Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени горного института им.Г.В.Плеханова,
т. LXXXII, 1980 г.

УДК 622.02.01

РАСЧЕТ ПРЕДЕЛА ПРОЧНОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД НА ОДНООСНОЕ СЖАТИЕ

М.М.МОРДУХОВИЧ

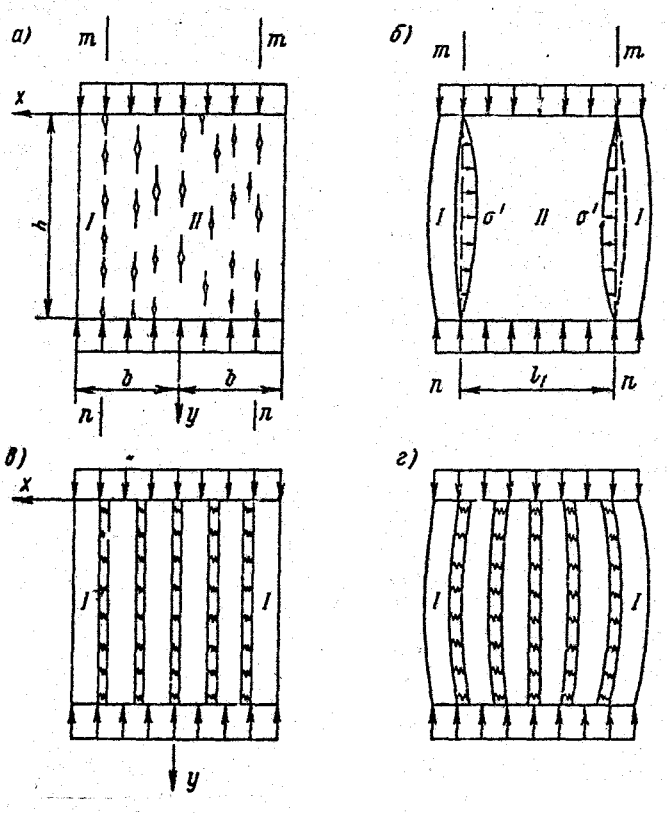


Рис.1. Схемы образца (а, б) и его упругопластичной модели (в, г): а, в – до потери устойчивости; б – после потери устойчивости

Практический интерес представляет установление расчетным путем зависимости предела прочности на одноосное сжатие от стабильных параметров прочностных и деформационных свойств горных пород и размеров образцов.

Идею предлагаемого метода расчета проиллюстрируем на наиболее простом случае плоской задачи, когда один размер сжимаемого тела значительно превышает два других. Рассмотрим тело прямоугольного сечения высотой h и размером основания $2b$, нагруженное по опорным граням равномерно распределенной нагрузкой (рис.1,а). Если фактическая нагрузка P не превы-

шает нагрузки $P_{пц}$, соответствующей пределу пропорциональности $\sigma_{пц}$, нагружение подчиняется закону Гука и остаточные деформации отсутствуют. При превышении этой нагрузкой величины $P_{пц}$ начинают развиваться трещины, прежде всего вертикальные трещины отрыва. Допустим, что эти трещины распространились по ряду вертикальных сечений, однако между ними еще сохраняются межтрещинные участки, величина и число которых убывает с увеличением нагрузки. В конечном итоге, образец окажется разделенным на отдельные вертикальные столбики.

Рассмотрим ближайшее к боковой поверхности образца вертикальное сечение mn, ослабленное трещинами отрыва (рис.I,а). Представим образец состоящим из приконтурной части I, связанной с упругим основанием II. При достижении нагрузкой, приходящейся на часть I, критического значения последняя потеряет устойчивость и начинает выпучиваться. Величина критической силы при сжимающих напряжениях, не превышающих $\sigma_{пц}$, может быть установлена по формуле, предложенной С.П.Тимошенко [5]:

$$P_{кр}=P_{кр_0}\left(n^2+\frac{k h^4}{n^2\pi^4 E I}\right); \qquad (1)$$

$$P_{кр_0}=\pi^2 E I / h^2, \qquad (2)$$

где $P_{кр_0}$ - критическая сила для стержня, шарнирно-опертого по концам, при отсутствии его связи с упругой средой; k - коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели); n - число полуволн, появляющихся при потере устойчивости стержня; E - модуль продольной упругости; I - момент инерции поперечного сечения стержня.

