Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г.В.Плеханова,
т. LXXXIII, 1981 г.

УДК 624.131.1

МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ЭЦВМ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРЕХСЛОЙНЫХ СХЕМ

В.В.АНТОНОВ

В настоящее время математическое моделирование на ЭЦВМ неустановившейся фильтрации подземных вод осуществляется, в основном, с использованием двухслойных конечно-разностных схем [I, 5]. При расчетах в неоднородных областях фильтрации, как правило, применяются неявные или явно-неявные [I, 3, 5] двухслойные схемы. Возникающие при этом трудности математического характера, а также необходимость использования относительно мощных ЭЦВМ, сдерживают возможности широкого внедрения численных методов в практику гидрогеологических расчетов. Представляет интерес поиск устойчивых явных схем, пригодных для решения задач неустановившегося движения подземных вод в неоднородных областях фильтрации на малых ЭЦВМ.

В качестве перспективного класса для поисков подобных устойчивых явных схем может быть выбран класс трехслойных схем, где до настоящего времени уже имелся пример абсолютно устойчивой явной схемы Дюфордта - Франкела [I]. В статье излагаются результаты построения оптимальной абсолютно устойчивой явной трехслойной схемы с использованием интегроразностного метода, приводятся также результаты численных экспериментов по оценке точности данной схемы.

Для моделирования на ЭЦВМ неустановившейся фильтрации подземных вод нами был предложен метод, использующий идеи метода конечных элементов в модификации, предложенный в работе [2].

Как известно, метод конечных элементов [2] основан на замене решения дифференциального уравнения равносильной задачей об отыскании минимума интеграла энергии (способ Ритца) или задачей решения интегрального тождества, полученного специальным образом из исходного дифференциального уравнения (способ Бубнова - Галеркина). Способ Бубнова - Галеркина является более общим, в частности, в отличие от способа Ритца, он применим для решения дифференциальных уравнений с конвективным членом (задачи массо- и теплопереноса в подземных водах).

Построение трехслойной явной интегроразностной схемы проведем с использованием интегрального тождества Бубнова - Галеркина[x].

Рассмотрим задачу плановой неустановившейся фильтрации в некоторой произвольной области Ω с внешней границей ω. Будем предполагать, что на границе ω выполняются граничные условия первого или второго родов.

Как известно, исходное дифференциальное уравнение, описывающее процесс плановой неустановившейся фильтрации, имеет вид

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial H}\left(T(x,y)\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T(x,y)\frac{\partial H}{\partial y}\right), \qquad (1)$$

где μ - водоотдача; H - напор подземных вод; t - время; x и y - декартовы координаты; $T(x,y)$ - водопроводимость водоносного горизонта.

В условиях напорного движения уравнение (1) является линейным, при безнапорном движении оно нелинейно, поскольку в этом случае величина $T(x,y)$ оказывается зависящей от напора, точнее от изменения мощности подземного потока.

Будем считать уравнение (1) линейным и решать при следующих начальных и граничных условиях:

$$H\big|_{t=0} = H^0; \quad H\big|_{\omega} = H^1, \qquad (2)$$

или

$$\frac{\partial H}{\partial \nu} = q, \qquad (3)$$

где ν - внешняя нормаль к границе ω.

Гидрогеологическая интерпретация выражений (2)-(3) общеизвестна (например, [5]), и здесь мы на ней не останавливаемся.

Рассмотрим время t как дополнительную (третью) координату. Тогда областью, в которой задана задача (1)-(3), будем считать цилиндр $W = \Omega \times (0,t)$, где Ω - основание цилиндра (область фильтрации в обычном понимании); $(0, t)$ - высота цилиндра (время, в течение которого изучается процесс).

Умножим уравнение (1) на некоторую произвольную функцию $\varphi(x,y,t)$ и проинтегрируем полученное произведение по области W. В результате получим следующее интегральное тождество [2]:

$$\int_0^t\iint_\Omega \mu \frac{\partial H}{\partial t}\varphi\, dx\, dy\, dt = -\int_0^t\iint_\Omega \left[T(x,y)\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + T(x,y)\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right] dx\, dy\, dt +$$

$$+ \int_0^t\int_\omega \left[T(x,y)\frac{\partial H}{\partial x}\varphi\cos(\hat{\nu,x}) + T(x,y)\frac{\partial H}{\partial y}\varphi\cos(\hat{\nu,y})\right] dx\, dy\, dt, \qquad (4)$$

где $\cos(\hat{\nu,x}), \cos(\hat{\nu,y})$ - косинусы углов между направлением внешней нормали к границе ω и осям координат.

