Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г.В.Плеханова,
т. XXXVI, 1981 г.

УДК 622.245

УСЛОВИЯ НЕРАСТЕПЛЕНИЯ МНОГОЛЕТНЕМЕРЗЛЫХ ПОРОД ПРИ ЦЕМЕНТИРОВАНИИ ОБСАДНЫХ ТРУБ С ПРОГРЕВОМ

А.М.ЯКОВЛЕВ, А.Н.САЛАМАТИН

Надежность цементирования затрубного пространства в породах с отрицательными температурами определяется прочностью сцепления цементного камня с породой. Растепление пород в этой зоне приводит, с одной стороны, к изменению массовой доли воды в пристенной части цементного раствора, а с другой, к образованию каверн и пустот между породой и затвердевшим цементным камнем [I]. По образовавшимся каналам может циркулировать минерализованная вода, вплоть до самоизлива ее на поверхность. Поэтому только обеспечение нерастепляемости пород в стенках скважины при цементации может гарантировать надежность изоляции водоносного горизонта.

Задача о перераспределении температуры в цементном растворе и окружающих скважину породах в начальный период времени, до их растепления, когда температура пород не превышает температуру замерзания $t_з$ при оценке времени теплового воздействия за счет циркуляции по скважине горячей жидкости с температурой $t_ж$ рассмотрена ранее [4]. В безразмерном виде поставленная задача [4] может быть представлена так

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial Fo} = \frac{k_a}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial \theta_1}{\partial R}\right) + Qbe^{-bFo},\quad Fo>0,\ R_0<R<1;$$
$$\frac{\partial \theta_2}{\partial Fo} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial \theta_2}{\partial R}\right),\quad Fo>0,\ R>1; \qquad (I)$$

при

$$\theta_i = \frac{t_i - T_п}{t_з - T_п},\ i=1,2;\quad \theta_ц = \frac{t_ц - T_п}{t_з - T_п};\quad \theta_ж = \frac{t_ж - T_п}{t_з - T_п};$$
$$Fo = \frac{a_п \tau}{r_c^2};\quad R = \frac{r}{r_c};\quad R_0 = \frac{r_к}{r_c};\quad Q = \frac{\omega \bar{Q}}{c_п(t_з - T_п)};$$
$$b = \frac{a\, r_c^2}{a_п};\quad k_a = \frac{a_ц}{a_п};\quad k_\lambda = \frac{\lambda_ц}{\lambda_п}$$

с учетом следующих граничных условий:

а) $Fo=0$, $\theta_1=\theta_ц$; $\theta_2=0$;

б) $R=R_0$, $\theta_1=\theta_ж$;

в) $R=1$, $k_\lambda \frac{\partial\theta_1}{\partial R}=\frac{\partial\theta_2}{\partial R}$, $\theta_1=\theta_2$;

г) $\lim\limits_{R\to\infty}\theta_2<\infty$,

где $t_ц$ и $T_п$ – начальные температуры соответственно цементного раствора и горных пород, °С; $a_ц$, $a_п$ – коэффициенты температуропроводности цементного раствора и мерзлых пород, $м^2/с$; $\lambda_ц$, $\lambda_п$ – коэффициент теплопроводности цементного раствора и пород, Вт/($м^2\cdot$°С); $c_ц$ – удельная теплоемкость цементного раствора, Дж/(кг·°С); ω – массовая доля цемента в растворе; $\bar{Q}$ – полное количество тепла, выделяющееся при затвердевании единицы массы цемента, Дж/кг; a – параметр, характеризующий интенсивность и скорость тепловыделения; c^{-1}, τ – время, с; $r_с$, $r_к$ и r – радиусы скважины, обсадных труб и расстояние от оси скважины, м.

В принятых обозначениях началу фазовых переходов соответствует значение параметра Fo , при котором $\theta_2\big|_{R=1}=1$.

