Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г.В.Плеханова,
т. XCI, 1982 г.

УДК 556.314

О РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЯХ МИГРАЦИИ В СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ КОМПЛЕКСАХ ВОДОНОСНЫХ ПОРОД

В.А.МИРОНЕНКО, В.Г.РУМЫНИН

Чередование в разрезе слоев пород с различной проницаемостью свойственно в той или иной степени большинству водоносных горизонтов, приуроченных к терригенным породам; выдержанные по фильтрационным свойствам зоны могут быть в ряде случаев выделены и в некоторых разновидностях трещиноватых коллекторов.

Специфика процессов профильной миграции в стратифицированных водоносных горизонтах определяется флуктуацией поля скоростей фильтрации по мощности потока, создающей предпосылки для возникновения концентрационных градиентов в направлениях, ортогональных поверхностям контактирующих слоев (которые пока будем считать однородными). При этом молекулярная диффузия и поперечная гидродисперсия являются факторами, направленными на выравнивание концентрации между элементами с различной гидравлической проницаемостью: благодаря этим процессам скорость (интенсивность) массопереноса в менее проницаемых слоях растет, а в более проницаемых падает.

В общем случае при построении расчетной модели миграции трассера в стратифицированном пласте в качестве исходного рассматривается уравнение

$$n\frac{\partial C}{\partial t}+v_x\frac{\partial C}{\partial x}+v_z\frac{\partial C}{\partial z}-D_x\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}-D_z\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}=0, \qquad (1)$$

где все параметры (n - пористость; v_x и v_z - горизонтальная и вертикальная компоненты скорости фильтрации; D_x и D_z - коэффициенты продольной и поперечной дисперсии) являются функциями только вертикальной координаты z, причем они могут быть заданы либо строго однозначно, либо при помощи статистических функций. В соответствии с этим различаются два подхода к описанию процессов массопереноса в стратифицированных системах: первый основан на детерминированных представлениях о свойствах среды [2, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13]; второй учитывает стохастический характер природных объектов [10, 14].

Простейшим примером детерминированной стратифицированной системы служит двухслойный пласт (рис.I,а,б), для которого могут быть получены конечные аналитические решения, анализ которых позволяет в ряде случаев выделить характерные режимы массопереноса.

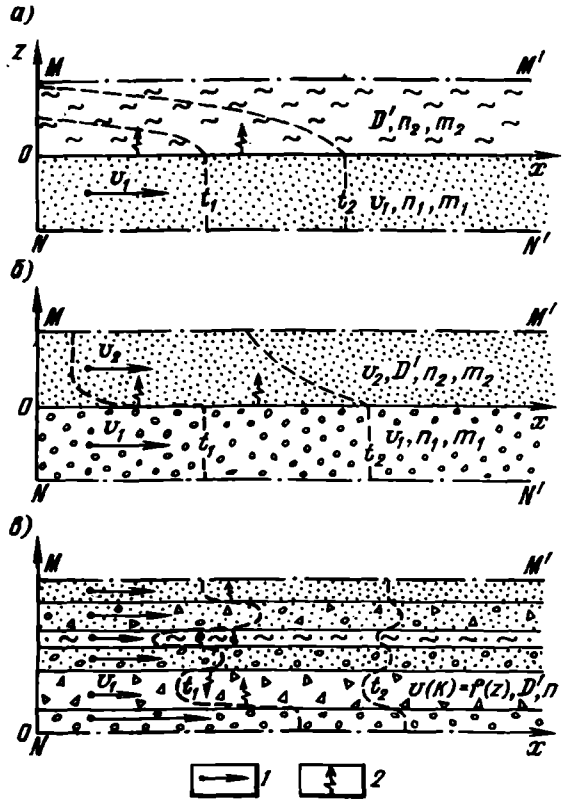


Рис.1. Схема профильной миграции подземных вод в характерных стратифицированных системах: а и б – двухслойный пласт с резко различающейся и сопоставимой проницаемостью отдельных слоев соответственно; в – многослойный пласт со случайным распределением проницаемости слоев в разрезе
1 и 2 – направления конвективного и поперечного диффузионно-дисперсионного потоков

В разумно упрощенной математической модели двухслойного пласта основными механизмами миграции являются конвективный перенос вещества, показателем интенсивности которого служат послойные действительные скорости фильтрации v_{x_1}/n_1 и v_{x_2}/n_2 (индексы I и 2 относятся соответственно к более и менее проницаемым слоям), и поперечная дисперсия (диффузия) в менее проницаемом слое, характеризующаяся постоянным коэффициентом D_z. Вертикальным концентрационным градиентом в более проницаемом слое, конвективным межслоевым обменом и продольной дисперсией в обоих слоях при этом пренебрегают. Сделанные допущения позволяют представить общее уравнение переноса в двухслойной среде (I) с переменными коэффициентами в виде системы двух взаимосвязанных уравнений с постоянными коэффициентами; эта система складывается из уравнения баланса вещества в слое I

$$n_1 \frac{\partial C_1}{\partial t} + v_{x_1} \frac{\partial C_1}{\partial x} + Q_S = 0 \qquad (2)$$