---

[x] Разностные схемы, построенные на основе интегрального тождества Бубнова - Галеркина, вероятно, целесообразнее называть интегро-разностными, в отличие от вариационно-разностных схем, полученных на основе способа Ритца, поскольку в данном случае вариационная задача не решается как таковая.

Последнее слагаемое в уравнении (4) представляет собой контурный интеграл по границе цилиндра W и физически отражает поступление подземных вод через границу области фильтрации ω за промежуток времени $(0, t)$.

Как показано в работах [1, 2], решение краевой задачи (1)-(3) эквивалентно решению интегрального тождества (4), которое часто называют интегральным тождеством Бубнова - Галеркина [2].

Заметим, что при выборе функции φ равной единице по всей области W выражение (4) является, по существу, интегральным аналогом уравнения неразрывности фильтрационного потока, т.е. уравнения, выражающего закон сохранения массы по области фильтрации Ω в интервале времени $(0, t)$.

Для численного решения тождества (4), разобьем область фильтрации прямыми линиями:

$$x = i\Delta x_i\ ,\quad i = 1,2,\ldots,N,\quad y = j\Delta y_j\ ,\quad j = 1,2,\ldots,M,$$

где $\Delta x_i, \Delta y_j$ - шаги сетки в направлении осей абсцисс и ординат, в общем случае величины Δx_i и Δy_j могут быть неравномерными; N и M - число дроблений по соответствующим осям.

Каждую полученную прямолинейную ячейку разделим диагональю, образующей острый угол с положительным направлением оси x, на два треугольника.

Построенная таким образом триангуляционная сетка носит достаточно упорядоченный характер, что позволяет в дальнейшем относительно просто организовать алгоритм счета.

В общем случае сетка триангуляции может быть неупорядоченной, т.е. образующие треугольники могут быть различной формы и размеров. Однако организация счета на подобных неупорядоченных сетках представляет собой весьма сложную проблему. Кроме того, на неупорядоченных сетках возникают дополнительные ошибки (помимо ошибок аппроксимации), обусловленные незакономерным положением узловых точек [1].

Промежуток времени от 0 до t разобьем на элементарные отрезки: $t_k = k\Delta t_k$, $k = 1, 2, \ldots, K$ (здесь Δt_k - шаг дробления по времени, в общем случае величина может быть переменной; K - число элементарных отрезков времени).

В качестве функции $\varphi(x,y,t)$ выберем базисную функцию вида:

$$\varphi(x,y,t)\ \begin{cases} \varphi_{ij}(x,y) & \text{при } t \in [t', t''] \\ 0 & \text{при } t \bar{\in} [t', t''], \end{cases}$$

где $\varphi_{ij}(x,y)$ - функция, равная единице в узле (x_i, y_j) и нулю во всех прочих и линейная в каждом треугольнике; $[t', t'']$ - некоторый промежуток времени, на котором величина Δt_k должна укладываться целое число раз; символы $\in$ и $\bar{\in}$ означают принадлежность и непринадлежность отрезкам $[t', t'']$.

Введением базисной функции φ интегрирование по области фильтрации заменяется суммированием по объединению треугольников, имеющих узел (x_i, y_j) в качестве одной из своих вершин, а интегрирование по промежутку $[0, t]$ заменяется суммированием по отрезкам $[t', t'']$.

