Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени горного института им.Г.В.Плеханова,
т.ХХХII, 1980 г.

УДК 539.3:622.831

ОБ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЯХ ДЕФОРМАЦИОННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ГОРНЫХ ПОРОД

А.Г.ПРОТОСЕНЯ, А.К.ЧЕРНИКОВ

В работе [5] содержатся фундаментальные экспериментальные исследования прочности и деформируемости 23 типов горных пород, а также гипса, бетона, цементного камня и кирпича. Исследования выполнены в условиях объемных напряженных состояний при пропорциональном нагружении ($\sigma_1 \geqslant \sigma_2 = \sigma_3$). В результате получены экспериментальные зависимости между напряжениями и деформациями; установлено, что горные породы и строительные материалы обладают разрыхляемостью и уплотняемостью; предложены новые уравнения предельных состояний горных пород.

На основе указанных результатов в работе [2] сформулирована деформационная теория пластичности горных пород, одним из основных положений которой является гипотеза о пропорциональности девиаторов деформаций D_ε и напряжений D_σ:

$$D_\varepsilon = f D_\sigma \,, \qquad (I)$$

где

$$D_\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_x - \frac{\sigma}{3} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \frac{\sigma}{3} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \frac{\sigma}{3} \end{Vmatrix}; \quad D_\varepsilon = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x - \frac{\varepsilon}{3} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \frac{\varepsilon}{3} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \frac{\varepsilon}{3} \end{Vmatrix};$$

f – некоторая функция инвариантов девиаторов; σ – среднее давление в точке; $\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$; ε – относительное изменение объема, $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – компоненты напряжений и деформаций.

Представляет интерес выбор определяющих уравнений теории пластичности в общем случае нагружения без использования предложения о пропорциональности девиаторов деформаций и напряжений.

Для установления связи между напряжениями и деформациями будем считать, что между тензором деформаций T_ε и тензором напряжений T_σ существует зависимость

$$T_\varepsilon = F(T_\sigma)\,, \qquad (2)$$

где F - некоторая функция.

Заметим, что тензоры T_ε и T_σ являются симметричными, а главные их оси могут совпадать или не совпадать. В дальнейшем при преобразовании зависимости (2) используем некоторые результаты работы [4]. Будем предполагать, что функция (2) может быть представлена в виде бесконечного ряда

$$T_\varepsilon = f_0 T_1 + f_1 T_\sigma + f_2 T_\sigma^2 + \ldots + f_n T_\sigma^n + \ldots + , \qquad (3)$$

где коэффициенты $f_n = f_n(b_1, b_2, b_3)$; $n = 1,2,3,\ldots$ являются скалярами вследствие изотропности среды и могут зависеть от инвариантов b_1, b_2 и b_3 тензора T_σ ; T_1 - единичный тензор.

Заметим, что ряд (3) можно преобразовать к его отрезку, содержащему только три члена. Для этого необходимо использовать теорему Гамильтона - Кэли, согласно которой каждая матрица является корнем своего характеристического уравнения. В частности, тензор напряжений

$$T_\sigma = \left\| \begin{matrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{matrix} \right\| \qquad (4)$$

является корнем уравнения

$$T_\sigma^3 - S_2 T_\sigma^2 + S_1 T_\sigma - S_0 T_1 = 0\,, \qquad (5)$$

где $S_0 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$; $S_1 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3$; $S_2 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$.

Применяя последовательно формулу (5) к ряду (3), после преобразований получим

$$T_\varepsilon = A_0 T_1 + A_1 T_\sigma + A_2 T_\sigma^2\,, \qquad (6)$$

где A_0 , A_1 , A_2 - некоторые функции инвариантов S_0 , S_1, S_2 , явный вид которых можно найти, например, в работе [4].

Заметим, что уравнения связи в форме (6), по-видимому, были предложены М.Рейнером.

Для выбора определяющих уравнений деформационной теории пластичности горных пород и строительных материалов в качестве тензоров в формуле (6) примем девиаторы D_ε и D_σ . Тогда

$$D_\varepsilon = Z T_1 + X D_\sigma + Y D_\sigma^2\,, \qquad (7)$$

где X , Y , Z - некоторые функции инвариантов девиаторов напряжений.

