Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им.Г.В.Плеханова,
т. LXXXVIII, 1981 г.

УДК 622.271.656

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА СОПРОТИВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЮ ПО КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАЕКТОРИИ И МОМЕНТА ПОВОРОТА УПРАВЛЯЕМЫХ КОЛЕС РУДНИЧНЫХ ПНЕВМОКОЛЕСНЫХ ВАГОНОВ

И.И.МАРГОЛИН

Равномерное движение эластичного колеса по кругу может быть представлено как сложное движение, состоящее из прямолинейного качения и равномерного поворота вокруг вертикальной оси, проходящей через центр контакта, который в общем случае смещен относительно средней плоскости колеса благодаря действию боковой силы. Энергия, затрачиваемая на поворот шины относительно дороги, и энергия деформации шины в боковом направлении рассеиваются в зоне контакта колеса с дорогой и в материале шины. Эти потери энергии воспринимаются наблюдателем как увеличение сопротивления движению и, следовательно, могут быть оценены коэффициентом сопротивления на повороте.

Определим коэффициент сопротивления движению пневматического колеса при равномерном движении по круговой траектории. Предположим, что колесо нагружено вертикальной силой P и боковой силой Y, приводящей к качению с углом увода δ. Считая, что для данного режима движения все коэффициенты, характеризующие упругие свойства шины, постоянны, вычислим составляющие мощности, которые необходимо подвести к колесу для приведения его в движение.

Мощность, затрачиваемая на прямолинейное качение колеса,

$$N_K = \varphi P \omega R = \varphi P V,$$

где φ – коэффициент сопротивления качению; ω – угловая скорость движения колеса по окружности радиуса R; V – касательная скорость движения центра колеса.

Поворот колеса вокруг вертикальной оси сопровождается угловой деформацией шины, при этом в зоне контакта шины с дорогой возникают касательные напряжения.

По мере роста касательных напряжений начинается проскальзывание элементов протектора относительно дороги, причем у неподвижного колеса скольжение распространяется от краев к центру зоны контакта. У катящегося колеса наблюдается скольжение элементов протектора относительно дороги у заднего края зоны контакта[x]. Эластичное в угловом направлении колесо при относительно малой деформации имеет незначительную по величине зону скольжения, в таких случаях мы будем говорить о повороте эластичного колеса. У жесткого в угловом направлении колеса или эластичного при значительной деформации зона скольжения охватывает всю площадь контакта, в этом случае мы будет говорить о повороте жесткого колеса. В обоих случаях энергия, затрачиваемая на поворот колеса вокруг вертикальной оси, будет рассеиваться в зоне контакта и в материале шины.

Если максимальный момент сил трения в зоне контакта колеса с дорогой $M'_{\text{п}}$ будет меньше момента $M''_{\text{п}}$, деформирующего шину на некоторый угол ψ, который необходим для движения по окружности радиуса R, то колесо будет поворачиваться со скольжением всех элементов протектора, т.е. как жесткое. Если же $M'_{\text{п}} > M''_{\text{п}}$, то поворот будет происходить без скольжения основной части элементов протектора о дорогу, колесо будет поворачиваться как эластичное.

Для эластичного колеса[x]

$$M''_{\text{п}} = k_{\psi} \frac{r_{\text{д}} \operatorname{tg}\beta}{R} = k_{\psi} \frac{a''}{R} \qquad (1)$$

где k_{ψ} – коэффициент угловой жесткости шины; $r_{\text{д}}$ – динамический радиус колеса; R – радиус траектории движения колеса; a'' – полуось зоны контакта, параллельная плоскости колеса.

Максимальный момент сил трения, возникающих в зоне контакта колеса с дорогой,

$$M'_{\text{п}} = f \int_S r\sigma(S)\,dS,$$

где f – коэффициент трения шины о дорогу; $\sigma(S)$ – удельное давление на бесконечно малой площади зоны контакта dS, отстоящей от начала осей координат на расстояние r; S – общая площадь зоны контакта.