В пределах каждого треугольника функцию $H(x, y, t)$ будем считать линейной, тогда для внутренних узловых точек решение интегрального тождества (4) равносильно решению системы уравнений следующего вида:

$$\int_{t'}^{t''}\iint_{S}\mu\frac{\partial H}{\partial t}\varphi\,dx\,dy\,dt=-\int_{t'}^{t''}\Bigg[-\frac{1}{(x_{i+1}-x_i)^2}(H_{i+1}-H_{ij})\iint_{S_1}T(x,y)\,dx\,dy-$$

$$-\frac{1}{(y_{j+1}-y_j)^2}(H_{ij+1}-H_{ij})\iint_{S_2}T(x,y)\,dx\,dy+\frac{1}{(x_i-x_{i-1})}(H_{ij}-H_{i-1j})\times$$

$$\times\iint_{S_3}T(x,y)\,dx\,dy-\frac{1}{(y_{j+1}-y_j)^2}(H_{ij+1}-H_{ij})\iint_{S_3}T(x,y)\,dx\,dy+$$

$$+\frac{1}{(x_i-x_{i-1})^2}(H_{ij}-H_{i-1j})\iint_{S_4}T(x,y)\,dx\,dy+\frac{1}{(y_j-y_{j-1})^2}(H_{ij}-H_{ij-1})\times$$

$$\times\iint_{S_5}T(x,y)\,dx\,dy-\frac{1}{(x_{i+1}-x_i)^2}(H_{i+1j}-H_{ij})\iint_{S_6}T(x,y)\,dx\,dy+$$

$$+\frac{1}{(y_j-y_{j-1})^2}(H_{ij}-H_{ij-1})\iint_{S_6}T(x,y)\,dx\,dy\Bigg]dt, \qquad (5)$$

где $H_{ij}=H(x_i, y_j, t)$; S – площадь треугольников с общей вершиной (x_i, y_j); $S_1,\ldots,S_6$ – площади треугольников I, 2, ..., 6.

Зависимость (5) дает общий вид интегроразностных схем для внутренних узлов сеточной области. Конкретный вид схем зависит от выбора пределов интегрирования t' и t'', а также от способов вычисления интегралов (квадратурных формул) по времени и по площади треугольников.

Построение интегроразностных схем для граничных узлов проводится следующим образом.

В условиях первой краевой задачи значение функции $H(x, y, t)$ на границе принимается равным $H^1(x, y, t)$, при этом значения базисной функции на границе обычно принимаются равными нулю. При задании на границе условий второго рода построение схемы проводится с использованием зависимости (5), но учитываются только треугольники, лежащие внутри области фильтрации. Кроме того, в правую часть разностной схемы добавляется слагаемое, равное величине дополнительного расхода подземных вод, поступающего через границу области фильтрации за промежуток $[t', t'']$.

Интегроразностные схемы, построенные с использованием уравнения (5), применимы и для случаев разрывных фильтрационных параметров. С подобными условиями встречаются, например, в условиях горизонтального переслаивания хорошо и плохо проницаемых водоносных прослоев, а также при резкой фациальной изменчивости, когда коэффициенты фильтрации (или водопроводимости) и водоотдачи изменяются скачкообразно.

Для построения явных трехслойных схем предположим далее, что на промежутке $[t', t'']$ функция изменяется линейно. Положим $t' = t_{k-1}$, $t'' = t_{k+1}$, тогда, с использованием теории о среднем, аппроксимация интегралов по времени может быть приведена следующим образом:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} H_{ij}\,dt = \left(\frac{1}{2}H_{ij}^{k+1} + \frac{1}{2}H_{ij}^{k-1}\right)(t_{k+1} - t_{k-1}) = H_{ij}^{k}(t_{k+1} - t_{k-1}),$$

где $H_{ij}^{k} = H(x_i, y_j, t_k)$.

Если теперь положить, что для самой узловой точки (x_i, y_j) интегралы будут вычисляться как полусумма значений напоров в моменты t_{k-1} и t_{k+1}, а для всех соседних узловых точек – как значение напора в момент t_k, то мы получим явную, относительно значения H_{ij}^{k+1}, трехслойную схему.