В момент потери устойчивости в сечении mn возникают нормальные напряжения σ' (рис.I,б), являющиеся реакцией, действующей на часть I, со стороны основания II. Эти напряжения препятствуют выпучиванию части I и являются растягивающими по отношению к части II. Они связаны с прогибами v части I зависимостью

$$\sigma'=k v. \qquad (3)$$

Поскольку выпучивание части I происходит по одной полуволне (синусоиде), то напряжения σ', прямо пропорциональные прогибам v, распределены также по синусоиде.

Полную величину сжимающей нагрузки, приходящейся на часть I, представим как сумму двух составляющих:

$$P=P_{кр}+P_x, \qquad (4)$$

где P_x - усилие, возникающее при выпучивании боковых поверхностей.

При $P = P_{кр}$ ($P_x = 0$) вертикальные сечения тела остаются плоскими.

Полагаем в формуле (3) величину $\sigma' = \sigma_p$ и принимаем $\sigma_p = 10^2$ Н/см^2, $E = 1\cdot10^6$ Н/см^2, что характерно для многих горных пород; $h = 2b = 5$ см, ширину части I равной 1 см, число полуволн $n = 1$. До развития вертикальных трещин и пластичных межтрещинных участков между ними потеря устойчи-

вости части I практически невозможна. В этом случае, рассматривая часть I как стержень на сплошном упругом основании, величину v, соответствующую $\sigma' = \sigma_p$ в формуле (3), установим как поперечную деформацию внутренней части тела П шириной $l_1 = 3$ см. Тогда в соответствии с законом Гука

$$v = \Delta l_1 = \frac{\sigma' l_1}{2E} = 1 \cdot 10^2 \cdot 3/2 \cdot 1 \cdot 10^6 = 1{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ см}.$$

По формуле (3)

$$k = \frac{\sigma'}{v} = \frac{1 \cdot 10^2}{1{,}5 \cdot 10^{-4}} = 666660 \text{ Н/см}^3.$$

В соответствии с выражением (I)

$$P = P_{кр_0} \left(1 + \frac{666660 \cdot 5^4}{3{,}14^4 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{12}}\right) = 50{,}9 P_{кр_0}.$$

Следовательно, в этом случае потеря устойчивости части I, а значит и образца в целом, практически невозможна.

При развитии вертикальных трещин и образовании пластичных межтрещинных участков часть I следует рассматривать как стержень, опирающийся не на упругое, а на пластичное основание, для которого выражение (3) можно представить в виде

$$\sigma' = k_\sigma v, \qquad (5)$$

где k_σ - переменный коэффициент жесткости пластичного основания, зависящий от величины напряжений σ'.

При одной и той же величине напряжений σ' прогибы v части I, опирающейся на пластичное основание, будут значительно бо́льшими, чем при опирании ее на упругое основание. Полагая, например, $v = 0{,}05$ см, получим

$$k_\sigma = \frac{\sigma'}{v} = \frac{1 \cdot 10^2}{0{,}05} = 2000 \text{ Н/см}^2.$$

В действительности, часть I опирается не на сплошное основание а связана с внутренней частью образца отдельными межтрещинными участками. Для такого случая С.П.Тимошенко [5] предложил вместо коэффициента жесткости сплошной среды использовать коэффициент жесткости эквивалентной среды

$$k_{\sigma_1} = k_\sigma a_1 / a, \qquad (6)$$

где a_1 - длина межтрещинного участка; a - расстояние между опорами, в нашем случае - между межтрещинными участками.