и уравнения конвективного переноса, осложненного поперечной дисперсией, в слое 2

$$n_2 \frac{\partial C_2}{\partial t} + v_{x_2} \frac{\partial C_2}{\partial x} - D_z \frac{\partial^2 C_2}{\partial z^2} = 0, \qquad (3)$$

где Q_S – удельная интенсивность межслоевого массообмена, определяемая градиентным соотношением

$$Q_S = -\frac{D_z}{m_1}\left.\frac{\partial C_2}{\partial z}\right|_{z=0} \qquad (4)$$

Уравнения (2), (3) и (4) обычно дополняются следующими начальными и граничными условиями:

$$C_1|_{t=0} = C_2|_{t=0} = 0;\ C_1|_{x=0} = C_2|_{x=0} = C_0;\ C_1|_{z=0} = C_2|_{z=0};\ \left.\frac{\partial C_1}{\partial z}\right|_{z=-m_1} = \left.\frac{\partial C_2}{\partial z}\right|_{z=m_2} = 0 . \qquad 5)$$

В уравнениях (4) и (5) m_1 и m_2 – мощности слоев.

I.I. Некоторые балансовые оценки для схемы послойного переноса

Очевидно, что самые ранние этапы миграции в двухслойном пласте характеризуются независимым – послойным – переносом, при котором взаимодействие слоев практически не отражается на интенсивности продвижения контактирующих растворов в каждом из них; поэтому координаты фронтов можно рассчитывать по схеме поршневого вытеснения, а размер формирующейся зоны относительного смещения фронтов $\Delta x_{\text{п}}^*$ считать пропорциональным текущему времени процесса и разности послойных действительных скоростей фильтрации:

$$\Delta x_{\text{п}}^* = \left(\frac{v_{x_1}}{n_1} - \frac{v_{x_2}}{n_2}\right) t . \qquad (6)$$

Наиболее наглядные оценки для проверки справедливости расчетной схемы послойного переноса получаются из балансовых построений, к которым приводит решение краевой задачи (2)–(5) относительно интегрального момента

$$n_1 \int_0^\infty C_1(x,t)\,dx = M_0(t) - M_{\text{п}}(t), \qquad (7)$$

где $M_0(t) = C_0 v_{x_1} t$; $M_{\text{п}}(t) = C_0\left(v_{x_1} - v_{x_2}\frac{n_1}{n_2}\right)\left(1 - \frac{W}{Bt}\right)t$; $W = 2\sqrt{\frac{Bt}{\pi}} + e^{Bt}\operatorname{erfc}\sqrt{Bt} - 1$; $B = \frac{D_z n_2}{m_1^2 n_1^2}$

При поиске решения (7) было сделано допущение, что ограниченность (по мощности) менее проницаемого слоя не влияет на интенсивность поперечного перемешивания в пределах зоны разрыва фронтов; учитывая начальную стадию процесса, это ограничение не является принципиальным, тем более, что его выполнение всегда может быть легко проконтролировано.

Левая часть формулы (7) отвечает общему количеству вещества, приходящемуся на более проницаемый слой (приведенному к единичной мощности потока). Решение (7) представлено в форме, позволяющей выделить две приведенные составляющие массового баланса: M_0 – суммарное количество вещества, поступившего через входную границу более проницаемого слоя; $M_{\text{п}}$ – объем вещества, диффундирующего из него в менее проницаемый слой. Логично предположить, что режим послойного переноса имеет место до тех пор, пока

относительная доля вещества, ушедшего на диффузию, не превысит некоторой наперед заданной малой величины ε от общего массового потока по наиболее проницаемому слою:

$$\frac{M_{\text{п}}}{M_0} = \frac{v_{x_1}/n_1 - v_{x_2}/n_2}{v_{x_1}/n_1}\left(1 - \frac{W}{Bt}\right) < \varepsilon . \qquad (8)$$

Например, ограничив относительную величину дисперсионного межслоевого потока вещества 10 % ($\varepsilon = 0{,}1$), для наименее благоприятного случая $v_{x_1}/n_1 \gg v_{x_2}/n_2$ найдем, что условие применимости схемы послойного переноса (8) будет выполняться при

$$Bt < 0{,}05 \qquad \text{или} \qquad t < t_{\text{п}} \approx 0{,}05\,\frac{m_1^2 n_1^2}{D_x n_2} . \qquad (9)$$

Отсюда, в частности, получим, что для разреза, представленного чередованием слоев песчано-глинистых пород мощностью около 1 м, время $t_{\text{п}}$ измеряется обычно сотнями суток; для тонкослоистого разреза (мощность отдельных слоев не превышает первых десятков сантиметров) время $t_{\text{п}}$ меняется от суток до десятков суток.