При $\sigma(S)$-const из уравнения, предложенного Е.А.Чудаковым для определения работы трения колес с дорогой,[xx] получим

$$M'_{\text{п}} = f\sigma I_0, \qquad (2)$$

где I_0 – статический момент относительно центра контакта $I_0 = \int_S r\,dS$

Если зона контакта имеет форму эллипса (рис. I), то

$$\sigma = \frac{P}{\pi a b}; \quad I_0 = \int_S r^2\,d\alpha\,dr = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_0^{r_{\text{к}}} r^2\,dr$$

---

[x] Кнороз В.И. Работа автомобильной шины. М., Автотрансиздат, 1960.

[xx] Чудаков Е.А. Избранные труды. М., Изд-во АН СССР, 1961. Т. 1. Теория автомобиля.

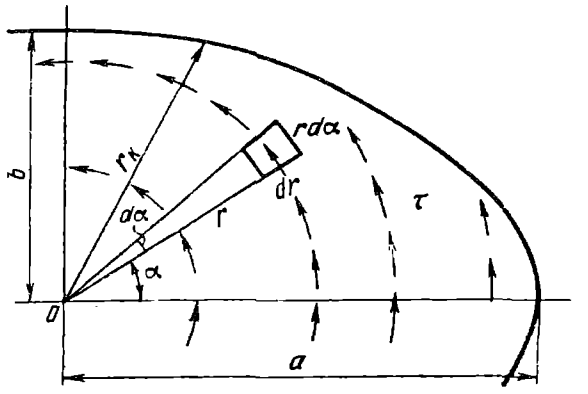


Рис. 1. Схема сил в зоне контакта, препятствующих повороту пневматического колеса относительно дороги

$$M'_{\text{П}} = \frac{4fP}{\pi a b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_0^{r_{\text{К}}} r^2 dr ,$$

где a и b – соответственно большая и малая полуоси эллипса.

Текущий радиус – вектор

$$r_{\text{К}} = \frac{a b}{\sqrt{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}} = \frac{b}{\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2\alpha}}$$

Следовательно,

$$M'_{\text{П}} = \frac{4}{3} fP \frac{b^2}{\pi a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2\alpha\right)^3}} =$$

$$= \frac{2}{3} fP \frac{b^2}{\pi a} B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) F\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1; \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right), \qquad (3)$$

где бета-функция $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \pi$; гипергеометрическая функция $F = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1; \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) = F$ представляется бесконечным рядом

$$F = 1 + \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot 1} z + \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}}{1\ 2\ 1\ 2} z^2 + \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}}{1\ 2\ 3\ 1\ 2\ 3} z^3 +$$

в котором $z = (a^2 - b^2)/a^2$.

Можно показать, что при любых реальных соотношениях полуосей эллипса

$$F = 1 + \frac{3}{4} z + \frac{45}{64} z^2 + 0{,}66\, z^3 \left(\frac{1}{1 - z}\right)$$

с погрешностью не более 2,5 %. График функции $F\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1; \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)$ представлен на рис. 2.

Мощность, затрачиваемая на поворот эластичного колеса вокруг вертикальной оси,

$$N''_{\text{П}} = k_\psi \frac{a''}{R} \omega ; \qquad (4)$$

жесткого колеса при эллиптическом контакте –

$$N'_{\text{П}} = \frac{2}{3} f P \frac{b^2}{a} F \omega . \qquad (5)$$

Определим работу и мощность, затрачиваемые на боковую деформацию шины. При отсутствии боковой силы Y отсутствует увод и колесо катится по окружности радиуса $R_т$ (рис. 3), при наличии силы Y колесо катится по окружности радиуса R. Угол между касательными к окружностям, проведенными в точке пересечения окружностей, – угол увода δ. Элементарная работа боковой силы Y, приложенной к колесу в зоне контакта с дорогой, при элементарном перемещении колеса в направлении движения dl

