+1}\right). \qquad (7)$$

Тогда вместо (6) имеем

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\,\Phi(\alpha;\lambda)\,. \qquad (8)$$

Таким образом, для емкости уединенного сферического проводника в присутствии диалектрического слоя получается формула

$$C = C(\varepsilon, d, a) = \frac{q}{\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\Phi(\alpha;\lambda)} = \frac{C_0}{1+\frac{r}{a}\Phi(\alpha;\lambda)}\,, \qquad (9)$$

где C_0 – емкость сферы в пустоте, $C_0 = 4\pi\varepsilon_0 r$.

Перейдем к вычислению взаимной (конденсаторной) емкости во втором случае. Как известно (см., например, [3]), потенциалы V_1, V_2 проводников связаны с зарядами q_1, q_2 на них потенциальными уравнениями:

$$V_1 = p_{11}q_1 + p_{12}q_2\,, \qquad (10)$$

$$V_2 = p_{21}q_1 + p_{22}q_2\,, \qquad (11)$$

где p_{ij} – потенциальные коэффициенты.

При этом всегда $p_{12} = p_{21}$, а в рассматриваемом случае, кроме того, $p_{11} = p_{22}$. Конденсаторная емкость двух проводников $C_к$ выражается через потенциальные коэффициенты следующим образом [3]:

$$C_к = \frac{1}{2(p_{11} - p_{12})}\,. \qquad (12)$$

Таким образом, вычисление $C_к$ сводится к определению коэффициентов p_{11} и p_{12}. Полагая в уравнении (10) $q_2 = 0$, найдем, что $p_{11} = C^{-1}$ (где C – вычисляемая по формуле (9) собственная емкость электродов). Если в уравнении (10) $q_1 = 0$, $q_2 = q$, то V_1 можно считать приближенно равным потенциалу, создаваемому вторым электродом с зарядом q в точке расположения первого. Следовательно (см. рис.2),

$$V_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} + \varphi(l,0,d)\,,$$

где $\varphi(l,0,d)$ вычисляется с помощью (5):

$$\varphi(l,0,d) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left[\frac{1}{\sqrt{\mu^2+4\lambda^2}} - (\alpha+1)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{2n}\left(\frac{1}{\sqrt{\mu^2+4(\lambda+n)^2}} - \frac{\alpha}{\sqrt{\mu^2+4(\lambda+n+1)^2}}\right)\right], \qquad (13)$$

где $\lambda = d/a$, $\mu = l/a$.

Обозначив через $\phi(\alpha;\lambda,\mu)$ безразмерную функцию, стоящую в квадратных скобках в (I3), получим

$$\rho_{12}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{l}+\frac{\phi(\alpha;\lambda,\mu)}{a}\right]. \qquad (I4)$$

Подставив теперь (I4) в (I2) и учитывая (9), найдем

$$C_к=\frac{2\pi\varepsilon_0 r}{1-\frac{r}{l}+\frac{r}{a}\left(\Phi(\alpha;\lambda)-\phi(\alpha;\lambda,\mu)\right)}. \qquad (I5)$$

Отметим, что при $\alpha=0$ (т.е. в однородной среде) $\Phi(\alpha;\lambda)=\phi(\alpha;\lambda,\mu)=0$ и (I5) совпадает с хорошо известной (см. например [2]) приближенной формулой для емкости конденсатора, состоящего из двух сфер одинакового радиуса r с расстоянием между центрами l, когда $l\gg r$. Относительная погрешность этой формулы при $r/l\leqslant 0{,}2$ менее 0,24% [2]. Поскольку все приближения, сделанные при выводе формулы (I5), основаны на тех же допущениях, что и вывод соответствующей формулы в однородной среде, ее погрешность будет того же порядка, если известны точные значения функций Φ и ϕ.

Для удобства практического использования формул (9) и (I5) на рис.I и 2 приведены рассчитанные на ЭВМ семейства кривых $\Phi(\alpha;\lambda)$; $\phi(\alpha;\lambda,\mu)$ при нескольких фиксированных значениях параметров λ и μ.

Отметим, что для вычисления емкости в случае, когда диэлектрические проницаемости среды и прослойки равны соответственно ε и ε_2, а не I и ε, как предполагалось при выводе формул (9), (I5) следует правые части этих формул умножить на ε_1 и заменить ε на $\varepsilon_2/\varepsilon_1$.

В качестве примера использования формулы (I5) рассмотрим задачу оценки влияния прослойки сухого материала на показания емкостного первичного преобразователя влажности, примененного для измерения влажности железорудного концентрата.

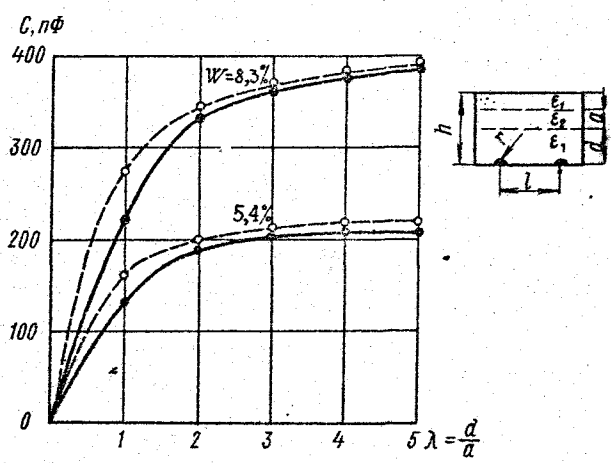


Рис.3. Экспериментальная (сплошная линия) и теоретическая (пунктирная линия) зависимость емкости ПП от относительной высоты сухой прослойки

Основным конструктивным элементом первичного преобразователя (ПП) являются полусферические электроды радиуса $r=2{,}5$ мм, расположенные на расстоянии $l=30$ мм друг от друга. В экспериментах ПП заполнялся влажным железорудным концентратом с плоскопараллельной сухой прослойкой толщиной $a=5$ мм, расположенной на расстоянии

d от электродов. Величина d в экспериментах изменялась от 0 до 25 мм. Эксперимент проводился при значениях влажности железорудного концентрата 8,3 и 5,4%, диэлектрическая проницаемость материала соответственно 5300 и 2700. Диэлектрическая проницаемость сухой прослойки с влажностью 0,1% равнялась 25.

Экспериментальные и теоретические (рассчитанные по формуле (15)) кривые зависимости $C(\lambda)$ приведены на рис.3. При этом то обстоятельство, что использованные в ПП электроды имеют полусферическую, а не сферическую как предполагалось при выводе формулы (15) форму, было учтено введением множителя 1/2. Основанием для такой замены, помимо теоретических соображений, служит весьма близкое совпадение результатов измерения емкости пустого ПП (0,075 пФ) и рассчитанной по выражению (15) при $\alpha =$ $= 0$ «геометрической» емкости сферических электродов, деленной на 2 (0,072 пФ).

Сравнение кривых рис.3 свидетельствует об удовлетворительном совпадении теории и эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.-Л. Изд-во АН СССР, 1949.

2. Иоссель Ю.Я., Кочанов Э.С., Струнский М.Г. Расчет электрической емкости. Л., Энергия, 1969.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1958.

4. Методы расчета электростатических полей / Н.Н.Миролюбов, М.В.Костенко, М.Л.Левинштейн, Н.Н.Тиходеев. М., Высшая школа, 1963. С.414.



117075