Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г.В.Плеханова,
т. LXXXIX, 1981 г.

УДК 550.831.01

ПОЛЕ ПРИТЯЖЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ МНОГОУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТИ

Г.Г.КРАВЦОВ

Потребность вычислять аномальный эффект от тел неправильной формы в процессе интерпретации гравитационных аномалий методом подбора возникает постоянно. Если при этом исследованию подлежат сильно вытянутые по простиранию геологические структуры, то обычно используют плоскую модель интерпретации, что значительно снижает трудоемкость вычислений. До настоящего времени способы вычисления теоретического эффекта двумерных тел разрабатывались преимущественно для однородных по плотности объектов [I, 5, 7, I0 и др.], но не меньший практический интерес имеют модели и с переменной плотностью аномальных масс [I, 8], рассмотрению которых посвящена статья.

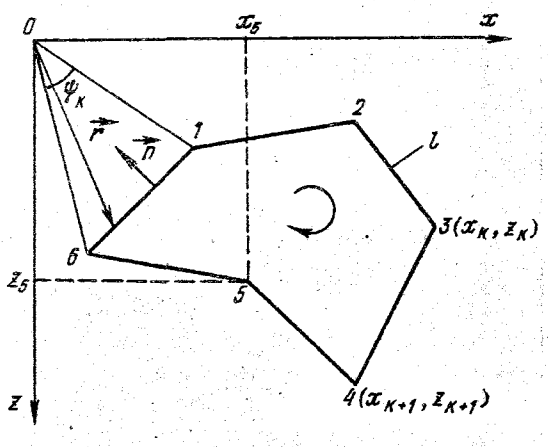


Рис.1. Нормальное сечение двумерной многоугольной призмы

В общем случае контур двумерного объекта в нормальном его сечении удобно аппроксимировать ломаной линией, а переменную объемную плотность масс характеризовать коэффициентами многочлена. Кусочно-гладкую границу l такого тела можно аналитически описать уравнениями семейства прямых линий:

$$b_k x - a_k z - c_k = 0 \quad (k=\overline{1,m}), \qquad (I)$$

высекающих на координатной плоскости $x0z$ неправильный m-угольник (рис.I). Коэффициенты выражения (I) связаны с координатами угловых точек контура $x_k, z_k (k=\overline{1,m})$ следующим образом: $a_k = x_{k+1} - x_k$; $b_k = z_{k+1} - z_k$; $c_k = x_k z_{k+1} - x_{k+1} z_k$.

Для замкнутого контура при вычислении этих коэффициентов следует учитывать, что $x_{m+1} = x_1$ и $z_{m+1} = z_1$. Направление обхода (на рис.1 помечено стрелкой) положительно ориентированного замкнутого контура зависит, как известно, от выбора направления осей x и z. Чтобы чрезмерно не усложнять конечные выражения составляющих поля притяжения двумерной призмы, воспользуемся для задания ее плотности многочленом не выше второй степени:

$$\rho(x,z)=\sigma_5 x^2+\sigma_4 xz+\sigma_3 z^2+\sigma_2 x+\sigma_1 z+\sigma. \qquad (2)$$

Аналитическое решение прямой задачи логарифмического потенциала для области T, представляющей собой многоугольник, а также последующий анализ и использование получаемого решения значительно облегчаются, если точка, в которой рассматривается поле, совмещена с началом координат. По этим соображениям запись итоговых формул дается в статье для точки (0; 0), расположенной в начале системы координат xz. В реальных условиях параметры призмы и координаты притягиваемой точки α и γ приходится задавать относительно некоторой исходной системы координат $\tilde{x}\tilde{z}$. Отсюда необходимость параллельного переноса осей координат до совмещения их начала с точкой наблюдения и связанного с переносом осей преобразования ряда параметров призмы:

$$x_k=\tilde{x}_k-\alpha \ (k=\overline{1,m}); \ z_k=\tilde{z}_k-\gamma \ (k=\overline{1,m}); \ c_k=\tilde{c}_k-b_k\alpha+a_k\gamma \ (k=\overline{1,m});$$

$$\sigma=\sigma_5\alpha^2+\sigma_4\alpha\gamma+\sigma_3\gamma^2+\tilde{\sigma}_2\alpha+\tilde{\sigma}_1\gamma+\tilde{\sigma}; \qquad (3)$$

$$\sigma_1=\sigma_4\alpha+2\sigma_3\gamma+\tilde{\sigma}_1; \ \ \sigma_2=2\sigma_5\alpha+\sigma_4\gamma+\tilde{\sigma}_2.$$

При параллельном переносе не меняют своего первоначального значения коэффициенты a_k, b_k равенств (1) и коэффициенты σ_3, σ_4, σ_5 в выражении (2). Это следует иметь в виду при разработке наиболее рациональной схемы вычислений по предлагаемым ниже формулам, в том числе и при программировании самих вычислений на ЭВМ.

