Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г.В.Плеханова,
т. LXXXIX, 1981 г.

УДК 550.838.01

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ ЦЕНТРА И НАПРАВЛЕНИЯ НАМАГНИЧЕННОСТИ ШАРА ПО АНОМАЛИИ Z

В.В.ГЛАЗУНОВ, В.П.ЗАХАРОВ

Для решения сформулированной задачи обычно используют магнитное поле по одному профилю, проходящему над центром шара и через экстремумы аномалии Z. Но рассмотрение аномалии только по одному профилю пока не позволило найти строго способа определения координат центра шара и направления его намагниченности, поэтому в литературе рекомендуют пользоваться разного рода приближенными формулами или номограммами [1, 2, 4].

Покажем, что строгое аналитическое решение задачи может быть сравнительно просто получено, если рассматривать распределение аномального поля не по единичному профилю, а на горизонтальной поверхности наблюдений. Такой подход, как будет показано ниже, позволяет быстро найти горизонтальные координаты центра шара, после чего вычисление глубины его залегания и направления намагниченности возможно в частности и по полю Z, заданному на одном профиле.

Аналитическое выражение аномалии произвольно намагниченного шара в декартовой системе координат с началом координат над центром шара имеет вид [3]

$$Z = \frac{M}{r^5}\left[(2h^2 - x^2 - y^2)\sin i - 3h(x\cos A + y\sin A)\cos i\right], \qquad (1)$$

где M - магнитный момент шара; $r = (x^2 + y^2 + h^2)^{1/2}$ - расстояние от точки наблюдения до центра шара; h - глубина залегания центра шара; i - угол между вектором намагниченности и его проекцией на горизонтальную плоскость; A - угол между положительным направлением оси x и горизонтальной проекцией вектора намагниченности J, отсчитываемый от положительного направления оси x в сторону положительного направления оси y.

Ориентируем ось x на магнитный север и напишем последнее выражение в полярной системе координат ρ, θ, причем углы θ и A будем отсчитывать от оси x по часовой стрелке. Тогда

