Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г.В.Плеханова,
т. LXXXVII, 1981 г.

УДК 625.322

ДИНАМИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛИ РЫЧАЖНОГО ТЯГОВОГО МЕХАНИЗМА

В.П.ВАСИЛЬЕВ

Тяговый механизм рычажного типа с регулируемым в зависимости от сопротивления движению прижатием ведущих колес находит применение в качестве привода транспортных и горнодобывающих машин [2].

Опытно-промышленные образцы механизма [I], использованные для продольной и поперечной подач камнерезных машин и угледобывающих комбайнов, выполнены в соответствии с рис.I. Рычаги 5, хомуты 7, угловые рычаги 3, тяги I образуют рычажную систему, которой ведущие колеса 6 прижимаются к тяговому рельсу под действием усилий R рамы 2 машины и пружин 4. Пружинами ведущие колеса прижимаются к рельсу с силой, соответствующей сопротивлению тягового механизма, которое невелико по сравнению с сопротивлением рамы.

Изменение сопротивления движению и соответственно тягового усилия ведущих колес сопровождается смещением шарниров механизма в поперечном по отношению к рельсу направлении в результате изгибных деформаций элементов его конструкции и перемещением всего механизма вдоль оси рельса относительно рамы вследствие трансформации рычажной системы поперечных рельсу смещений. Перемещение механизма вдоль оси рельса на порядок выше поперечных рельсу смещений его элементов, так как рычажная система имеет достаточно большое передаточное отношение

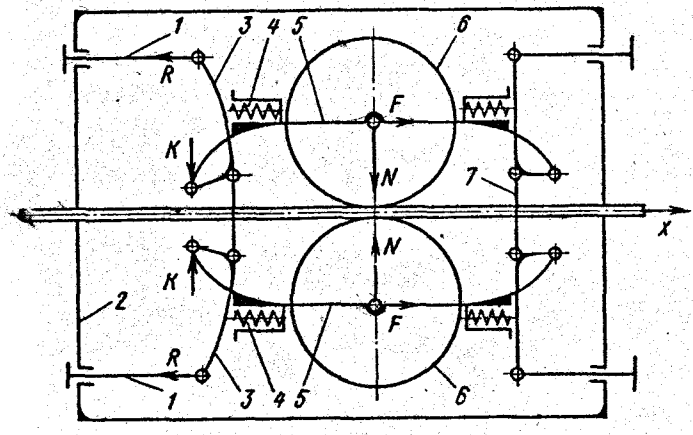


Рис.I. Кинематическая схема тягового механизма

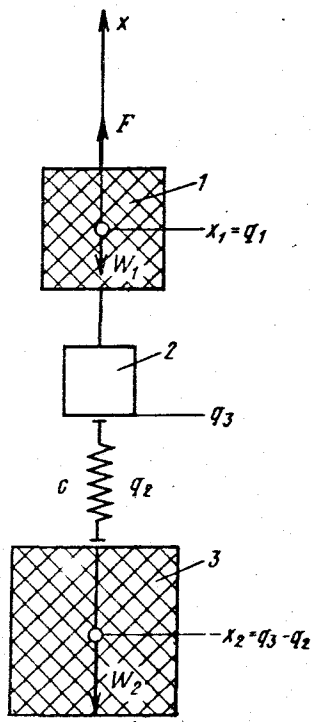


Рис.2. Динамическая модель тягового устройства

($n \approx$ I2-I2,5). Поэтому при составлении уравнений движения агрегата, снабженного тяговым механизмом рассматриваемого типа, допустимо пренебречь поперечными рельсу смещениями масс и соответствующей частью кинетической энергии, незначительными по сравнению с параметрами продольной составляющей движения. Такая идеализация позволит представить динамическую модель агрегата в виде двух масс - массы тягового механизма и массы рамы, соединенных упругим элементом с характеристикой, линейно зависящей от приложенных сил. При коэффициентах запаса, обычно применяемых в общем машиностроении, жесткость упругой связи

$$c = 0{,}06\sqrt{E F_н},$$

где E - модуль упругости; $F_н$ - номинальное усилие тягового механизма.

Приведенные к ведущему колесу жесткости элементов привода и рамы на порядок выше жесткости тягового механизма и могут не учитываться.

Тяговое устройство (рис.2) имеет тяговый механизм I массой m_1, статическим сопротивлением W_1, развивающий силие F. Масса m_1 включает массу тягового механизма и приведенную к ведущим колесам массу вращающихся частей привода. Рама 3 агрегата массой m_2, статическим сопротивлением W_2 связана с тяговым механизмом упругим элементом жесткостью c.