Задача (I) является линейной. Ее общее решение можно представить в виде суммы трех слагаемых:

$$\theta_i=\theta_ж X_i+\theta_ц Y_i+Q Z_i \ , \quad i=1,2, \tag{2}$$

где X_i , Y_i и Z_i – решения задачи (I) при а) $\theta_ж=1$, $\theta_ц=Q=0$; б) $\theta_ж=Q=0$; $\theta_ц=1$; в) $\theta_ж=\theta_ц=0$, $Q=1$, соответственно. Каждое из этих частных решений зависит от переменных R , Fo и параметров R_0, b , k_a , k_λ. Анализ функций X_i , Y_i и Z_i значительно проще, чем исследование общего решения, так как последнее зависит еще от $\theta_ж$, $\theta_ц$ и Q.

Определение и расчет функции X_i сделаны авторами ранее [4], поэтому рассмотрим задачу об определении функций Y_i и Z_i. Полагая в системе (2) $\theta_ж=0$, получим

$$\theta_i=\theta_ц Y_i+Q Z_i \ , \quad i=1,2. \tag{3}$$

Для приближенного решения равенства (3) введем в рассмотрение среднюю температуру цементного кольца

$$\bar{\theta}_1=\frac{2}{1-R_0^2}\int\limits_{R_0}^{1} R\theta_1\,dR \tag{4}$$

и проинтегрируем первое уравнение системы (I) по R (от R_0 до I). В результате получим

$$\frac{d\bar{\theta}_1}{d\,Fo}=\frac{2k_a}{1-R_0^2}\left(\left.\frac{\partial\theta_i}{\partial R}\right|_{R=1}-R_0\left.\frac{\partial\theta_1}{\partial R}\right|_{R=R_0}\right)+Q b e^{-bFo} \tag{5}$$

Примем приближенно, что профиль температуры в цементном кольце описывается следующей функциональной зависимостью:

$$\theta_1 \approx c_0 + c_1 \ln R + c_2 R^2, \quad R_0 \le R \le 1. \tag{6}$$

Воспользовавшись тем, что $\theta_1|_{R=R_0} = 0$, $\theta_1|_{R=1} = \theta_2|_{R=1}$, а также соотношением (4) и зависимостью (6), получим

$$\begin{aligned} &R_0^2 c_2 + c_1 \ln R_0 + c_0 = 0, \\ &c_2 + c_0 = \theta_2|_{R=1}, \\ &0{,}5(1+R_0^2)c_2 - 0{,}5\left(1 + \frac{2R_0^2 \ln R_0}{1-R_0^2}\right) c_1 + c_0 = \bar{\theta}_1. \end{aligned} \tag{7}$$

Решая систему линейных алгебраических уравнений (7), найдем соотношения, связывающие искомые коэффициенты с $\bar{\theta}_1$ и $\theta_2|_{R=1}$:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{1-R_0^2}\left(2\alpha\bar{\theta}_1 - (\alpha + R_0^2)\,\theta_2|_{R=1}\right), \\ c_1 &= \frac{\alpha}{\ln R_0}\left(\theta_2|_{R=1} - 2\bar{\theta}_1\right), \\ c_2 &= \frac{1}{1-R_0^2}\left((\alpha+1)\theta_2|_{R=1} - 2\alpha\bar{\theta}_1\right), \end{aligned} \tag{8}$$

где $$\alpha = \frac{(1-R_0^2)\ln R_0}{(1-R_0^2)(1+\ln R_0) + 2R_0^2 \ln R_0}.$$

Из выражения (6) получим

$$\left.\frac{\partial\theta_1}{\partial R}\right|_{R=1} \approx 2c_2 + c_1; \qquad R_0 \left.\frac{\partial\theta_1}{\partial R}\right|_{R=R_0} \approx 2R_0^2 c_2 + c_1. \tag{9}$$

Подставляя уравнения (8), (9) в зависимость (5), подойдем к задаче для определения $\bar{\theta}_1$:

$$\frac{d\bar{\theta}_1}{d\mathrm{Fo}} = \frac{4k_a}{1-R_0^2}\left((\alpha+1)\theta_2|_{R=1} - 2\alpha\bar{\theta}_1\right) + Q\,be^{-b\mathrm{Fo}}, \tag{10}$$

при $\mathrm{Fo} = 0$; $\bar{\theta}_1 = \theta_{\text{ц}}$.