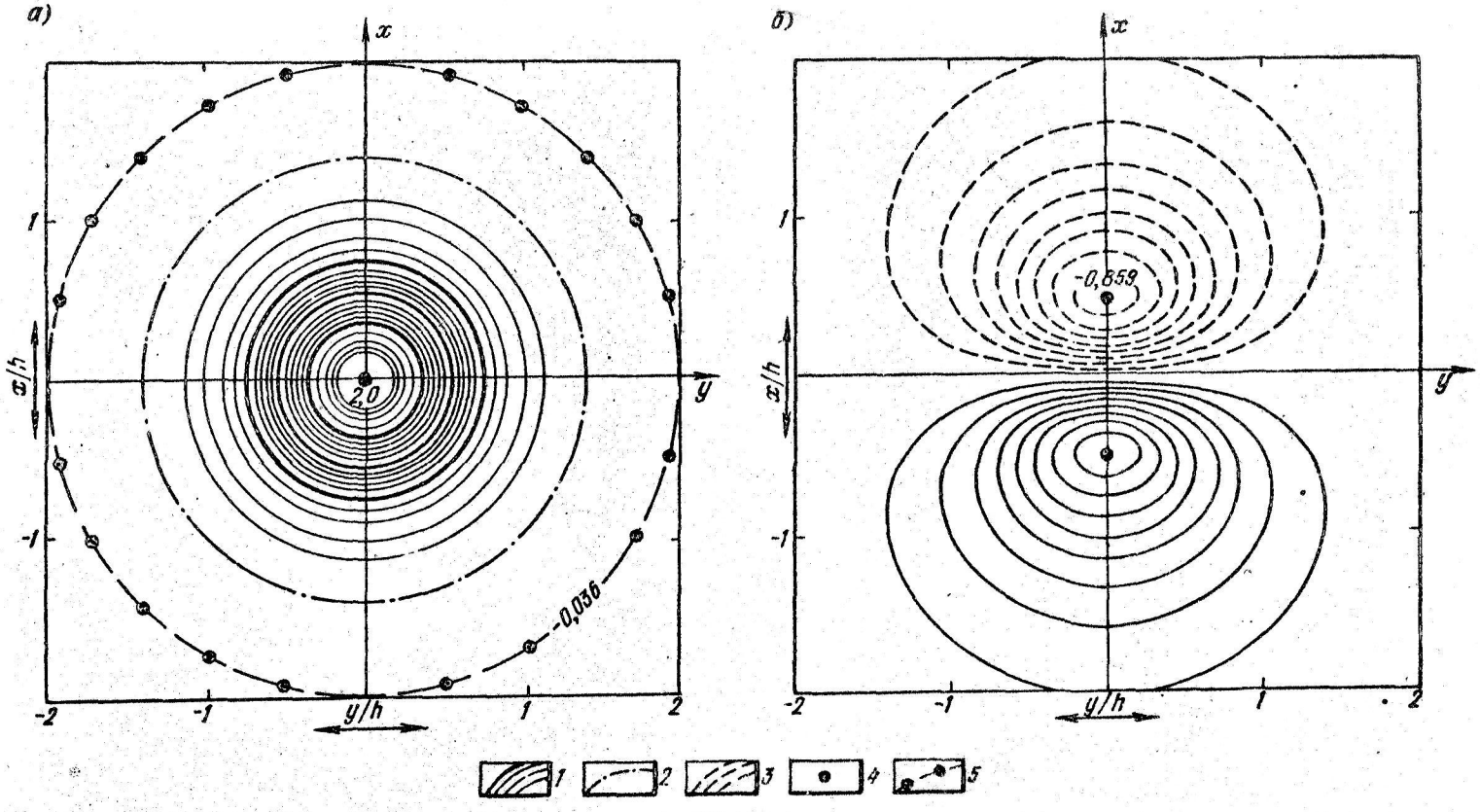


Рис.1. Аномалии Z (а) и H (б) над вертикально намагниченным шаром
1–3 – изолинии магнитного поля, проведенные через $8 \cdot 10^{-3}$ А/м: 1 – положительные; 2 – нулевая; 3 – отрицательные; 4 – экстремумы магнитных аномалий; 5 – ось минимумов аномалии Z

$$Z=\frac{M}{r^5}\left[(2h^2-\rho^2)\sin i-3h\rho\cos(\theta-A)\cos i\right]. \qquad (2)$$

Решив уравнение $\partial Z/\partial\theta = 0$, найдем, что аномалия достигает экстремальных значений при $\theta = A$ и $\theta = A+\pi$, из чего следует, что все ее экстремумы лежат на одной прямой, проходящей через начало координат и совпадающей с горизонтальной проекцией вектора намагниченности.

Из совместного рассмотрения уравнений $\partial Z/\partial\theta = 0$ и $\partial Z/\partial\rho = 0$ определяем координату каждой из экстремальных точек

$$\rho_1=\frac{4}{3}h\left[\sqrt{3+4ctg^2 i}\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}+\xi\right)-ctg\,i\right];$$
$$\rho_2=\frac{4}{3}h\left[\sqrt{3+4ctg^2 i}\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}-\xi\right)-ctg\,i\right]; \qquad (3)$$
$$\rho_3=\frac{4}{3}h\left[\sqrt{3+4ctg^2 i}\ \cos\xi-ctg\,i\right],$$

где ρ_1 и ρ_3 – координаты „южного" и „северного" экстремумов аномалии соответственно; ρ_2 – координата центрального экстремума;

$$\xi=\frac{1}{3}\arccos\frac{-ctg\,i\,(117+128\,ctg^2 i)}{16(3+4ctg^2 i)^{3/2}}.$$

Выражение (2) можно несколько упростить, если полярную ось $0x$ ориентировать по направлению горизонтальной составляющей вектора намагниченности. Тогда $A = 0$ и

$$Z=\frac{M}{r^5}\left[(2h^2-\rho^2)\sin i-3\rho h\cos i\right]. \qquad (4)$$

Аномалию Z при наклонной намагниченности, как видно в частности из последнего выражения, можно рассматривать в виде суммы аномалий, одна из которых обладает симметрией относительно вертикальной оси, вторая – относительно оси x (рис.I). Это свойство удобно использовать для отыскания начала координат по значениям Z на горизонтальной плоскости.

Заметим, что, если через начало координат провести две прямые, пересекающиеся под произвольным углом β, то для точек, лежащих на пересечении этих линий и окружности некоторого радиуса ρ, будет выполняться равенство

$$Z(\rho;\theta)+Z(\rho;\theta+\pi)=Z(\rho;\theta+\beta)+Z(\rho;\theta+\pi+\beta). \qquad (5)$$

Это равенство выполняется также вдоль линий, исходящих из начала координат, но на прямой, соединяющей экстремумы аномалии, такая точка будет единственной.