В качестве первой обобщенной координаты модели принято положение q_1 центра масс тягового механизма, отсчитываемое в направлении оси тягового рельса, а в качестве второй - деформация q_2 упругой связи между механизмом и рамой агрегата. В общем случае модель содержит условный передаточный механизм 2, который вводится, например, при исследовании динамики в период прохода тяговым механизмом стыкового соединения рельса. В этом режиме имеет место поперечное рельсу смещение осей ведущих колес, которое трансформируется рычажной системой в продольное рельсу относительное перемещение тягового механизма и рамы, определяемое функцией $q_3 = \Pi(q_1)$. Положение центра масс рамы в этом случае

$$x_2 = q_3 - q_2 . \qquad (I)$$

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2}\left[m_1 \dot{q}_1^2 + m_2(\dot{q}_3 - q_2)^2\right],$$

инерционные коэффициенты системы [3]

$$a_{11} = m_1; \quad a_{12} = 0; \quad a_{13} = 0;$$
$$a_{21} = 0; \quad a_{22} = m_2; \quad a_{23} = -m_2;$$
$$a_{31} = 0; \quad a_{32} = -m_2; \quad a_{33} = m_2.$$

Потенциальная энергия системы

$$V=\frac{1}{2}cq_2^2,$$

квазиупругие коэффициенты системы

$$c_{11}=c_{12}=c_{13}=c_{21}=0;\ c_{22}=c;\ c_{23}=c_{31}=c_{32}=c_{33}=0.$$

Работа сил на возможном перемещении

$$\delta A=(F-W_1)\delta q_1-W_2(\delta q_3-\delta q_2),$$

обобщенные силы

$$Q_1=F-W_1;\ Q_2=W_2;\ Q_3=-W_2.$$

Уравнение связи

$$\Phi=\Pi(q_1)-q_3;$$

множители Лагранжа

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}=\frac{\partial\Pi}{\partial q_1}=\Pi_1;\ \frac{\partial\Phi}{\partial q_2}=0;\ \frac{\partial\Phi}{\partial q_3}=-1.$$

Система уравнений движения имеет вид

$$\begin{aligned}
&m_1\ddot{q}_1=F-W_1+\Pi_1\Lambda;\\
&m_2\ddot{q}_2-m_2\ddot{q}_3+cq_2=W_2;\\
&-m_2\ddot{q}_2+m_2\ddot{q}_3=-W_2-\Lambda,
\end{aligned}$$

где Λ - множитель Лагранжа.

После подстановки и приведения членов

$$\ddot{q}_3=\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_1^2}\dot{q}_1^2+\frac{\partial\Pi}{\partial q_1}\ddot{q}_1=\Pi_2\dot{q}_1^2+\Pi_1\ddot{q}_1,$$

математическая модуль для общего случая движения тягового устройства

$$\begin{aligned}
&\ddot{q}_2+\left(\frac{\Pi_1^2}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)cq_2=\frac{W_2}{m_2}+\Pi_1\frac{F-W_1}{m_1}+\Pi_2\dot{q}_1^2;\\
&\ddot{q}_1=\frac{F-W_1}{m_1}-\Pi_1\frac{c}{m_1}q_2.
\end{aligned}\qquad(2)$$

Система уравнений (2) нелинейна, однако при решении многих частных задач динамики агрегатов, снабженных тяговым механизмом рассматриваемого типа, можно получить приемлемое для анализа приближенной общее решение, например, при исследовании динамики тягового механизма транспортной машины для наклонных дорог в режиме прохода его ведущими колесами стыкового соединения рельсового пути.

При проходе стыка зазором δ (рис.3) центр ведущего колеса описывает по дуге окружности траектории ef с центром в точке a (при движении на