Для внутренних узловых точек эта схема имеет следующий вид:

$$\frac{(\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2 + \cdots + \mu_6 S_6)}{3}\,\frac{H_{ij}^{k+1} - H_{ij}^{k-1}}{t_{k+1} - t_{k-1}} = \frac{H_{i+1}^{k} - \tilde{H}_{ij}}{\Phi_x^1} +$$

$$+ \frac{H_{ij+1}^{k} - \tilde{H}_{ij}}{\Phi_y^2} - \frac{\tilde{H}_{ij} - H_{i-1j}^{k}}{\Phi_x^3} + \frac{H_{ij}^{k} - \tilde{H}_{ij}}{\Phi_y^3} - \frac{\tilde{H}_{ij} - H_{i-1j}^{k}}{\Phi_x^4} -$$

$$- \frac{\tilde{H}_{ij} - H_{ij-1}^{k}}{\Phi_y^5} + \frac{H_{i+1}^{k} - \tilde{H}_{ij}}{\Phi_x^6} - \frac{\tilde{H}_{ij} - H_{ij-1}^{k}}{\Phi_y^6}, \qquad (6)$$

где $\tilde{H}_{ij} = \frac{1}{2}H_{ij}^{k+1} + \frac{1}{2}H_{ij}^{k-1}$; $\mu, \ldots, \mu_6$ – среднее значение водоотдачи в треугольниках I, ..., 6; Φ_x, Φ_y – фильтрационные сопротивления треугольников в направлении осей x и y (номер треугольника дан в надстрочном индексе).

Построенная явная схема является абсолютно устойчивой, что может быть доказано с использованием принципа максимума [2].

Физически левая часть равенства (6) выражает расход подземных вод, поступивших в пласт за счет сработки емкостных запасов с площади, равной одной трети S, т.е. с одной трети площади всех шести треугольников с вершиной в точке (x_i, y_j). Поскольку при расчетах каждый треугольник троекратно участвует в счете, то в итоге учитывается сработка емкостных запасов за время $[t_{k-1}, t_{k+1}]$ по всей области фильтрации.

В правой части выражения (6) по существу записан баланс расхода (накопление или отток) подземных вод по пространственным координатам в пределах элементарной ячейки с общей вершиной в точке (x_i, y_j). Естественно, что накопление или отток подземных вод из элементарной ячейки должны компенсироваться расходом, поступающим в нее за счет емкости пласта. Таким образом, построенная явная трехслойная интегроразностная схема выражает на сетке закон сохранения массы, т.е. является консервативной [2].

Для численной реализации трехслойной явной схемы (6) необходимо знание напоров подземных вод в моменты t_{k-1} и t_k, т.е. H^{k-1} и H^k. При расчетах H^{k-1} принимается равным начальным условиям, а значение H^k можно находить по обычным двухслойным явным или неявным схемам [2]. Значение

напоров в момент времени t_k может быть также принято равным величине H^{k-1}, т.е. $H^k = H^{k-1}$, что соответствует условиям, при которых первоначальный промежуток времени $[t_{k-1}, t_k]$ принимается равным нулю. В этом случае в начале счета величина H^{k+1} относится к промежутку $[t_k, t_{k+1}]$. Как показали результаты специальных численных экспериментов, предлагаемый прием не дает сколько-нибудь заметной погрешности.

Теоретически точность построенной трехслойной явной схемы может быть оценена величиной порядка $O[(\Delta t)^2+(\Delta x)^2+(\frac{\Delta t}{\Delta x})^2]$, где O означает порядок величин, записанных в квадратных скобках. Отсюда следует, что трехслойная явная схема может быть использована лишь при выполнении соотношений $\Delta t / \Delta x < 1$ и $\Delta t / \Delta y < 1$. На практике это означает, что при вычислениях число шагов по времени должно превышать число дроблений по пространству.

Можно заметить также, что при относительно малом числе шагов по времени точность трехслойной явной схемы будет несколько меньше, чем точность двухслойной неявной схемы (напомним, что точность этой схемы оценивается величиной порядка $[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+\Delta t]$), а при достаточно большом числе шагов по времени точность трехслойной схемы может превзойти точность двухслойной неявной схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М., Мир, 1972.

2. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М., Наука, 1971.

3. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. М., Наука, 1975.

4. Формирование и строение ореолов рассеяния вещества в подземных водах / Под ред. В.А.Грабовского. М., Недра, 1977.

5. Шестаков В.М. Динамика подземных вод. М., Изд-во МГУ, 1973.