Для практического отыскания начала координат удобнее использовать прямые, пересекающиеся под углом 90°. Такой крест, вычерченный на кальке, следует расположить на карте изолиний так, чтобы одна из его линий проходила через экстремумы аномалии Z. Центр креста надо перемещать от макси-

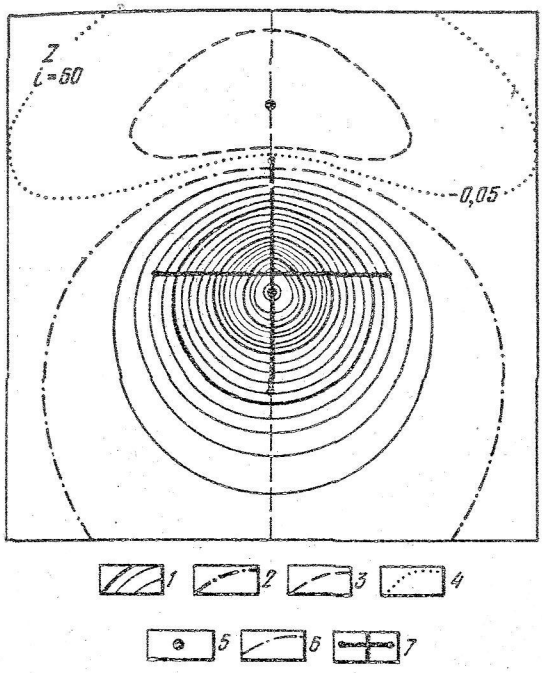


Рис.2. К определению горизонтальных координат центра косонамагниченного шара по аномалии Z
1-4 – изолинии Z, проведенные через $8 \cdot 10^{-3}$ А/м:
1 – положительные; 2 – нулевая; 3 – отрицательные;
4 – промежуточная; 5 – экстремумы Z; 6 – ось симметрии Z; 7 – накладной крест, используемый для отыскания проекции центра шара

мума в сторону большего минимума аномалии до тех пор, пока не будет достигнуто выполнение равенства (5), т.е. $Z_1 + Z_3 = Z_2 + Z_4$ (рис.2), причем значения Z с нечетными индексами взяты на концах одного, с четными – на концах другого перпендикуляра креста.

Так как из равенства (5) следует, что ρ и β могут быть любыми, то, меняя их величину, можно оценить погрешность определения начала координат и допустимость аппроксимации источника аномалии шаром. В частности, полезно убедиться, что равенство (5) выполняется и при иной ориентировке креста, так как это подтверждает правильность определения начала координат.

Рассмотренный способ обеспечивает строгое решение и в тех случаях, когда аномалия наблюдается на постоянном или наклонном фоне. Различие заключается лишь в том, что из-за искажающего влияния наклонного фона начало координат может не лежать на прямой, соединяющей максимум и больший по модулю минимум Z. Это несколько затрудняет нахождение начала координат, так как поиск надо вести, перемещая центр креста не по прямой линии, а в некоторой области, лежащей между указанными экстремумами аномалии.

После нахождения начала координат легко выделить любую из двух составляющих аномалии Z. Так как выражение (4) можно записать в виде

$$Z = Z_{oz} \sin i + H_{oz} \cos i \qquad (6)$$

(здесь Z_{oz} и H_{oz} – вертикальная и горизонтальная составляющие напряженности магнитного поля вертикально намагниченного шара), то

$$\begin{aligned} Z_{oz} \sin i &= 0{,}5\left[Z(\rho;\theta) + Z(\rho;\theta+\pi)\right]; \\ H_{oz} \cos i &= 0{,}5\left[Z(\rho;\theta) - Z(\rho;\theta+\pi)\right]. \end{aligned} \qquad (7)$$

Глубину залегания центра шара нетрудно определить по любой из этих составляющих с помощью известных приемов, разработанных для аномалий Z и H при вертикальной намагниченности [3]. Удобно воспользоваться для этой

цели значениями аномалии Z по профилю $\theta = \pm\pi/2$, так как здесь она представлена только составляющей $Z_{oz}\sin i$.