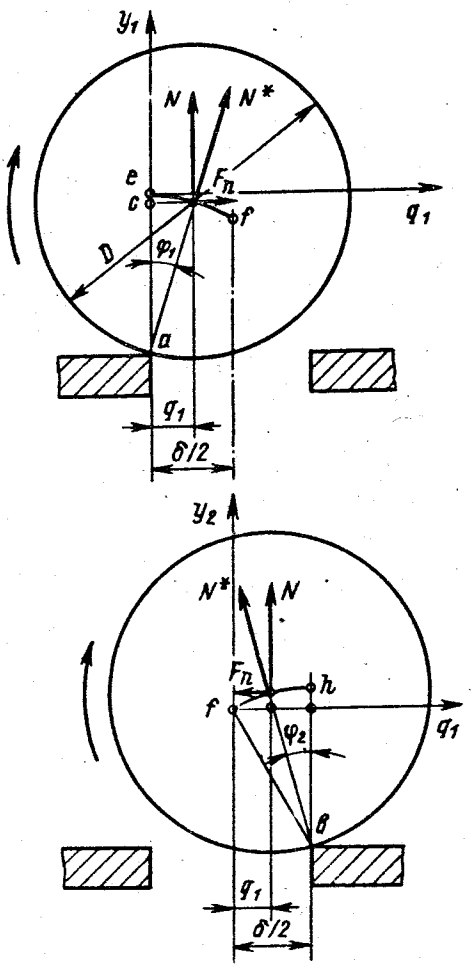


Рис.3. Положение ведущего колеса на стыковом промежутке

промежутке от начала стыка до его середины) и fh с центром в точке b (при движении от середины стыка до его конца). В обоих случаях в показанных на схеме системах координат y_1, y_2 и q_1 координата $0 \leqslant q_1 \leqslant \delta/2$.

С учетом того, что $\delta \ll D$, смещение центра колеса на промежутке движения от начала стыка до его середины

$$y_1 = \frac{1}{D} q_1^2 ;$$

в процессе движения от середины стыка до его конца

$$y_2 = \frac{1}{D}\left(\frac{\delta}{2} - q_1\right)^2 .$$

Смещение y центра колеса трансформируется рычажной системой в продольное рельсу перемещение рамы относительно тягового механизма: на первом участке движения

$$x_{21} = \frac{n}{D} q_1^2 ;$$

на втором –

$$x_{21} = \frac{n}{D}\left(\frac{\delta}{2} - q_1\right)^2 .$$

Соответствующие функции положения и передаточные функции следующие:

$$q_3 = \Pi(q_1) = q_1 - \frac{n}{D} q_1^2 ; \quad \Pi_1 = \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 1 - 2\frac{n}{D} q_1 ; \quad \Pi_2 = -2\frac{n}{D} ; \qquad (3)$$

$$q_3 = \Pi(q_1) = q_1 + \frac{n}{D}\left(\frac{\delta}{2} - q_1\right)^2 ; \quad \Pi_1 = \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 1 + 2\frac{n}{D}\left(\frac{\delta}{2} - q_1\right) ; \quad \Pi_2 = -2\frac{n}{D} . \qquad (4)$$

При проходе стыкового соединения тяговое усилие ведущего колеса складывается из приведенного к колесу тягового усилия привода и составляющей нормального давления колеса, направленной вдоль пути:

$$F = F_д + F_n .$$

Составляющие нормального давления (рис.3) для первого и второго участков движения

$$F_n = \operatorname{tg}\varphi_1 N = 2\frac{1}{D} q_1 N ;$$

$$F_{\text{П}} = tg\varphi_2 N = -2\frac{1}{D}\left(\frac{\delta}{2} - q_1\right)N .$$

Прижатие ведущих колес к рельсу

$$N = n(W_1 + c q_2) . \qquad (5)$$

Первым членом уравнения (5) определяется часть усилия, соответствующая сопротивлению тягового механизма и развиваемая пружинами, вторым – прижатие, создаваемое рычажной системой под действием усилий, приложенных со стороны рамы.

С учетом выражений (3)–(5) составляющая нормального давления в общем виде для обоих участков движения

$$F_{\text{П}} = (1 - \Pi_1) n (W_1 + c q_2) .$$

После подстановки значения $F_{\text{П}}$ в первое уравнение системы (2) и приведения членов получим

$$\ddot{q}_2 + \left[\frac{\Pi_1(2\Pi_1 - 1)}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right] c q_2 = \frac{W_2}{m_2} + \Pi_1\left(\frac{F_{\text{Д}} - \Pi_1^2 W_1}{m_1}\right) + \Pi_2 \dot{q}_1^2 . \qquad (6)$$

С целью приближенного решения уравнение (6) допустимо представить так:

$$\ddot{q}_2 + \frac{c}{m_2} q_2 = \frac{W_2}{m_2} + \Pi_2 \dot{q}_1^2 , \qquad (7)$$

принимая во внимание, что тяговое усилие привода $F_{\text{Д}}$ в течение переходного процесса колеблется в окрестности $F_{\text{Д}} = W_1 + W_2$, члены $\Pi_1(2\Pi_1 - 1)$, Π_1 и Π_1^2, содержащие текущую координату q_1, не превышают единицы, а масса m_1 тягового механизма, включающая приведенную к ведущему колесу массу вращающихся частей привода, как правило, в 20–50 раз превышает массу рамы m_2.