Одна из неизвестных функций инвариантов девиатора в правой части зависимости (7) находится из условия, чтобы первый инвариант тензора $ZT_1 + XD_\sigma + YD_\sigma^2$ был равен нулю, поскольку с левой стороны стоит девиатор. Отсюда получим $Z = -2/3Y$.

Таким образом, связь между девиаторами напряжений и деформаций в самом общем виде для любого изотропного нелинейного тела записывается так:

$$D_\varepsilon = X D_\sigma + Y\left(D_\sigma^2 - \frac{2}{3} I_2 T_1\right), \tag{8}$$

где $I_2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_3-\sigma_1)^2\right]$.

Для определения неизвестных X и Y в уравнении (8) необходимо привлечь экспериментальные данные. Рассмотрим вначале состояние упрочнения, при котором зависимость между $\gamma_{max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$ и $\tau_{max} = (\sigma_1-\sigma_3)/2$ имеет вид

$$\gamma_{max} = \varphi(\tau_{max}), \tag{9}$$

где φ - известная функция.

Введем два новых инварианта c, μ, которые выражаются через инварианты I_2, σ, χ, e_2, ε и ξ с помощью зависимостей

$$c = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{I_2}\,\sin\left(\chi + \frac{4}{3}\pi\right) + \frac{\sigma}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{I_2}\,\sin\left(\chi + \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{\sigma}{3}}; \tag{10}$$

$$\mu = -\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = -\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{e_2}\,\sin\left(\xi + \frac{4}{3}\pi\right) + \frac{\varepsilon}{3}}{\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{e_2}\,\sin\left(\xi + \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{\varepsilon}{3}},$$

где

$$e_2 = \frac{1}{6}\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2\right];$$

$$tg\,\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\,\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_3}{\varepsilon_1-\varepsilon_3} - 1\right); \tag{11}$$

$$tg\,\chi = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\,\frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3} - 1\right).$$

В качестве второго условия примем зависимость между инвариантами

$$\mu = \Omega(c), \tag{12}$$

где $\Omega(c)$ - известная из эксперимента функция.

Таким образом, для нахождения неизвестных функций X и Y имеем два условия.

Используя условия (9) и (12), в явном виде можно записать выражения для X и Y:

$$X = \frac{\gamma_{max}}{\sigma_1-\sigma_3} - Y\left(\sigma_1 + \sigma_3 - \frac{2}{3}\sigma\right);$$

$$Y = \frac{\gamma_{max}\left[\mu\left(\sigma_1 - \frac{\sigma}{3}\right) + \sigma_3 - \frac{\sigma}{3}\right] + \frac{\varepsilon}{3}(\sigma_1-\sigma_3)(\mu-1)}{\left[\left(\sigma_3 - \frac{\sigma}{3}\right)^2 - \mu\left(\sigma_1 - \frac{\sigma}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} I_2 (1-\mu)\right](\sigma_1-\sigma_3) + (\sigma_1-\sigma_3)(\sigma_1+\sigma_3-\frac{2}{3}\sigma)\left[\left(\sigma_1 - \frac{\sigma}{3}\right)\mu - \left(\sigma_3 - \frac{\sigma}{3}\right)\right]}. \tag{13}$$

Рассмотрим состояние текучести. Пусть условие пластичности имеет вид

$$\sigma_1 - \sigma_3 = f(c). \tag{14}$$

Функция $f(c)$ в условии (13) может быть принята [5] в виде

$$f(c) = 2\tau_0\, e^{Ac}, \tag{15}$$

где τ_0, A - постоянные.

Заметим, что условие (I5) хорошо описывает предельные состояния горных пород и строительных материалов. Значения параметров τ_0 и A для 23 типов горных пород можно найти в работе [5].

Одна неизвестная функция может быть найдена из уравнения (I2):

$$Y = \frac{\frac{\varepsilon}{3}(\mu-1) + X\left[\mu\left(\sigma_1 - \frac{\sigma}{3}\right) + \sigma_3 - \frac{\sigma}{3}\right]}{\left(\sigma_3 - \frac{\sigma}{3}\right)^2 - \mu\left(\sigma_1 - \frac{\sigma}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} I_2 (1-\mu)} . \qquad (I6$$

Для определения второй неизвестной нужно использовать условие пластичности (I5).