Для определения угла i рекомендуется использовать вытекающие из выражений (7) формулы

$$tg\,i = \frac{3(\rho/h)\cos\theta}{2-(\rho/h)^2}\left[Z(\rho;\theta+\pi)+Z(\rho;\theta)\right]\Big/\left[Z(\rho;\theta+\pi)-Z(\rho;\theta)\right];$$
$$ctg\,i = \frac{2-(\rho/h)^2}{3\rho/h}\left[1-\frac{Z(\rho;0)}{Z(\rho;\pi/2)}\right]. \qquad (8)$$

Вычисления целесообразно выполнять при разных значениях ρ и θ. Среднее из полученных величин i будет ближе к истинному, а наличие нескольких значений i позволит оценить вероятную погрешность определения этого неизвестного.

Из выражения (4) видно, что наиболее простое соотношение для вычисления магнитного момента имеет вид

$$M = Z(0;0)\,h^3/(2\sin i), \qquad (9)$$

где $Z(0;0)$ - значение аномалии в начале координат. Могут быть предложены и другие несложные формулы, например,

$$M = \left[Z(\rho;\theta)+Z(\rho;\theta+\pi)\right] r^5/\left[(2h^2-\rho^2)\sin i\right];$$
$$M = \left[Z(\rho;\theta+\pi)-Z(\rho;\theta)\right] r^5/(3h\rho\cos i). \qquad (10)$$

Если магнитное поле шара существенно осложнено помехами, связанными с приповерхностными неоднородностями, то нахождение координат центра сечения по распределению аномалии в горизонтальной плоскости может быть затруднено. В этом случае для решения данной задачи наиболее целесообразно использовать аномалию Z по двум профилям, расположенным на разной высоте и проходящим через экстремумы аномалии. При пересчете поля вверх эффект приповерхностных неоднородностей будет сильно ослаблен, и на новом высотном уровне магнитное поле практически можно рассматривать как свободное от помех. На первоначальном уровне всегда можно найти участки профиля, в пределах которых аномалия шара не осложнена наложением других полей.

В рассматриваемом ниже способе предусмотрена возможность использования для определения начала координат и глубины залегания шара аномалии Z в произвольных точках на этом уровне, что позволяет резко снизить влияние помех на результаты вычислений.

Распределение поля Z в вертикальной плоскости, в которой расположены центр шара и вектор намагниченности, опишем с помощью полярной системы координат с началом координат в точке наблюдения. Углы Ψ будем отсчитывать от положительного направления оси x вниз. Тогда

$$Z(r,\psi) = M\frac{\sin i}{r^3}\left(3\sin^2\psi - 1 + 3\sin\psi\cos\psi\,ctg\,i\right). \qquad (11)$$

Для точек, расположенных над центром шара,

$$Z(h;\pi/2)=2M\frac{\sin i}{h^3}. \qquad (12)$$

Из выражений (11) и (12) следует, что

$$\frac{Z(r;\psi)}{Z(h;\pi/2)}=0{,}5\sin^3\psi\left(3\sin^2\psi-1+3\sin\psi\cos\psi\,ctg\,i\right). \qquad (13)$$

Последнее соотношение показывает, что отношение напряженности поля в любой точке оси x к напряженности поля над центром шара на одном и том же уровне зависит только от угла ψ, так как множитель $ctg\,i$ для каждой конкретной аномалии есть величина постоянная. Отсюда следует, что точки, расположенные на любых высотах, будут лежать на одной прямой, проходящей через центр шара, если для них выполняется равенство (13). Высказанное положение можно распространить и на отношение $Z(r;\psi)/Z_{max}$, так как $Z_{max}=cZ(h;\pi/2)$.

Аналогично можно показать, что так же располагаются точки с равными долями значений Z_{max} на разных уровнях в любой другой вертикальной плоскости, проходящей через центр шара.