Можно показать, что ввиду малости стыкового промежутка δ даже для привода с мягкой механической характеристикой в течение переходного процесса начальная скорость привода не успевает измениться достаточно существенно, поэтому допустимо принять $\dot{q}_1$ постоянной и равной скорости в начальный момент, т.е. $\dot{q}_1 = v$.

Статическое сопротивление движению грузовой рамы тяговых устройств наклонных дорог даже при весьма малых уклонах (α = 10–15°) достаточно полно определяется зависимостью

$$W_2 = m_2 g \sin\alpha , \qquad (8)$$

где g – ускорение свободного падения.

После подстановки значений W_2, передаточной функции Π_2 и с учетом $\dot{q}_1 = v$ уравнение (6) приобретает вид

$$\ddot{q}_2 + \frac{c}{m_2} q_2 = g\sin\alpha - 2\frac{n}{D} v^2 . \qquad (9)$$

В начальный момент процесса деформация упругой связи определяется статическим сопротивлением рамы

$$q_2(0) = \frac{W_2}{c} = \frac{m_2 g \sin\alpha}{c} ,$$

а скорость изменения деформации $\dot{q}_2(0) = 0$.

С учетом начальных условий решение дифференциального уравнения движения на промежутке от начала стыка до его середины имеет вид

$$q_2 = \frac{m_2}{c}\left[\left(g\sin\alpha - 2\frac{n}{D}v^2\right) + 2\frac{n}{D}v^2\cos kt\right] ;$$

$$\dot{q}_2 = -2k\frac{m_2}{c}\frac{n}{D}v^2\sin kt ;$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m_2}} , \qquad (10)$$

где k - круговая частота системы.

По истечении промежутка времени $\Delta t_1 = \frac{\delta}{2v}$, соответствующего движению на первом участке, деформация упругой связи и скорость деформации

$$q_2(t_1) = \frac{m_2}{c}\left[\left(g\sin\alpha - 2\frac{n}{D}v^2\right) + 2\frac{n}{D}v^2\cos k\frac{\delta}{2v}\right] ; \qquad (11)$$

$$\dot{q}_2(t_1) = -2k\frac{m_2}{c}\frac{n}{D}v^2\sin k\frac{\delta}{2v} . \qquad (12)$$

В момент прохода колесом середины стыкового промежутка изменяются условия связи системы, при этом скачкообразно меняется скорость деформации упругого элемента. В соответствии с выражением (I)

$$\dot{q}_2 = \dot{q}_3 - \dot{x}_2 = \Pi_1\dot{q}_1 - \dot{x}_2 .$$

Для конца первого промежутка движения ($q_1 = \frac{\delta}{2}$) в соответствии с выражением (3)

$$\dot{q}_2(t_1) = \left(1 - \frac{n}{D}\delta\right)\dot{q}_1 - \dot{x}_2 ;$$

для начала второго промежутка движения ($q_1 = 0$) в соответствии с выражением (4)

$$\dot{q}_2(0) = \left(1 + \frac{n}{D}\delta\right)\dot{q}_1 - \dot{x}_2 .$$

Величина скачка скорости деформации

$$\Delta\dot{q}_2 = \dot{q}_2(0) - \dot{q}_2(t_1) = 2\frac{n}{D}\delta\dot{q}_1 = 2\frac{n}{D}\delta v .$$

Соответственно этому скорость деформации упругой связи в начальный момент времени на участке движения от середины стыка до его конца с учетом выражения (II)

$$\dot{q}_2(0) = -2k\frac{m_2}{c}\frac{n}{D}v^2\sin k\frac{\delta}{2v} + 2\frac{n}{D}\delta v . \qquad (13)$$