Прямая задача для двумерных тел связана с разрешением двойных интегралов. Последние в случае кусочно-гладкой границы области интегрирования удобнее вычислять, осуществив предварительно по формуле Грина [2]

$$\iint_T \left(\frac{\partial Q(x,z)}{\partial x}-\frac{\partial P(x,z)}{\partial z}\right)dxdz=\oint_l P(x,z)dx+Q(x,z)dz \qquad (4)$$

переход к криволинейному интегралу второго рода.

В качестве примера найдем, опираясь на формулу Грина, массу, приходящуюся на единицу длины призматического цилиндра с переменной плотностью, выражаемой формулой (2):

$$M=\iint_T \rho(x,z)dxdz.$$

Для этого положим в формуле (4) функцию $P(x,z)=0$, а вместо выражения $\partial Q(x,z)/\partial x$ подставим правую часть равенства (2).

Чтобы перейти к контурному интегралу, остается только найти из неопределенного интеграла $Q(x,z)=\int \rho(x,z)\,dx$ первообразную Q:

$$M=\oint Q(x,z)\,dz, \qquad (5)$$

где $Q(x,z)=\frac{1}{3}\sigma_5 x^3+\frac{1}{2}\sigma_4 x^2 z+\sigma_3 x z^2+\frac{1}{2}\sigma_2 x^2+\sigma_1 x z+\sigma x$.

Но криволинейный интеграл (5) естественно распадается на сумму однотипных интегралов по звеньям кусочно-гладкого контура l

$$M=\sum_{k=1}^{m}\int_{z_k}^{z_{k+1}} Q(x,z)\,dz,$$

которые приводятся к переменной интегрирования z, получаемой на основе равенства (I) подстановкой $x=(a_k z+c_k)/b_k$. Освободившись от интеграла под знаком суммы, приходим к удобной для вычисления массы формуле

$$M=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} c_k\left[\frac{1}{6}\left(\bar{a}\sigma_5+\frac{c}{2}\sigma_4+\bar{b}\sigma_3\right)+\frac{1}{3}\left(a\sigma_2+b\sigma_1\right)+\sigma\right], \qquad (6)$$

где $a=x_k+x_{k+1}$; $\bar{a}=x_k^2+x_k x_{k+1}+x_{k+1}^2$; $b=z_k+z_{k+1}$; $\bar{b}=z_k^2+z_k z_{k+1}+z_{k+1}^2$; $c=ab+x_k z_k+x_{k+1} z_{k+1}$.

Аналогично можно вывести формулы для площади поперечного сечения двумерной призмы

$$S=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} c_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} a b_k=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} a_k b$$

и координат ее центра тяжести

$$X=\frac{1}{12M}\sum_{k=1}^{m} c_k\left(\frac{3\bar{a}_1\sigma_5+\bar{c}_1\sigma_4+\bar{c}_2\sigma_3}{5}+\bar{a}\sigma_2+\frac{c}{2}\sigma_1+2a\sigma\right); \qquad (7)$$

$$Z=\frac{1}{12M}\sum_{k=1}^{m} c_k\left(\frac{\bar{c}_1\sigma_5+\bar{c}_2\sigma_4+3\bar{b}_1\sigma_3}{5}+\frac{c}{2}\sigma_2+\bar{b}\sigma_1+2b\sigma\right), \qquad (8)$$

где $\bar{a}_1=a(x_k^2+x_{k+1}^2)$; $\bar{b}_1=b(z_k^2+z_{k+1}^2)$; $\bar{c}_1=a^2b+2(x_k^2 z_k+x_{k+1}^2 z_{k+1})$; $\bar{c}_2=ab^2+2(x_k z_k^2+x_{k+1} z_{k+1}^2)$.