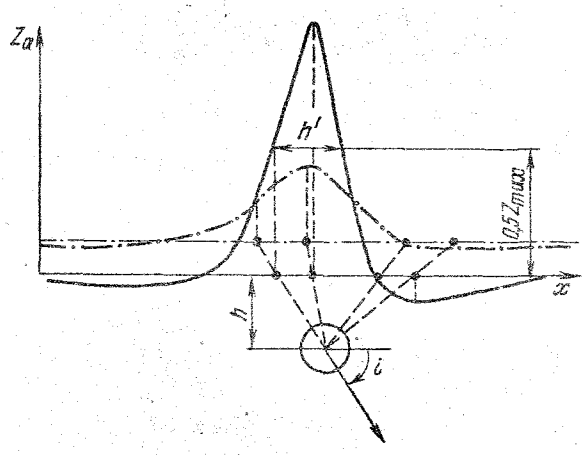


Рис.3. Аномалия Z косонамагниченного шара на двух уровнях

Если аномалия не осложнена помехами, то для нахождения координат центра шара по полю Z на двух высотных уровнях достаточно провести прямые через соответствующие экстремумы аномалии. Для оценки погрешности нахождения центра шара можно провести прямые и через некоторые другие точки, значения аномалии в которых составляют одну и ту же долю от Z_{max} или $(Z_{max}-Z_{min})$ на данном уровне (рис.3). Если же поле на первоначальном уровне сильно осложнено приповерхностными неоднородностями, то следует выбрать участки профиля, на которых помехи отсутствуют или минимальны, и использовать для решения задачи значения аномалии только в пределах этих участков.

Глубина залегания центра шара может быть также вычислена и по значениям аномалии в экстремальных точках на двух высотных уровнях. Подставив соответствующие значения ρ из уравнения (3) в уравнение (4), найдем значения экстремумов аномалии Z. Обозначив Z_1 и Z_2 алгебраическую разность наибольших экстремумов аномалии на нижнем и верхнем уровнях соответственно, получим

$$h = \Delta h \sqrt[3]{Z_2} / \left(\sqrt[3]{Z_1} - \sqrt[3]{Z_2} \right), \qquad (14)$$

где Δh - разность высот уровней.

В заключение остановимся еще на одном способе определения координат центра сечения и направления намагниченности шара. Этот способ, хотя и является приближенным, но при работе с практическими аномалиями едва ли будет уступать по точности строгим.

Выбрав профиль, проходящий через экстремумы аномалии, отметим на нем точки, в которых $Z = 0{,}5Z_{max}$. Расстояние между эти точками h' (рис.3), как показали расчеты, выполненные на ЭВМ, крайне слабо зависят от угла i (рис.4). Для практических целей, учитывая дискретность сети измерений, можно считать, что оно равно глубине залегания центра шара h при любом i.

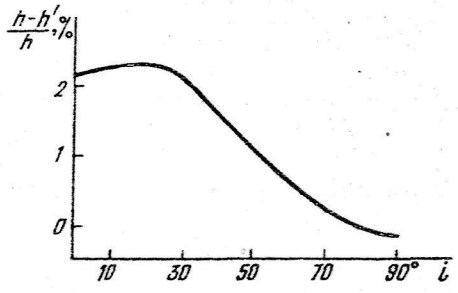


Рис.4. Зависимость относительной погрешности вычисления глубины залегания центра шара по расстоянию между полумаксимумами Z от величины угла i

Считая, что таким способом h найдено, и зная, что четная составляющая аномалии Z, т.е. Z_{oz} при $x = \pm h\sqrt{2}$ обращается в нуль, можно определить начало координат. Для этого нужно графически изобразить отрезок длиной $2h\sqrt{2}$ и разместить его вдоль оси x так, чтобы значения Z на концах отрезка были бы равны по модулю. В этом случае центр отрезка совместится с началом координат. Для определения угла i можно использовать равенство

$$tg\, i = \frac{Z(0)}{\hat{Z}\big|_{x=h\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{6}}.$$

При найденных h и i магнитный момент M можно определить по значению аномалии в любой точке. Удобно, как уже отмечалось ранее, для этой цели воспользоваться формулой (9).

Применение любого из способов определения глубины залегания и направления намагниченности шара неизбежно предваряется рассмотрением магнитного поля в плане, так как только так может быть решен вопрос о вероятной форме источника аномалии. С учетом этого представляется логичным обе горизонтальные координаты центра шара также находить по распределению поля в горизонтальной плоскости, как рекомендуется в первой части статьи. Заметим, что такой подход, видимо, окажется пригодным и для ряда других аномалий Z и ΔT, созданных трехмерными телами. Так, общим для всех случаев может оказаться методика поиска начала координат, учитывающая плановое расположение осей симметрии отдельных составляющих магнитной аномалии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гура К.А. Графическая интерпретация магнитных аномалий над источниками сферической формы в случае произвольного намагничения. – Геофизический сборник АН УССР, 1874, вып. 60.

2. Гринкевич Г.И. Магниторазведка. М., Недра, 1979.

3. Логачев А.А., Захаров В.П. Магниторазведка. Л., Недра, 1979.

4. Rao B.S.R., Prakasa T.K.S., Murthy Krishna A.S. – Geophys.Prospect., 1977, v.25, N 4.