Решение дифференциального уравнения движения (9) на втором участке стыкового соединения с учетом начальных условий (II) и (I3) следующее:

$$q_2 = \frac{m_2}{c}\left[(g\sin\alpha - 2\frac{n}{D}v^2) + 2\frac{n}{D}v^2\left(\cos k\frac{\delta}{2v}\cos kt - \sin k\frac{\delta}{2v}\sin kt\right)\right] + 2\frac{n}{D}\delta v\frac{1}{k}\sin kt;$$

$$\dot{q}_2 = -2\frac{m_2}{c}\frac{n}{D}v^2 k\left(\cos k\frac{\delta}{2v}\sin kt + \sin k\frac{\delta}{2v}\cos kt\right) + 2\frac{n}{D}\delta v\cos kt.$$

По истечении времени $\Delta t_2 = \frac{\delta}{2v}$, соответствующего движению на участке от середины стыка до его конца, деформация упругой связи и скорость деформации

$$q_2(t_2) = \frac{m_2}{c}\left(g\sin\alpha - 4\frac{n}{D}v^2\sin k\frac{\delta}{2v}\right) + 2\frac{n}{D}\delta v\frac{1}{k}\sin k\frac{\delta}{2v}; \qquad (I4)$$

$$\dot{q}_2(t_2) = 2\frac{n}{D}\delta v\cos k\frac{\delta}{2v} - \frac{m_2}{c}\frac{n}{D}v^2 k\sin k\frac{\delta}{2v}\cos k\frac{\delta}{2v}. \qquad (I5)$$

Выражения (I4) и (I5) являются начальными условиями движения тягового устройства после прохода стыкового соединения. Уравнение движения для этого случая соответствует выражениям (7) и (8) при $\Pi_2 = 0$.

Решение уравнения с учетом начальных условий следующее:

$$q_2 = \frac{m_2}{c}g\sin\alpha + 2\frac{n}{D}v\left[\left(\frac{\delta}{k}\sin k\frac{\delta}{2v} - 2\frac{m_2}{c}v\sin^2 k\frac{\delta}{2v}\right)\cos kt + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\delta}{k}\cos k\frac{\delta}{2v} - 2\frac{m_2}{c}v\sin k\frac{\delta}{2v}\cos k\frac{\delta}{2v}\right)\sin kt\right]. \qquad (I6)$$

Возмущение кинематического характера в связи с проходом тягового механизма по стыковому соединению рельсов приводит к возникновению колебательного процесса и появлению динамических нагрузок.

Амплитудное значение деформации в связях тягового механизма в соответствии с выражением (I6)

$$q_{max} = \frac{m_2}{c}g\sin\alpha + 2\frac{n}{D}v\left(\frac{\delta}{k} - 2\frac{m_2}{c}v\sin k\frac{\delta}{2v}\right).$$

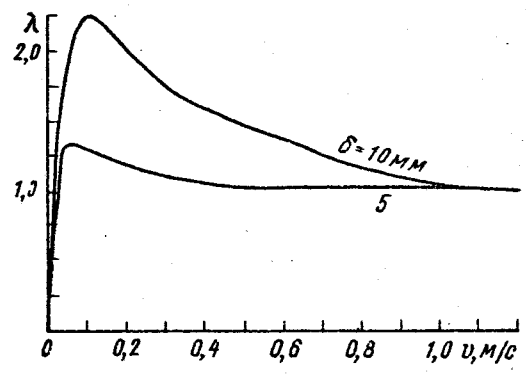


Рис.4. Теоретическая зависимость коэффициента динамичности

Коэффициент динамичности, равный отношению динамической нагрузки, соответствующей амплитуде деформации, к статической, определенной выражением (8), с учетом выражения (I0)

$$\lambda = 1 + \frac{2\frac{n}{D}v\left(\delta k - 2v\sin k\frac{\delta}{2v}\right)}{g\sin\alpha}.$$

Теоретическая зависимость для конкретного тягового устройства (тяговое усилие $F_н$ = = 5000 Н) приведена на рис.4. Экспериментальные исследования

динамики в режиме прохода тяговым устройством стыкового соединения рельсов дали результаты, близкие к теоретическим.

Предложенные динамическая и математическая модели могут быть использованы при решении достаточно широкого класса задач динамики агрегатов, снабженных тяговым механизмом рассматриваемого типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.с. 478757 (СССР). Тяговое устройство / В.П.Васильев. Опубл. в Б.И., 1978, № 28.

2. Берсенев В.С. Монорельсовые тяговые устройства с упругим скольжением приводных колес. – Проектирование промышленного транспорта, 1968, № 5.

3. Вульфсон И.И. Введение в динамику механизмов с учетом упругости звеньев. Л., изд. ЛПИ, 1977.