Оценкой параметров (6)-(8) часто интересуются при интерпретации аномалий силы тяжести.

Формула Грина предъявляет к подставляемым в нее функциям P и Q вполне определенные требования. Ее вывод базируется на предположении, что эти функции вместе со своими частными производными непрерывны, а значит и ограничены в области интегрирования T. Но применительно к логарифмическому потенциалу

$$W=-f\iint_T \rho(x,z)\ln(x^2+z^2)\,dx\,dz, \qquad (9)$$

имеющему в начале координат особенность, более существенной оказывается возможность заменить требование ограниченности частных производных $\partial Q/\partial x$ и $\partial P/\partial z$ внутри области T на требование существования двойного интеграла в левой части формулы (4) хотя бы как несобственного [2]. Действи-

тельно, перепишем формулу (9) в полярных координатах:

$$W=-2f\iint_{T}\rho(r,\beta)\,r\ln r\,dr\,d\beta,$$

полагая $x=r\cos\beta$, $y=r\sin\beta$ и $dxdz=rdrd\beta$ (здесь f - гравитационная постоянная).

Подынтегральная функция в последнем выражении имеет конечное значение, если даже $r\to 0$. Следовательно, интеграл (9) всегда сходится, несмотря на свойственную ему особенность при помещении притягиваемой точки внутри или на границе области интегрирования T. Что же касается свойств первообразной

$$Q(x,z)=-f\int\rho(x,z)\ln(x^2+z^2)\,dxdz,$$

то, взяв этот неопределенный интеграл, сразу же убеждаемся в непрерывности функции Q в замкнутой области T и тогда, когда область интегрирования содержит в себе притягиваемую точку. Становится очевидным, что формулой Грина можно воспользоваться для отыскания не только внешнего, но и внутреннего потенциала двумерной призмы.

Применив формулу Грина к выражению (9) и выполнив все необходимые преобразования, получим

$$W=\frac{7}{6}fM+f\sum_{k=1}^{m}c_k\frac{a\sigma_2+b\sigma_1+11\sigma}{12}-\frac{1}{2\Delta}\Big[\Big(\frac{\lambda_2}{6}+\frac{\lambda_4}{3}+R_2\sigma\Big)J_2-$$

$$-\Big(\frac{\lambda_1}{6}+\frac{\lambda_3}{3}+R_1\sigma\Big)J_1\Big]+\frac{c_k}{\Delta}\Big[\frac{2a_k b\sigma_5-(R_3+R_4)\sigma_4-2b_k a\sigma_3}{24}+$$

$$+\frac{e_2}{3}-\sigma\psi_k+\frac{c_k}{3\Delta}\Big]b_k^2\sigma_5-\theta\sigma_4+a_k^2\sigma_3-2(e_1J+e_2\psi_k)+$$

$$+\frac{c_k}{2\Delta}\Big[2(\delta\sigma_4-2\theta\xi)J+(\delta_1\sigma_5+4\theta\sigma_4-\delta_2\sigma_3)\psi_k\Big]\Big]\Big]\Big\},\qquad(10)$$

где M - определено формулой (6); $r_1=x_k^2+z_k^2$; $r_2=x_{k+1}^2+z_{k+1}^2$;

$R_1=a_k x_k+b_k z_k$; $R_2=a_k x_{k+1}+b_k z_{k+1}$; $R_3=a_k x_k-b_k z_k$; $R_4=a_k x_{k+1}-b_k z_{k+1}$;

$e_1=a_k\sigma_2+b_k\sigma_1$; $e_2=b_k\sigma_2-a_k\sigma_1$; $e_3=b_k^2\sigma_5-a_k^2\sigma_3$; $\Delta=a_k^2+b_k^2$; $\delta=a_k^2-b_k^2$;