Полагая, например, $a = 0{,}5$ см $a_1 = 0{,}2$ см, получим

$$k_{\sigma_1} = \frac{2000 \cdot 0{,}2}{0{,}5} = 800 \text{ Н/см}^2.$$

Принимая величину модуля продольной упругости $E = 1 \cdot 10^6$ Н/см^2, что типично для многих горных пород, и полагая ширину части I равной 1 см, высоту образца $h = 5$ см, а число полуволн $n = 1$, получим по формуле (1), подставляя в нее вместо k величину $k\sigma_1$,

$$P_{KP} = P_{KP_0}\left(1 + \frac{800 \cdot 5^4}{3{,}14^4 \cdot 1 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{12}}\right) = 1{,}06\, P_{KP_0}.$$

Достоверность принятого в примере значения $v = 0{,}05$ см подтверждается результатами экспериментальных замеров деформаций образцов, приведенными, например, для соляных пород работе [6].

При превышении нагрузкой, приходящейся на каждую из боковых частей 1, величины P_{KP} начинается их выпучивание (рис.1,г), сопровождающееся ростом нормальных напряжений по внутренним вертикальным граням.

Рассмотрим часть I малой ширины $x_1 = x - b$, для которой критические напряжения меньше предела пропорциональности, что позволяет считать эту часть упругой. В соответствии с законом Гука высота части I к моменту потери устойчивости

$$h_1 = h\left(1 - P_{KP}/Ex_1\right). \qquad (7)$$

При значении сжимающего усилия $P > P_{KP}$ высота выпучившейся части I должна быть такой же, как и внутренней части образца, выражение для которой имеет вид

$$h_2 = h_1\left(1 - \frac{P_x}{Ex_1}\right) = h\left(1 - \frac{P_{KP}}{Ex_1}\right)\left(1 - \frac{P_x}{Ex_1}\right). \qquad (8)$$

Следуя Н.К.Снитко [3], будем считать, что к моменту потери устойчивости длина оси выпучившейся части I равна ее высоте h_1 (рис.2,а). Используем элементарную зависимость между длиной дуги h_1, длиной хорды h_2 и стрелой подъема f_{max}

$$f_{max} = 0{,}25\sqrt{3\left(h_1^2 - h_2^2\right)}. \qquad (9)$$

С ростом прогибов части I увеличиваются напряжения, приложенные к ее внутренней грани (рис.2,б) и распределенные, как отмечалось выше, согласно закону

$$\sigma' = \sigma_{max} \sin\frac{\pi y}{h_2}. \qquad (10)$$

Эти напряжения будут препятствовать прогибам части I и вызывать растяжение пластичных связей. Максимальное перемещение части I посредине высоты образца под действием сжимающего усилия P представим в виде

$$f_{max} = f'_{max} + f''_{max}, \qquad (11)$$

где f'_{max} - максимальное перемещение части I под действием нормальных напряжений по ее внутренней грани; f''_{max} - полное или фактическое максимальное перемещение части I.

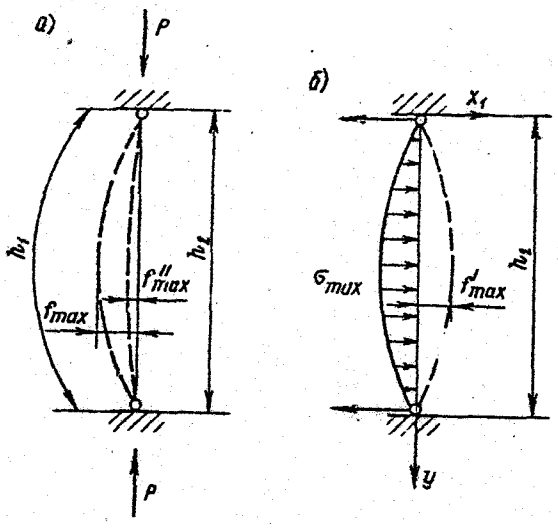


Рис.2. Расчетные схемы для определения: а - f_{max}; б - f'_{max}

Полный прогиб f''_{max} можно считать весьма малым и пренебречь им по сравнению с величиной f'_{max}. Тогда уравнение (II) примет вид