Воспользовавшись первым приближенным равенством (9) и соотношениями (8), задачу для нахождения θ_2 при $\theta_{\text{ж}} = 0$ можно представить в виде

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial\,\mathrm{Fo}} = \frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\left(R\,\frac{\partial\theta_2}{\partial R}\right), \quad \mathrm{Fo} > 0, \quad R > 1; \tag{11}$$

при трех граничных условиях:

1) $\mathrm{Fo} = 0$, $\theta_2 = 0$;

2) $R = 1$, $\dfrac{\partial\theta_2}{\partial R} = \mathrm{Bi}(\theta_2 - \beta\bar{\theta}_1)$;

3) $\lim\limits_{R\to\infty} \theta_2 < \infty$,

где $$\beta = \frac{2\alpha(1+2\ln R_0 - R_0^2)}{\alpha(1+2\ln R_0 - R_0^2)+2\ln R_0},$$

$$Bi = k_\lambda \frac{\alpha(1+2\ln R_0 - R_0^2)+2\ln R_0}{(1-R_0^2)\ln R_0}.$$

Задача, аналогичная (II), была исследована А.Н.Саламатиным и М.А.Пудовкиным [3]. Точно так же, как в [2,3], найдем функцию

$$\Phi(Fo) = \frac{1}{Bi}\left.\frac{\partial\theta_2}{\partial R}\right|_{\substack{R=1\\ \beta\bar{\theta}_1=1}}.$$

Тогда из второго условия задачи (II) следует

$$\theta_2\Big|_{\substack{R=1\\ \beta\bar{\theta}_1=1}} = 1-\Phi(Fo). \qquad (12)$$

По теории Дюамеля из равенства (12) в общем случае при произвольной $\bar{\theta}_1$ найдем

$$\theta_2\Big|_{R=1}(Fo) = \beta\frac{d}{dFo}\int_0^{Fo}\bar{\theta}_1(s)\big(1-\Phi(Fo-s)\big)ds. \qquad (13)$$

Ранее [2, 3] было показано, что с достаточной степенью точности можно положить

$$\Phi(Fo) \approx \frac{1}{1+Bi\ln\left(1+\sqrt{2Fo}\right)}. \qquad (14)$$

Уравнения (10), (14) образуют замкнутую систему для определения величин $\bar{\theta}_1$ и $\theta_2|_{R=1}$, характеризующих процесс теплового взаимодействия цементного раствора с мерзлыми породами.

Подставляя равенство (13) в уравнение (10) и интегрируя по Fo с учетом условия $Fo = 0$ и $\bar{\theta}_1 = \theta_ц$, получим интегральное уравнение для определения $\bar{\theta}_1$:

$$\bar{\theta}_1 = \frac{4k_a}{1-R_0^2}\int_0^{Fo}\bar{\theta}_1(s)\left[\beta(\alpha+1)\big(1-\Phi(Fo-s)\big)-2\alpha\right]ds + \theta_ц + Q\left(1-e^{-bFo}\right). \qquad (15)$$

Из уравнения (13) найдем

$$\theta_2\Big|_{R=1} = -\beta\int_0^{Fo}\bar{\theta}_1(s)\Phi'(Fo-s)\,ds. \qquad (16)$$