$\delta_1=a_k^2-3b_k^2$; $\delta_2=3a_k^2-b_k^2$; $\theta=a_k b_k$; $\xi=\sigma_5-\sigma_3$;

$$\lambda_1=a_k x_k^3\sigma_5+\big[a_k r_1 z_k-c_k(x_k^2-3z_k^2)/2\big]\sigma_4+b_k z_k^3\sigma_3+$$
$$+\big[\theta(b_k x_k^3+a_k z_k^3)(\sigma_5+\sigma_3)+3e_3c_k x_k z_k\big]/\Delta;$$

$$\lambda_2=a_k x_{k+1}^3\sigma_5+\big[a_k r_2 z_{k+1}-c_k(x_{k+1}^2-3z_{k+1}^2)/2\big]\sigma_4+b_k z_{k+1}^3\sigma_3+$$
$$+\big[\theta(b_k x_{k+1}^3+a_k z_{k+1}^3)(\sigma_5+\sigma_3)+3e_3c_k x_{k+1}z_{k+1}\big]/\Delta;$$

$$\lambda_3=e_1r_1+2c_k(z_k\sigma_2-x_k\sigma_1);\quad \lambda_4=e_1r_2+2c_k(z_{k+1}\sigma_2-x_{k+1}\sigma_1);$$

$$J := \underline{\text{if}}\ c_k = 0\ \underline{\text{then}}\ 0\ \underline{\text{else}}\ 0{,}5\ln(r_2/r_1)^{x};$$

$$J_1 := \underline{\text{if}}\ c_k = 0\ \underline{\text{then}}\ 0\ \underline{\text{else}}\ \ln(r_1);$$

$$J_2 := \underline{\text{if}}\ c_k = 0\ \underline{\text{then}}\ 0\ \underline{\text{else}}\ \ln(r_2);$$

$$\psi_k := \underline{\text{if}}\ c_k = 0\ \underline{\text{then}}\ 0\ \underline{\text{else}}\ \operatorname{arctg}(R_2/c_k) - \operatorname{arctg}(R_1/c_k).$$

Для нужд гравиразведки больший интерес представляет не сам потенциал тяготения, который не измеряется, а некоторые его частные производные. Их можно найти непосредственным дифференцированием формулы (10), рассматривая в качестве переменных дифференцирования координаты точки наблюдения $x = \alpha$ и $z = \gamma$, с которыми параметры призмы связаны функциональной зависимостью (3).

Этот путь в отличие от обычно применяемого дифференцирования потенциала под знаком интеграла сразу приводит к общему решению для производных любого порядка, но имеет свою специфику.

Аналитическое дифференцирование становится невозможным, если в достаточно малой окрестности притягиваемой точки, по которой берутся производные, функции J, J_1, J_2 и ψ_k меняют свой облик. К таким точкам относятся точки на прямых линиях, описываемых уравнениями (1). Для них значения производных приходится устанавливать на основе предельного перехода от общего случая, когда дифференцирование возможно, т.е. когда $c_k \neq 0 (k = \overline{1,m})$. Сопоставлению подлежат предельные значения производной при двустороннем подходе к прямой, помеченной индексом $k = k'$, по условию $c_{k'} \to 0$.

Выполнив с учетом сделанных замечаний трехкратное дифференцирование формулы (10), получим:

$$W_x = f \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{\Delta} \left\{ \frac{a e_4 + a_k^2 b \sigma_4}{3} + a_k e_1 + 2 (a_k J + b_k \psi_k) \sigma + \right.$$

$$\left. + \frac{c_k}{\Delta} \left[4\theta \frac{a_k \xi + b_k \sigma_4}{3} + u_1 J - u_2 \psi_k - \frac{2}{3} \frac{c_k}{\Delta} (v_1 J + v_2 \psi_k) \right] \right\}; \qquad (11)$$

$$W_z = f \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{\Delta} \left\{ \frac{b e_4 + b_k^2 a \sigma_4}{3} + b_k e_1 + 2 (b_k J - a_k \psi_k) \sigma + \right.$$

$$\left. + \frac{c_k}{\Delta} \left[4\theta \frac{b_k \xi - a_k \sigma_4}{3} - u_2 J - u_1 \psi_k - \frac{2}{3} \frac{c_k}{\Delta} (v_2 J - v_1 \psi_k) \right] \right\}; \qquad (12)$$

[x] Для простоты описания использованы элементы АЛГОЛа.