$$dA_Y = Y\cos(90+\delta)\,dl = -Y\sin\delta\,dl = -Y\,dr,$$

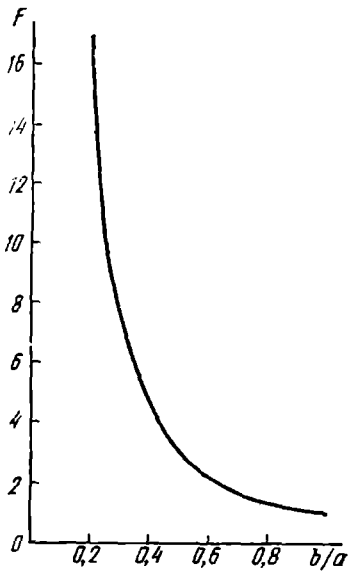


Рис.2. Зависимость гипергеометрической функции от отношения полуосей эллипса

где dr – элементарное перемещение колеса в направлении радиуса траектории движения, связанное с уводом колеса.

Сила Y – реакция дороги, возникающая при воздействии колеса, поэтому работа двигателя A, приходящаяся на данное колесо, равна работе A_Y с противоположным знаком. Учитывая также, что $\sin\delta \approx \delta$, получим, что при повороте на π радиан

$$A = \int_0^{\pi R} Y\delta\,dl = \pi R Y\delta = \frac{\pi R Y^2}{k}, \qquad (6)$$

или

$$A = \int_0^{2|R_т - R|} Y\,dr = 2Y\,|R_т - R|, \qquad (7)$$

где k – коэффициент сопротивления боковому уводу; разность $R_т - R$ следует всегда принимать по абсолютному значению.

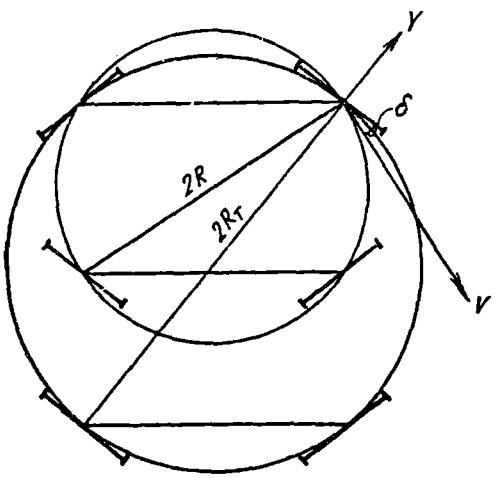


Рис.3. Траектории центра колеса при качении по кругу с уводом и без увода

Расчеты, выполненные по формулам (6) и (7), дают одинаковые результаты.

Время поворота колеса вокруг вертикальной оси на π радиан равно π/ω. Мощность, затрачиваемая на боковую деформацию колеса,

$$N_Б = \frac{A}{\pi}\omega = \omega R Y\delta = \frac{\omega R Y^2}{k} = VY\delta = \frac{VY^2}{k} \qquad (8)$$

или

$$N_Б = \frac{2\omega Y\,|R_т - R|}{\pi} \qquad (9)$$

Для пневмоколесных вагонов составляющие общей мощности равны сумме соответствующих величин всех колес. При всех одинаковых колесах мощность, затрачиваемая на прямолинейное движение вагона,

$$N_{К\,общ} = \varphi P_{общ}\,\omega R_{ц.т} = \varphi P_{общ} V_{ц.т}\,, \qquad (10)$$

где $P_{общ}$ – общий вес вагона; $R_{ц.т}$ – радиус траектории движения центра тяжести вагона; $V_{ц.т}$ – касательная скорость движения центра тяжести вагона.