Уравнения (15), (16) можно решить численно, методом конечных разностей. Для этого построим на оси Fo сетку с шагом h, обозначив

$$Fo = ih,\ U_i = \bar{\theta}_1(Fo_i),\ V_i = \theta_2|_{R=1}(Fo_i),\ \Phi = \Phi(Fo_i),$$

$$f_i = \theta_ц + Q\left(1-e^{-bFo_i}\right),\ E_i = \beta(\alpha+1)\big(1-\Phi(Fo_i)\big)-2\alpha,$$

$$\gamma = \frac{2h\,k_a}{1-R_0^2}.$$

В этом случае непрерывной задаче (I5) и (I6) можно поставить в соответствие разностную схему

$$U_i = \left[\gamma E_i U_{i-1} + \gamma \sum_{i=1}^{i=2} \sum_{k=0} \left(U_{k+1} E_{i-k-1} + U_k E_{i-k} \right) + f_i \right] / \left(1 + 2\alpha\gamma \right),$$
$$V_i = 0{,}5\beta \sum_{k=0} \left(U_{k+1} + U_k \right)\left(\Phi_{i-k-1} - \Phi_{i-k} \right). \qquad (17)$$

В результате вычисление функций $\bar{\theta}_1$ и $\theta_2|_{R-1}$ = I сводится к нахождению величин U_i и V_i из рекурентных соотношений (I7).

Полагая в зависимостях (I7) Q = 0 и $\theta_ц$ = I, получим уравнения для расчета функций $\bar{Y}_1$ и $Y_2|_{R-1}$.

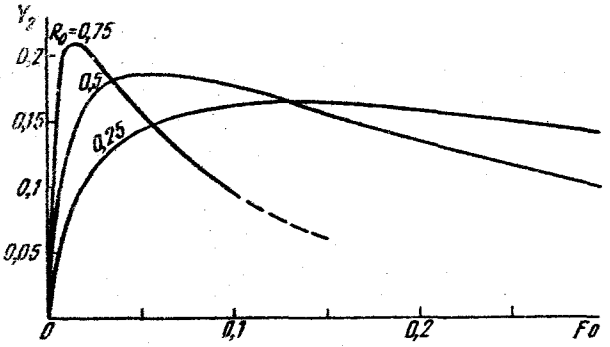


Рис.1. Зависимость функции Y_2(Fo) при R = 1

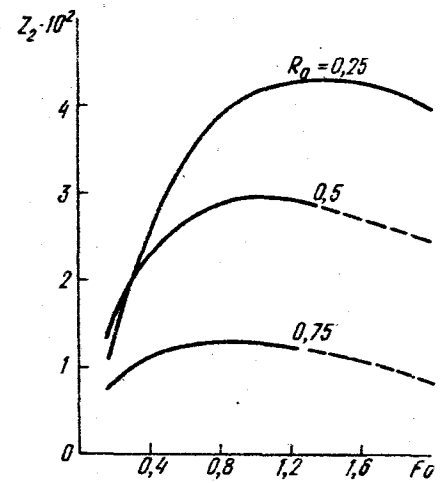


Рис.2. Зависимость функции Z_2(Fo) при R = 1

В случае $\theta_ц$ = 0, Q = I из соотношений (I7) можно найти разностную схему для определения величин $\bar{Z}_1$ и $Z_2|_{R-1}$. Зависимости $Y_2|_{R-1}$ и $Z_2|_{R-1}$ с учетом уравнения (3) позволяют рассчитывать температуру на стенке скважины в процессе цементирования при искусственном прогреве. Значения указанных зависимостей приведены на графиках (рис.I, 2), полученных для различных значений R_0 и фиксированных k_a = 0,2, k_λ = 0,I и b = 0,5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудряшов Б.Б., Яковлев А.М. Новая технология бурения скважин в мерзлых породах. Л., Недра, 1973.

2. Пудовкин М.А., Саламатин А.Н., Чугунов В.А. Температурные процессы в действующих скважинах. Казань, изд. Казанского ун-та, 1976.

3. Саламатин А.Н., Пудовкин М.А. Об охлаждении нефти при ее движении по скважине. Сб. аспирант. работ. Точные науки. Мех.физ. Казань, изд. Казанского ун-та, 1971.

4. Яковлев А.М., Саламатин А.Н. Время теплового воздействия при цементировании скважин в мерзлых породах. Сб. научн. трудов „Методика и техника разведки", № 108, Л., изд. ВИТР, 1978.