$$W_{xx}=2f\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\Delta}\left\{\frac{(h_1+h_2)\sigma_4-2\theta(aa_k\sigma_5+bb_k\sigma_3)}{4}-\theta e_1-\right.$$

$$\left.-b_k(a_k\tilde{J}+b_k\psi_k)\sigma+\frac{c_k}{\Delta}\left[\delta h+e_1(\delta J+2\theta\psi_k)+\frac{c_k}{\Delta}\left[\omega_1 J-\omega_2\psi_k\right]\right]\right\};$$

$$W_{xz}=2f\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\Delta}\left\{\frac{4(h_1\sigma_5-h_2\sigma_3)+(ab_k\delta_2+ba_k\delta_1)\sigma_4}{8}+\frac{1}{2}\delta e_1-\right.$$

$$\left.-b_k(b_k\tilde{J}-a_k\psi_k)\sigma+\frac{c_k}{\Delta}\left[2\theta h+e_1(2\theta J-\delta\psi_k)-\frac{c_k}{\Delta}\left[\omega_2 J+\omega_1\psi_k\right]\right]\right\};$$

$$W_{zz}=-(W_{xx}+f\sigma G);$$

$$W_{xxz}=-2f\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\Delta}\left\{c_k(2c_k\sigma_5 J_5+e_1 J_6)+a_k\sigma\tilde{J}_3+\frac{1}{\Delta}\left[2\theta h b_k-t_1\tilde{J}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-t_2\psi_k+c_k\left[2b_k e_1 J_3-t_3 J_4-2\frac{h}{\Delta}(2a_k c_k J_3+b_k\delta_2 J-a_k\delta_1\psi_k)\right]\right]\right\};$$

$$W_{xzz}=2f\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\Delta}\left\{c_k(2c_k\sigma_3 J_6-e_1 J_5)-b_k\sigma\tilde{J}_3+\frac{1}{\Delta}\left[2\theta h a_k+t_2\tilde{J}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-t_1\psi_k+c_k\left[2a_k e_1 J_3-t_4 J_4+2\frac{h}{\Delta}(2b_k c_k J_3-a_k\delta_1 J-b_k\delta_2\psi_k)\right]\right]\right\};$$

$$W_{xxx}=-(W_{xzz}+f\sigma_2 G);$$

$$W_{zzz}=-(W_{xxz}+f\sigma_1 G),$$

где $e_4=a_k^2\sigma_5+b_k^2\sigma_3$; $u_1=e_1b_k+e_2a_k$; $u_2=e_1a_k-e_2b_k$;
$h=e_4+\theta\sigma_4$; $h_1=aa_k^3$; $h_2=bb_k^3$; $v_1=a_k\delta_1\xi+b_k\delta_2\sigma_4$;
$v_2=b_k\delta_2\xi-a_k\delta_1\sigma_4$; $t_1=a_k(a_k\delta\sigma_2-2b_k^3\sigma_1)$; $t_2=b_k(2a_k^3\sigma_2+b_k\delta\sigma_1)$;
$t_3=c_k^2(b_k\xi-a_k\sigma_4)$; $t_4=c_k^2(a_k\xi+b_k\sigma_4)$; $w_1=\theta(\delta_2\sigma_5-\delta_1\sigma_3)+$
$+(2\theta^2-0{,}5\delta^2)\sigma_4$; $w_2=a_k^2\delta_1\sigma_5+2\theta\delta\sigma_4+b_k^2\delta_2\sigma_3$; $G=2g$;
$g=\sum_{k=1}^{m}\psi_k$;

$\tilde{J}$: = if $c_k\neq 0$ then J else if $z_k z_{k+1}=0$ then 0 else $\ln|z_{k+1}/z_k|$;

J_3: = if $c_k=0$ then 0 else $R_4/r_2-R_3/r_1$;

$\tilde{J}_3$: = (if $r_2=0$ then 0 else R_4/r_2)-(if $r_1=0$ then 0 else R_3/r_1);

J_4: = if $c_k=0$ then 0 else $1/r_2-1/r_1$;

$$J_5 := \underline{\text{if}}\ c_k = 0\ \underline{\text{then}}\ 0\ \underline{\text{else}}\ x_{k+1}/r_2 - x_k/r_1;$$

$$J_6 := \underline{\text{if}}\ c_k = 0\ \underline{\text{then}}\ 0\ \underline{\text{else}}\ z_{k+1}/r_1 - z_k/r_1.$$

Формулы (10)-(12) позволяют вычислять описываемые ими составляющие поля притяжения в любой точке плоскости xOz, что вполне согласуется с характеристическими свойствами логарифмического потенциала [6]. Присущая потенциалу призмы особенность в точках излома контура l (как следствие расходимости несобственных интегралов), полностью нейтрализуется в выражениях для W, W_x и W_z благодаря обращению в нуль коэффициентов перед функциями J, J_1 и J_2. Подобное не наблюдается у производных более высокого порядка. Для них в особых точках не определены функции $\tilde{J}$ и $\tilde{J}_3$. Поэтому вычисленные в угловых точках контура по предлагаемым формулам значения вторых и третьих производных лишены какого-либо смысла.