Мощность, затрачиваемая на поворот всех колес относительно вертикальной оси, для эластичных колес

$$N''_{П\,общ} = k_\varphi\,\omega\,a''\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i} \qquad (11)$$

для жестких колес в общем случае

$$N'_{П\,общ} = \omega f \sigma I_0 n\,,$$

при эллиптических контактах –

$$N'_{П\,общ} = \frac{2}{3} f P_{общ}\frac{b^2}{a} F\omega\,, \qquad (12)$$

где n – число колес пневмоколесного вагона; R_i – радиус траектории движения i-го колеса.

Мощность, затрачиваемая на боковую деформацию всех шин,

$$N_{Б\,общ} = \omega\sum_{i=1}^{n} R_i\,\delta_i\,Y_i \approx V_{ц.т}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \qquad (13)$$

или

$$N_{Б\,общ} = \frac{2\omega\,\Delta R}{\pi}\sum_{i=1}^{n} Y_i\,, \qquad (14)$$

где $\Delta R = |R_т - R|$ – величина, одинаковая для всех колес машины; Y_i – боковая сила, действующая на i-е колесо машины.

Общая мощность, необходимая для равномерного движения пневмоколесного вагона по окружности,

$$N_{общ} = N_{К\,общ} + N_{П\,общ} + N_{Б\,общ}\,.$$

При повороте вагона с жесткими колесами

$$N'_{общ} = P_{общ} V_{ц.т}\left(\varphi + \frac{2}{3} f\frac{b^2}{a}\frac{F}{R_{ц.т}} + \frac{1}{P_{общ} k}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right); \qquad (15)$$

с эластичными –

$$N''_{общ} = P_{общ} V_{ц.т}\left(\varphi + k_\varphi\frac{a''}{P_{общ} R_{ц.т}}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i} + \frac{1}{k P_{общ}}\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right). \qquad (16)$$

Величины в формулах (I5), (I6), стоящие в скобках, характеризуют силовые потери, возникающие при равномерном движении вагона по круговой траектории, поэтому являются общим коэффициентом сопротивления движению по окружности

$$k'_{общ} = \varphi + \frac{2}{3} f \frac{b^2}{a} \frac{F}{R_{ц.т}} + \frac{1}{k P_{общ}} \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \qquad (I7)$$

или

$$k''_{общ} = \varphi + k_\varphi a'' \frac{1}{P_{общ} R_{ц.т}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} + \frac{1}{k P_{общ}} \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \qquad (I8)$$

При расчете следует принимать меньшее из значений $k_{общ}$, получаемых по формулам (I7) и (I8).

При повороте управляемых колес относительно вагона под действием рулевого механизма центр контакта перемещается по некоторой кривой, лежащей в плоскости дороги. На стоянке эта кривая - окружность, радиус которой равен плечу обкатки, при движении колес радиус кривой - величина переменная.

В обоих случаях в произвольный момент времени перемещение колеса может быть разложено на поступательное качение, направленное по касательной к траектории движения центра контакта, и вращательное движение вокруг вертикальной оси, проходящей через центр контакта. Таким образом, перемещение управляемых колес при действии рулевого механизма на стоянке и при движении вагона не отличается от их движения при закрепленных управляемых колесах. Вследствие этого предложенная методика может быть использована для определения крутящего момента, необходимого для поворота управляемых колес.

На стоянке основное сопротивление повороту (без учета стабилизирующего момента и усилия, необходимого для подъема кузова вагона) управляемых колес складывается из момента касательного усилия X

$$M_X = P_i \varphi c$$

(c - плечо обкатки; P_i - вес, приходящийся на i-е управляемое колесо) и момента поворота контакта $M'_{П}$, возникающего из-за проскальзывания всех элементов протектора относительно дороги и определяемого в общем случае по формуле (2), при эллиптической форме зоны контакта - по формуле (3).