На основе анализа многочисленных экспериментов в работе [5] предложена единая обобщенная кривая остаточной деформации, описывающая поведение всех исследованных типов горных пород в неупругой области:

$$\varepsilon_1 = \Phi\left(\tau_{max} - \tau_y e^{B\varepsilon}\right), \qquad (I7$$

где Φ - известная функция; τ_y и B - постоянные.

В первом приближении в качестве Φ предлагается использовать параболическую зависимость

$$\varepsilon_1 = k_1 \left(\tau_{max} - \tau_y e^{B\varepsilon}\right)^2,$$

где k - постоянная.

Используя для определения X и Y условия (I2) и (I7), легко найти

$$X = \frac{\Phi\left(\tau_{max} - \tau_y e^{B\varepsilon}\right)}{\sigma_1 - \frac{\sigma}{3}} - Y \frac{\left(\sigma_1 - \frac{\sigma}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} I_2}{\sigma_1 - \frac{\sigma}{3}};$$

$$Y = \frac{\left[\Phi\left(\tau_{max} - \tau_y e^{B\varepsilon}\right) - \frac{\varepsilon}{3}\right]\left[\mu\left(\sigma_1 - \frac{\sigma}{3}\right) + \sigma_3 - \frac{\sigma}{3}\right] + \frac{\varepsilon}{3}(\mu-1)\left(\sigma_1 - \frac{\sigma}{3}\right)}{\left[\left(\sigma_1 - \frac{\sigma}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} I_2\right]\left[\mu\left(\sigma_1 - \frac{\sigma}{3}\right) + \sigma_3 - \frac{\sigma}{3}\right] - \left(\sigma_1 - \frac{\sigma}{3}\right)\left[\left(\sigma_3 - \frac{\sigma}{3}\right)^2 + \mu\left(\sigma_1 - \frac{\sigma}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} I_2 (1-\mu)\right]} . \qquad (I8$$

Горные породы при деформировании в допредельном и предельном состояниях склонны к разрыхлению или разуплотнению. Разрыхление их в предельном состоянии может быть описано зависимостью [5]

$$\varepsilon^p = \varepsilon_0 e^{M\varepsilon}\left(1 - 2\mu_0 e^{-\Gamma\varepsilon}\right), \qquad (I9)$$

где ε_0, M, μ_0, Γ - параметры, значения которых приведены в работе [5].

Относительное изменение объема пород при деформировании состоит из упругой и необратимой деформации и может быть определено по формуле

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p = 3\frac{1-2\nu}{E}\sigma + \varepsilon^p , \qquad (20$$

где ν и E - соответственно коэффициент Пуассона и модуль упругости горной породы.

Таким образом, приведенные данные позволяют сформулировать деформационную теорию пластичности горных пород. Основные ее положения следующие:

1) тело изотропно;
2) относительное изменение объема определяется по закону (20);
3) связь между девиаторами деформаций и напряжений имеет вид (8).

Запишем уравнения (8) в координатной форме:

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon}{3} + X\left(\sigma_x - \frac{\sigma}{3}\right) + Y\left[\left(\sigma_x - \frac{\sigma}{3}\right)^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 - \frac{2}{3} I_2\right];$$

$$\varepsilon_y = \frac{\varepsilon}{3} + X\left(\sigma_y - \frac{\sigma}{3}\right) + Y\left[\left(\sigma_y - \frac{\sigma}{3}\right)^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 - \frac{2}{3} I_2\right];$$

$$\varepsilon_z = \frac{\varepsilon}{3} + X\left(\sigma_z - \frac{\sigma}{3}\right) + Y\left[\left(\sigma_z - \frac{\sigma}{3}\right)^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 - \frac{2}{3} I_2\right];$$

$$\gamma_{xy} = 2X\tau_{xy} - 2Y\left[\left(\sigma_z - \frac{\sigma}{3}\right)\tau_{xy} - \tau_{xz}\,\tau_{yz}\right]; \qquad (21)$$

$$\gamma_{xz} = 2X\tau_{xz} - 2Y\left[\left(\sigma_y - \frac{\sigma}{3}\right)\tau_{xz} - \tau_{xy}\,\tau_{zy}\right];$$

$$\gamma_{yz} = 2X\tau_{yz} - 2Y\left[\left(\sigma_x - \frac{\sigma}{3}\right)\tau_{yz} - \tau_{yx}\,\tau_{zx}\right].$$