Из теории потенциала также известно, что при пересечении границы тела хотя бы одна его вторая частная производная претерпевает скачок. Скачок при переменной плотности призмы наблюдается и у производных более высокого порядка, вернее, у тех из них, выражения которых содержат в своем составе трансцендентные функции. Иначе проявляют себя производные, описываемые чисто алгебраическими функциями. Они на пересечении гладкой границы тела разрыва непрерывности не испытывают. Например, в случае однородной призмы с плотностью $\rho(x,z) = \sigma$ трансцендентность исчезает уже у производных третьего порядка, почему они и ведут себя как функции непрерывные на всей плоскости за исключением лишь особых точек (рис.2).

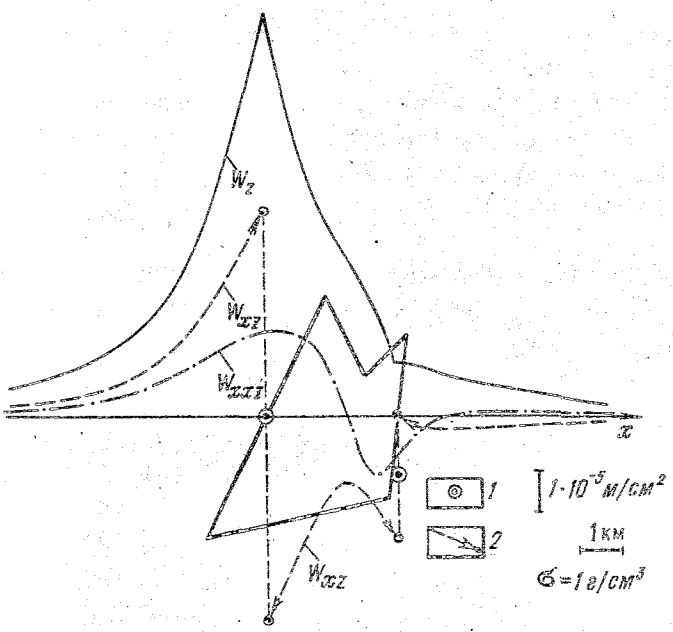


Рис.2. Кривые некоторых составляющих поля притяжения двумерной однородной призмы на пересечении ее гладкой поверхности

1 – значение второй производной на гранях призмы, вычисляемое как главное значение несобственного интеграла; 2 – предельные значения второй производной при внутреннем и внешнем подходе к граням двумерной призмы

Все это объясняется тем, что различие внешнего и внутреннего потенциала тела, нашедшее отражение в уравнениях Лапласа и Пуассона, в случае двумерной призмы обусловлено свойствами обратных тригонометрических функций ψ_k. Дей-

ствительно, приняв во внимание преобразование (3) для параметра σ, нетрудно установить, что именно через угловые величины ψ_k, выражается решение так называемого интеграла Гаусса [9] по замкнутому контуру l:

$$g(0,0)=\oint_l \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r}\,dl = -\frac{W_{xx}+W_{zz}}{2f\sigma} = \sum_{k=1}^{m}\psi_k \,. \qquad (13)$$

С соотношением подобного типа нам уже приходилось встречаться в работе [4]. Но в двумерной задаче угловой параметр ψ_k является соответственно уже не телесным, а плоским углом, под которым просматривается из начала координат рядовое звено кусочно-гладкого контура l (см.рис.1). Сам же угол имеет знак плюс, если радиус-вектор $\vec{r}$ образует с внешней нормалью $\vec{n}$ острый угол.