Суммарный момент поворота управляемых колес (рис. 4,а), действующий в горизонтальной плоскости на стоянке,

$$M_{СТ} = \sum_{i=1}^{m} M_{Xi} + \sum_{i=1}^{m} M'_{Пi} , \qquad (I9)$$

при эллиптической форме зоны контакта и одинаковых управляемых колесах

$$M_{СТ} = \varphi c \sum_{i=1}^{m} P_i + \frac{2}{3} f \frac{b^2}{a} F \sum_{i=1}^{m} P_i , \qquad (I9,а)$$

где m - число управляемых колес.

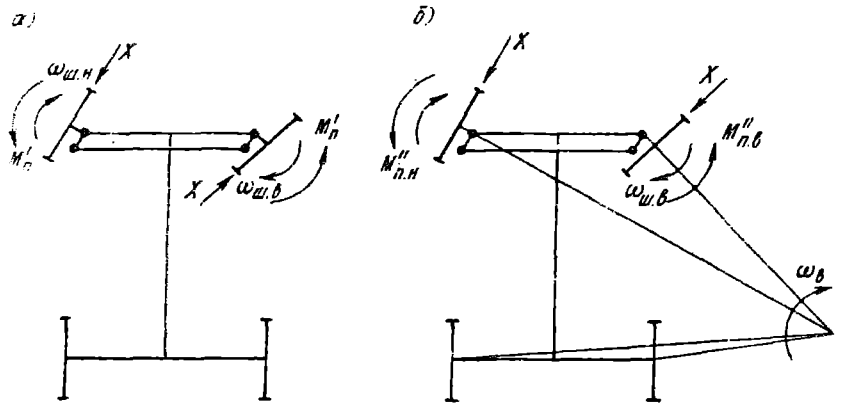


Рис.4. Схема сил и моментов сил, действующих на управляемые колеса: а – на стоянке; б – при движении машины

При движении вагона со скоростью, при которой центры всех управляемых колес перемещаются в направлении движения (рис. 4,б), моменты касательного усилия X колес, находящихся на одной оси, взаимно уравновешиваются и момент поворота управляемых колес $M_{дв}$ определится только моментом поворота колеса относительно дороги, т.е. вторым слагаемым в формулах (I9) и (I9,а). В общем случае

$$M_{дв}=\sum_{i=1}^{m} M'_{пi} \qquad (20)$$

при эллиптической форме зоны контакта

$$M_{дв}=\frac{2}{3} f \frac{b^2}{a} F \sum_{i-1}^{m} P_i \qquad (20,а)$$

Следовательно, момент, необходимый для поворота жестких в угловом направлении колес на жестком основании, в движении меньше, чем на стоянке. Однако начиная с некоторой достаточно малой скорости движения, при которой центры всех управляемых колес перемещаются в направлении движения вагона, момент поворота управляемых колес не зависит от скорости перемещения.

При движении вагона со скоростью, достаточной для поворота управляемых колес за счет угловой деформации шин, без проскальзывания элементов протектора относительно дороги, усилие, необходимое для поворота i-го колеса,

$$M_i = M_{Xi} + M''_{пi} ,$$

где $M''_{пi}$ определяется по формуле (I).

У колес, расположенных на одной оси, моменты касательных усилий взаимно уравновесятся, а момент поворота

$$M_{дв} = M''_{п.н} + M''_{п.в},$$

где $M''_{п.н}$ и $M''_{п.в}$ – моменты, деформирующие в угловом направлении соответственно шины наружного и внутреннего управляемых колес, расположенных на одной оси.

Если при повороте вагона с мгновенной угловой скоростью $\omega_в$ радиусы траектории движения точек пересечения осей шкворней с дорогой наружного и внутреннего управляемых колес соответственно равны $R_{ш.н}$ и $R_{ш.в}$, а под действием рулевого механизма управляемые колеса, расположенные на одной оси у наружного и внутреннего бортов, поворачиваются относительно вагона соответственно с угловой скоростью $\omega_{ш.н}$ и $\omega_{ш.в}$, то, складывая векторы угловых скоростей, найдем, что угловая скорость поворота наружного и внутреннего управляемых колес соответственно равна равнодействующей угловых скоростей

$$\begin{aligned} \omega_н &= \omega_в + \omega_{ш.н}; \\ \omega_в &= \omega_в + \omega_{ш.в}, \end{aligned} \qquad (21)$$