Необходимо заметить, что на тензорную нелинейность между девиаторами деформаций и напряжений оказывает влияние коэффициент поперечных деформаций, величина которого может быть вычислена по формуле [5]

$$\mu = \mu_0 e^{-\Gamma c}. \qquad (22)$$

Согласно экспериментальным данным значение его при $c = 0$ может достигать нескольких единиц и с возрастанием c стремится к $\mu = 0{,}5$.

Для пластически несжимаемой среды $\mu = 0{,}5$. При нагружении $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 = \sigma_3$ величина Y в уравнениях (21) обращается в нуль и имеет место пропорциональность (1) девиаторов деформаций и напряжений.

В работе [1] для пластичности несжимаемой среды $\varepsilon^p = 0$ предложено неизвестные коэффициенты X и Y определять из зависимостей между вторыми инвариантами деформаций e_2 и напряжений I_2 и соответственно между углами вида χ напряженного и деформированного ξ состояний. Выражения для X и Y имеют вид

$$X = \sqrt{\frac{e_2}{I_2}}\,\frac{\cos(2\chi + \xi)}{\cos 3\chi};$$

$$Y = \frac{\sqrt{3e_2}}{I_2}\,\frac{\sin(\chi - \xi)}{\cos 3\chi}. \qquad (23)$$

Для условий испытаний $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 = \sigma_3$. Из первых двух зависимостей (11) следует равенство углов χ и ξ. Тогда величина Y в соотношениях (23) обращается в нуль и имеет место пропорциональность между девиаторами деформаций и напряжений.

Таким образом, из предложенных уравнений, независимо от результатов работы [1], следует условие, при котором наблюдается пропорциональность между девиаторами деформаций и напряжений.

Уравнения (21) можно использовать для описания процессов деформирования материалов, у которых пределы прочности на растяжение и сжатие значительно отличаются. К ним можно отнести горные породы, строительные

и некоторые другие материалы. В процессе деформирования таких материалов, в силу различия пределов прочности, модулей сдвига при разных видах деформаций, возникает анизотропия, которая носит название деформационной анизотропии.

Для случая плоской деформации

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\varepsilon}{3} + X\left(\sigma_x - \frac{\sigma}{3}\right) + Y\left[\left(\sigma_x - \frac{\sigma}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} I_2\right]; \\
\varepsilon_y &= \frac{\varepsilon}{3} + X\left(\sigma_y - \frac{\sigma}{3}\right) + Y\left[\left(\sigma_y - \frac{\sigma}{3}\right)^2 - \frac{2}{3} I_2\right]; \\
\gamma_{xy} &= 2X\tau_{xy} - 2Y\tau_{xy}\left(\sigma_z - \frac{\sigma}{3}\right).
\end{aligned} \tag{24}$$

Из уравнений (24) можно получить

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} - Y(\sigma_x - \sigma_y)\left(\sigma_x + \sigma_y - \frac{2}{3}\sigma\right)}{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2Y\left(\sigma_z - \frac{\sigma}{3}\right)\tau_{xy}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}, \tag{25}$$

где u , v - перемещения соответственно в направлении осей O_x и O_y.

Из соотношений (25) следует, что направления площадок наибольших касательных напряжений и наибольших сдвигов не совпадают.

Ранее было показано [3], что для плоской деформации при условии пластичности (I5) уравнения характеристик системы деформационных уравнений имеют вид

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\psi = \frac{\sin 2\psi_1 \pm \sqrt{1-\Phi_1^2}}{\cos 2\psi_1 + \Phi_1}, \tag{26}$$

где $\Phi_1 = \frac{1-c}{1+c+2/A(1-c)}$; ψ_1 - угол между σ_1 и осью O_x.

Необходимо отметить, что сопоставление значений углов ориентировки фактических сдвигов, полученных при экспериментах [5], и углов наклона линий характеристик (26) показывает их расхождение. Так, даже для такой однородной породы, как мрамор, углы ориентировки наибольшего сдвига составили при c , равном 0 и 0,408, соответственно 29,23 и 43,685°. Значения угла ψ , вычисленные по формуле (26) при тех же значения c , равны 23,5 и 37,5°. Расхождение углов в среднем составляет около 6°. Для других типов пород также установлено расхождение значений углов.