$$f_{max} = f'_{max}. \qquad (12)$$

В соответствии с решением, приведенным в [I],

$$f'_{max} = 0{,}123\, h_1^4 \sigma'_{max} / E x_1^3 . \qquad (13)$$

Подставляя выражения (9) и (I3) в (I2) и выполняя преобразования, приведенные в [I], получим

$$P_x = \frac{0{,}081 \sigma'^2_{max} h_1^6 E x_1}{0{,}648\, \sigma'^2_{max} h_1^6 + 2E^2 x_1^6} . \qquad (14)$$

Величину P_x, соответствующую отрыву по вертикальному сечению, расположенному на расстоянии x_1 от боковой поверхности, определим, полагая в выражении (I4) $\sigma_{max} = \sigma_p$. Кроме того, с достаточно высокой степенью точности можно считать $h_1 = h$, что существенно упрощает расчет. Тогда формула (I4) примет вид

$$P_x = \frac{0{,}081\, \sigma_p^2 h^6 E x_1}{0{,}648\, \sigma_p^2 h^6 + 2E^2 x_1^6} . \qquad (15)$$

Подставляя в (4) выражения (2) и (I5), получим полную величину вертикальной нагрузки, приходящейся на часть I шириной x_1 и соответствующей наибольшим нормальным напряжениям по ее внутренней грани, равным σ_p:

$$P = Ex_1\left[0{,}822\left(\frac{x_1}{h}\right)^2 + \frac{\sigma_p^2 h^6}{8\sigma_p^2 h^6 + 24{,}707 E^2 x_1^6}\right] . \qquad (16)$$

Соответствующая величина сжимающего напряжения

$$\sigma = F'x = \sigma_{кр} + \sigma_x , \qquad (17)$$

где

$$\sigma_{кр} = 0{,}822\, E\left(\frac{x_1}{h}\right)^2 ; \qquad (18)$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma_p^2 E}{8\sigma_p^2 + 24{,}707 E^2 \left(\frac{x_1}{h}\right)^6} . \qquad (19)$$

Известно, что кривая $\sigma_{кр}$ (рис.3) подчиняется формуле Эйлера (18) лишь в пределах закона Гука, т.е. при $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$, что соответствует стержням большой гибкости ($0 \leq x_1 \leq d$). Используя выражение, предложенное К.В.Руппенейтом [2], предел пропорциональности можно определить по формуле

$$\sigma_{пц} = \sigma_p / \mu , \qquad (20)$$

где μ – коэффициент Пуассона.