радиус траектории центра зоны контакта или, что то же самое, расстояние от точки приложения равнодействующих угловых скоростей до центра контакта соответствующего колеса

$$\begin{aligned} R_н &= \frac{R_{ш.н}\,\omega_в}{\omega_{ш.н} + \omega_в} + c \\ R_в &= \frac{R_{ш.в}\,\omega_в}{\omega_{ш.в} + \omega_в} - c \end{aligned} \qquad (22)$$

Моменты, необходимые для поворота управляемого колеса наружного и внутреннего бортов вокруг оси, проходящей через центр зоны контакта, получим, подставляя выражения (22) в формулу (I):

$$M'_{п.н} = \frac{k_\psi a''}{\dfrac{R_{ш.н}\,\omega_в}{\omega_{ш.н} + \omega_в} + c}$$

$$M''_{п.в} = \frac{k_\psi a''}{\dfrac{R_{ш.в}\,\omega_в}{\omega_{ш.в} + \omega_в} - c},$$

где $R_{ш.н}\,\omega_в$ и $R_{ш.в}\omega_в$ – переносные скорости движения точек пересечения шкворней с дорогой соответственно наружного и внутреннего бортов.

Момент, необходимый для поворота управляемых колес одной оси,

$$M_{дв} = k_\psi a'' \left[\frac{\omega_{ш.н} + \omega_в}{R_{ш.н}\,\omega_в + c(\omega_{ш.н} + \omega_в)} + \frac{\omega_{ш.в} + \omega_в}{R_{ш.в}\,\omega_в - c(\omega_{ш.в} + \omega_в)} \right],$$

где $c\,\omega_{ш.н}$ и $c\,\omega_{ш.в}$ – относительные скорости движения центров колес соответственно наружного и внутреннего бортов.

Учитывая сказанное, получим

$$M_{дв} = k_\psi a'' \left(\frac{\omega_{ш.н} + \omega_в}{V_н + c\,\omega_в} + \frac{\omega_{ш.в} + \omega_в}{V_в - c\,\omega_в} \right),$$

где $V_н$ и $V_в$ – скорости движения центров соответственно наружного и внутреннего управляемых колес.

Принимая $\omega_{ш.н} = \omega_{ш.в} \approx \omega_\psi$ окончательно получим

$$M_{дв} = k_\psi a''(\omega_\psi + \omega_в) \left(\frac{1}{V_н + c\,\omega_в} + \frac{1}{V_в - c\,\omega_в} \right) \qquad (23)$$

Из формулы (23) следует, что:

1) момент сопротивления повороту управляемых колес с увеличением скорости движения уменьшается, асимптотически стремясь к нулю;

2) момент сопротивления повороту управляемых колес увеличивается при уменьшении радиуса траектории движения вагона;

3) момент сопротивления повороту управляемых колес возрастает при увеличении скорости поворота колес относительно вагона;

4) при увеличении кривизны траектории $\omega_\psi > 0$, при уменьшении – эта величина меньше нуля и, следовательно, при выходе с поворота момент сопротивления повороту управляемых колес меньше, чем при входе в поворот; это справедливо даже при отсутствии специальных мер по стабилизации управляемых колес;

5) уменьшение плеча обкатки c ведет к уменьшению момента поворота управляемых колес, так как

$$\frac{1}{V_н + c\,\omega_в} + \frac{1}{V_в - c\,\omega_в} = \frac{V_н + V_в}{V_н V_в - c\,\omega_в (V_н - V_в) - c^2 \omega_в^2}$$

и всегда $V_н > V_в$, $\omega_в > 0$; как следует из формулы (19,а), это справедливо и при повороте управляемых колес на месте.