В виде приложения сформулированной теории пластичности рассмотрим задачу о напряженно-деформированном состоянии массива вокруг выработки кругового очертания. Постановка ее сводится к исследованию распределения напряжений и перемещений в бесконечной плоскости с круговым отверстием, по контуру которого приложены усилия $\sigma_z = p$, $\tau_{z\varphi} = 0$. На бесконечности плоскость сжимается усилием $\sigma_z = \sigma_\varphi = \gamma H$, где γ - средний объемный вес; H - глубина заложения выработки.

Радиус области неупругих деформаций для условия пластичности (5) вычисляется по формуле [2]

$$r_0^2 = \frac{c_1\tau_0}{(k\gamma H)^2} \cdot \frac{\exp\left(\frac{2A}{A - \ln\frac{k\gamma H}{r_0}}\right)}{\left(A + \ln\frac{k\gamma H}{r_0}\right)^{2A}}, \tag{27}$$

где

$$c_1 = \frac{\tau_1^2}{\tau_0}\left(A - \ln\frac{\tau_1}{\tau_0}\right)^{2A} \exp\left(-\frac{2A}{A-\ln\frac{r_1}{r_0}}\right); \qquad p = 2\tau_1 \frac{\ln\frac{\tau_1}{\tau_0}}{A-\ln\frac{\tau_1}{\tau_0}};$$

k является корнем уравнения

$$A\frac{1-k}{1+k} = \ln\frac{k\gamma H}{\tau_0}. \qquad (28)$$

При определении перемещения в пластической области пренебрежем в сумме (20) упругой составляющей. Тогда условие (20) может быть записано в следующем виде:

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = \varepsilon_0 e^{Mc}\left(1 - 2\mu_0 e^{\Gamma c}\right). \qquad (29)$$

Перемещение контура выработки может быть найдено из уравнения (29) путем интегрирования и удовлетворения условиям непрерывности перемещений на границе раздела упругой и пластической сред:

$$u = (1+\nu)\frac{kr_0^2}{E}\left[\gamma H R_0 - R_0 r_0 \int_1^{r_0} e^{Mc}\left(1 - 2\mu_0 e^{-\Gamma c}\right) r\,dr\right], \qquad (30)$$

где R_0 – радиус выработки.

Интеграл в выражении (30) численно может быть найден с учетом связи между c и r:

$$r^2 = \frac{c_1\tau_0}{e^{2Ac}} \frac{\exp\left(\frac{2}{1-c}\right)}{(A-Ac)^{2A}}.$$

Определим пластическую зону и перемещения контура горной выработки, расположенной в известняке, при следующих исходных данных: H = 1200 м, A = 5,2; p = 0; τ_0 = 3 МПа; μ_0 = 1,22; Γ = 1,05; M = 12,1; ε_0 = $= 0{,}578\cdot10^{-3}$; R_0 = 2,0 м; E = $2{,}7\cdot10^{10}$ Па; ν = 0,5.

Согласно формуле (27) радиус пластической зоны $r_0 = 2{,}5R_0$. Перемещения контура горной выработки, вычисленные без и с учетом дилатансии, соответственно равны 0,84 и 8,5 см. В данном случае дилатансия пород увеличивает перемещения контура примерно в 10 раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В.В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно-упругой среде. – ПММ, 1951, т.XУ, вып.2.

2. Протосеня А.Г. Дилатансия горных пород. – В кн.: Устойчивость и крепление горных выработок. Л., изд.ЛГИ, 1977 (межвуз.сб., вып.4).

3. Протосеня А.Г., Черников А.К. Об интегрировании основной системы уравнений теории предельного равновесия при условии разрушения А.Н.Ставрогина. – В кн.: Физические процессы горного производства. Л., изд.ЛГИ, 1979 (межвуз.сб., вып.7).

4. Рейнер М. Реология. М., Наука, 1965.

5. Ставрогин А.Н., Протосеня А.Г. Пластичность горных пород. М., Недра, 1979.