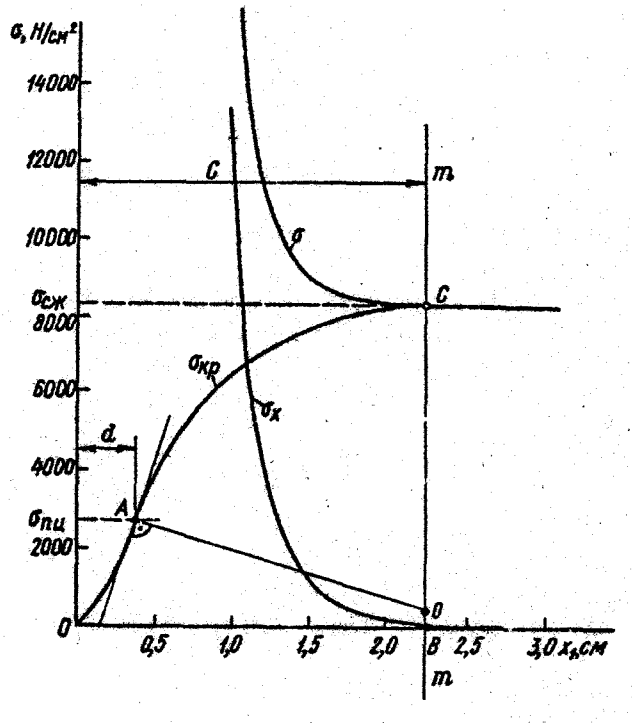


Рис.3. Графическое построение к определению $\sigma_{сж}$

Для стержней средней гибкости ($d \leq x_1 \leq c$) формула Эйлера дает завышенные значения критических напряжений, для их определения принято пользоваться эмпирической прямой Ф.С.Ясинского, которая для стержней малой гибкости ($c \leq x_1$) переходит в горизонтальную прямую ($\sigma_{кр} = \sigma_{сж}$). Однако, как следует из исследований Е.Хвалла [7], Г.Вестлунда и С.Бергстрема [8] и др., фактическая кривая $\sigma_{кр} = f(x_1)$ не имеет переломов и для стержней средней гибкости может быть аппроксимирована дугой окружности. Эту дугу проведем следующим образом.

Откладывая в выбранном масштабе вычисленные по формуле (19) значения σ_x, построим кривую $\sigma_x = f(x_1)$. Через точку B на этой кривой, в которой σ_x практически достигает нуля, проведем вертикаль mn. По формуле (20) вычислим величину $\sigma_{пц}$ и проведем горизонтальную прямую $\sigma = \sigma_{пц}$ до пересечения с эйлеровской кривой $\sigma_{кр} = f(x_1)$ в точке A. Из этой точки проведем линию, перпендикулярную касательной к кривой $\sigma_{кр} = f(x_1)$ до пересечения с вертикалью mn в точке О. Радиусом OA из центра в точке О проведем искомую дугу окружности AC. Тогда отрезок CB в выбранном масштабе будет представлять собой предел прочности на одноосное сжатие $\sigma_{сж}$.

На рис.3 построение выполнено при следующих исходных данных [4]: порода - известняк; $\sigma_р = 840$ Н/см^2; $E = 2{,}3 \cdot 10^6$ Н/см^2; $\mu = 0{,}31$; $h = 2b = 10$ см. Экспериментально установленная величина $\sigma_{сж}$ составляет 6660 Н/см^2, что на 19% меньше расчетного значения 8300 Н/см^2.

Таким образом, предлагаемый метод расчета позволяет установить функциональную зависимость предела прочности породы на одноосное сжатие $\sigma_{сж}$ от предела прочности на растяжение $\sigma_р$, упругих характеристик E и μ и размеров образца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мордухович М.М. Оценка прочности боков горизонтальных выработок по условию отрыва приконтурных зон породного массива. Зап. ЛГИ, 1974, т. 64, вып. 1.

2. Руппенейт К.В. Механические свойства горных пород. М., Углетехиздат, 1956.

3. Снитко Н.К. Устойчивость стержневых систем в упругопластической области. Л., Стройиздат, 1968.

4. Терметчиков М.К., Мамбетов Ш.А. Физико-механические свойства горных пород рудника Сумсар. - В кн.: Устойчивость подготовительных выработок и кровли камер. Фрунзе, Илим, 1971.

5. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. М.-Л., Гостехиздат, 1946.

6. Uhlenbecker F.W. Verformungsmessungen in der Grube und ergänzende Laboruntersuchungen auf dem Kaliwerk Hattorf (Werra-Revier) im Hinblick auf eine optimale Festlegung des Abbauverlustes bei grösstmöglicher Sicherheit der Grubenbaue. Frei erg. 1968.

7. Chwalla E. Zur Berechnung gedrungenen Knickstäbe mit beliebig veränderlichem Querschnitt, Stahlbau, S.121, 1934.

8. Wästlund G., Bergström Sven.G. Buckling of compressed Steel Members, Acta Polytechnika, v 1, N 10, Göteborg, 1949.