Выражению (13) можно дать и более общую трактовку. Но для этого потребуется связать обзор неограниченно вытянутой вдоль оси y призматической поверхности с телесным углом, вычисляемым по другой формуле Гаусса [9]:

$$G(0,0,0)=\iint_S \frac{\cos(\vec{r},\vec{n})}{r^2}\,ds = 2g\,.$$

При переменной плотности масс к важным следствиям приводит повторное дифференцирование лапласиана

$$\Delta W = W_{xx}+W_{zz} = -2f\sigma g\,, \qquad (14)$$

на чем следует остановиться особо. Существенным здесь является характер поведения функции g в пространстве.

Из геометрической трактовки интеграла Гаусса непосредственно следует, что в любой внешней точке интеграл (13) равен нулю, а для любой точки внутри призмы получаемый для него результат есть 2π радиан. И в том, и в другом случае дифференцирование функции g дает поэтому, очевидно, нуль.

Сложнее ведет себя переменная g на границе раздела внешней области от внутренней, заполненной массами, при пересечении которой она в целом испытывает скачок. Интеграл (13) является здесь как бы мерой углов излома кусочно-гладкого контура l. Так, в угловых точках контура интеграл дает в радианах величину внутренних углов изображенного на рис.1 многоугольника, а на прямолинейных участках контура, когда угол излома достигнет, по смыслу, своего наибольшего значения 180^0, интеграл соответственно становится равным π радианам.

Понятно, что претерпевающая на поверхности призмы разрыв непрерывности переменная g представляет собой в этих точках пространства функцию недифференцируемую. Тем не менее ее производные имеют на границе тела устранимый разрыв, так как частные производные от функции g и при внутреннем и при внешнем подходе к любой точке на границе l стремятся к одному и тому же пределу, равному нулю. Все сказанное дает основание при дифференцировании правой части равенства (14) рассматривать функцию g всюду в пространстве как некую постоянную, производная которой независимо ни от чего всегда есть нуль.

Проще решается вопрос о дифференцировании параметра σ, связанного с координатами точки наблюдения α и γ, по которым ведется эта операция, явной функциональной зависимостью. Принимая во внимание три последних соотношения в группе равенств (3), для переменной σ получим

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}=\frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}=2\sigma_5\alpha+\sigma_4\gamma+\tilde{\sigma}_2=\sigma_2;$$
$$\frac{\partial\sigma}{\partial z}=\frac{\partial\sigma}{\partial\gamma}=\sigma_4\alpha+2\sigma_3\gamma+\tilde{\sigma}_1=\sigma_1. \qquad (15)$$

Опираясь на эти выражения, легко установить далее путем дифференцирования уравнения (14) связь между интегралом Гаусса и частными производными потенциала третьего порядка:

$$W_{xxx}+W_{xzz}=-2f\sigma_2 g;\quad W_{xxz}+W_{zzz}=-2f\sigma_1 g. \qquad (16)$$

Такого рода соотношения ранее по ходу изложения были уже использованы, чтобы укоротить запись производных W_{xxx} и W_{zzz}. И они легко проверяются иным, более длинным путем, если осуществить самостоятельный вывод каждой из четырех частных производных третьего порядка, а затем сопоставить найденные формулы.

Продолжим дифференцирование соотношений (15):

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}=\frac{\partial\sigma_1}{\partial\alpha}=\sigma_4;\qquad \frac{\partial\sigma_2}{\partial x}=\frac{\partial\sigma_2}{\partial\alpha}=2\sigma_5;$$
$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial z}=\frac{\partial\sigma_1}{\partial\gamma}=2\sigma_3;\qquad \frac{\partial\sigma_2}{\partial z}=\frac{\partial\sigma_2}{\partial\gamma}=\sigma_4.$$

Это дифференцирование, в конечном счете, дает возможность установить на основе равенств (16) связь четвертых производных потенциала все с тем же интегралом Гаусса:

$$W_{xxxx}+W_{xxzz}=-4f\sigma_5 g;\ W_{xxxz}+W_{xzzz}=-2f\sigma_4 g;\ W_{xxzz}+W_{zzzz}=-4f\sigma_3 g. \qquad (17)$$

Присутствующие в равенствах справа в качестве множителей перед переменной g параметры σ_3, σ_4 и σ_5 относятся к числу тех коэффициентов многочлена (2), которые стоят при высших степенях x и z. Они, как отмечалось в начале статьи, не зависят вследствие этого от переменных α и γ. Но тогда последовательное многократное дифференцирование выражений (17) приведет к установлению теперь уже более простых соотношений, которые в отличие от весьма сходного с ними по структуре уравнения Лапласа $W_{xx}+W_{zz}=0$ свяжут между собой и внутренние, и внешние частные производные потенциала пятого, шестого и других более высоких порядков:

$$W_{xxxxx}+W_{xxxzz}=0;\ W_{xxxxz}+W_{xxzzz}=0;\ W_{xxxzz}+W_{xzzzz}=0;$$
$$W_{xxxxzz}+W_{xzzzz}=0;\ W_{xxxxxx}+W_{xxxxzz}=0;\ W_{xxxxxz}+W_{xxxzzz}=0; \qquad (18)$$
$$W_{xxxxzz}+W_{xzzzzz}=0;\ W_{xxxzzz}+W_{zzzzzz}=0;\ W_{xxxxzz}+W_{xxzzzz}=0$$

и т.д.

Исчезновение функции g и появление в правой части равенств нуля является прямым указанием на то, что производные потенциала высшего порядка, начиная в данном конкретном случае с пятого, не содержат в своем составе ни натуральных логарифмов, ни обратных тригонометрических функций и описываются чисто алгебраическими функциями. А это влечет за собой, о чем уже говорилось, исчезновение у производных потенциала разрывов и скачков на границе тела, если только она пересекается в стороне от особых точек поверхности двумерной призмы.

Проведенный анализ расширяет представления о характеристических свойствах потенциала притяжения. Оказывается, что связь между производными второго порядка, устанавливаемая теоремой Пуассона, не является каким-то исключительным фактом. При полиномиальном законе изменения плотности вещества существуют соотношения, связывающие по подобию уравнения Пуассона производные и более высоких порядков. Причем для установления таковых явно недостаточно ограничиваться исследованием аналитических представлений комплексных характеристик лишь внешних полей масс с полиномиальной плотностью, как это делается в работе [8].

Вскрылась и общая закономерность, присущая частным производным логарифмического потенциала, суть которой заключается в следующем. По мере повышения порядка производных растет общее число равенств либо типа (I4), (I6)-(I7), либо типа (I8), которые попарно связывают между собой производные одного и того же порядка. И хотя одновременно увеличивается количество самих производных, но соотношение между их числом и числом связывающих их равенств остается все время таким, что в независимом выводе нуждаются только две частные производные одного и того же уровня, не образующие пару. Все же остальные автоматически находятся на основе существующих связей-равенств. Аналогия сказанному прослеживается и в трехмерном пространстве в прямой задаче для неправильного многогранника с переменной плотностью масс, заданной многочленом по степеням x, y и z [4].

В заключение отметим, что однотипность полученных выражений и особенно простая их структура при постоянной плотности призмы дают основание рекомендовать результаты решения прямой задачи также и для вычисления на основе пуассоновой связи между гравитационным и магнитным потенциалами различных составляющих магнитного поля над двумерными телами неправильной формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоголов В.Т. Вычисление магнитных и гравитационных полей при аппроксимации тел многоугольниками и многогранниками. – Тр. СНИИГГИМСа, 1971, вып. 136.

2. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М., Наука, 1967.

3. Голиздра Г.Я. Вычисление гравитационного поля двумерных масс с помощью аналитического продолжения. – Геофизический сборник АН УССР, 1978, вып. 82.

4. Кравцов Г.Г. Поле притяжения многогранников переменной плотности. – Зап. ЛГИ, 1978, т. 76.

5. Лучицкий А.И. Решение плоской прямой задачи гравиметрии и магнитометрии для областей, ограниченных кривыми второго порядка и отрезками прямых. – Прикладная геофизика. М., Недра, 1978. Вып. 93.

6. Сретенский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала. М.-Л., Гостехиздат, 1946.

7. Страхов В.Н., Лапина М.И., Кузнецова О.А. О прямых задачах гравиметрии и магнитометрии. - Прикладная геофизика. М., Недра, 1974. Вып. 75.

8. Страхов В.Н. К теории логарифмического потенциала при переменной плотности возмущающих масс. - Изв. АН СССР. Физика Земли, 1975, № 12.

9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., Физматгиз, 1963. Т. 2.

10. Шванк О.А., Люстих Е.Н. Интерпретация гравитационных наблюдений. М.-Л., Гостоптехиздат, 1947.