Полагая далее для простоты $n_1 \approx n_2 = n$, $D_x \approx 0{,}1\delta v_{x_1}$ (δ – константа продольной микродисперсии), получим

$$t < t_{\text{п}} \approx 0{,}5\,\frac{m_1^2 n}{v_{x_1}\delta} \qquad (10)$$

Следовательно, за время $t_{\text{п}}$ концентрационный фронт в хорошо проницаемом слое перемещается на расстояние

$$x_{\text{п}} = v_{x_1} t_{\text{п}}/n \approx 0{,}5\, m_1^2/\delta . \qquad (11)$$

Например, для характерных значений $\delta = 10^{-2} \div 10^{-3}$ м при $m_1 = 10^{-1}$ м расстояние $x_{\text{п}} \approx 0{,}5 \div 5$ м, а при $m_1 = 1$ м $x_{\text{п}} \approx 50 \div 500$ м. Таким образом, для достаточно маломощных прослоев (несколько десятков сантиметров) послойный перенос имеет место только в относительно малопротяженных областях длиной до нескольких десятков метров (масштаб, характерный для полевых индикаторных опытов); для слоев мощностью несколько метров в режиме независимого послойного движения происходит перенос компонентов на расстояния в несколько сотен метров (масштаб региональных прогнозных построений).

Вместе с тем, приведенный критерий для послойного переноса (8) определяется не только емкостными и массообменными параметрами пласта, но и в значительной степени соотношением между послойными действительными скоростями фильтрации; в частности, при их близких значениях схема послойного движения имеет практически неограниченное применение.

В дальнейшем, рассматривая математические схемы миграции в двухслойном пласте на временных этапах, не укладывающихся в интервалы, определяемые критериями (9)–(11), ограничимся в основном типовыми случаями, допускающими предельные (асимптотические) решения.

I.2. Перенос в двухслойном пласте с резко различными значениями проницаемости

Этому случаю соответствует система уравнений (2)-(5), в которой $v_{x_2} = 0$, а параметр поперечного обмена D_z аналогичен коэффициенту молекулярной диффузии $D_м (D_z = D_м)$. Расчетные зависимости могут быть получены на основе решения задачи в изображениях по Лапласу:

$$\tilde{C} = \frac{C_0 \operatorname{ch}\left[\sqrt{\bar{p}}(1-z)\, m_2\right]}{p \operatorname{ch}\sqrt{\bar{p}}} \exp\left[-\frac{x n_1}{v_{x_1}}\left(p + \frac{G_p}{n_1}\right)\right], \qquad (I2)$$

где $\tilde{C}\big|_{z=0} \equiv \tilde{C}_1$; $\tilde{C}\big|_{z>0} \equiv \tilde{C}_2$; $\bar{p} = m_2^2 n_2 p / D_м$; $G_p = \frac{D_м \sqrt{\bar{p}}}{m_1 m_2} \operatorname{th}\sqrt{\bar{p}}$.

Оригинал функции (I2) при $z = 0$ (хорошо проницаемый слой) выполне-

$$\bar{C}_1 = \frac{C_1}{C_0} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{\eta z}{2}\left(\frac{\operatorname{sh} z - \sin z}{\operatorname{ch} z + \cos z}\right)\right] \sin\left[\frac{\tau z^2}{2} - \frac{\eta z}{2}\left(\frac{\operatorname{sh} z + \sin z}{\operatorname{ch} z + \cos z}\right)\right] \frac{dz}{z}, \qquad (I3)$$

где $\eta = \frac{x D_м}{v_{x_1} m_1 m_2}$, $\tau = \frac{D_м}{m_2^2 n_2}\left(t - \frac{x n_1}{v_{x_1}}\right)$

Однако анализ решения задачи в изображениях (I2) позволяет получить и более доступные для практического использования выражения. Так, параметр G_P при больших значениях безразмерного комплекса $\bar{p}$, что отвечает начальным моментам времени, стремится к пределу $G_P \approx \sqrt{p D_м n_2}/m_1$ при котором для изображения функции $\tilde{C}$ существует табличный оригинал [I]:

$$\bar{C} = \operatorname{erfc}\left[\frac{z + D_м x / m_1 v_{x_1}}{2\sqrt{D_м (t - x n_1 / v x_1)/n_2}}\right]. \qquad (I4)$$

Это решение, записанное относительно концентрации вещества в хорошо проницаемом слое (при $z = 0$), известно как формула Ловерье [I2].

Сделанное допущение о кратковременности процесса удовлетворяет физической предпосылке неограниченной емкости слабопроницаемого слоя, предполагающей, что влияние молекулярно-диффузионного переноса в нем за рассматриваемый период не достигает его внешней границы. Исходя из решения соответствующей диффузионной задачи, можно считать, что это допущение заведомо справедливо при условии $\tau^* = D_м t / m_2^2 n_2 < 0{,}3 \div 0{,}5$.

Другое предельное решение может быть получено при малых значениях комплекса $\bar{p}$, т.е. для больших моментов времени, что также позволяет найти для параметра G_P свое асимптотическое представление [2, 6]:

$$G_P \approx \frac{D_м}{m_1 m_2} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{2\bar{p}}{\bar{p} + (2k-1)^2 \pi^2/4} \qquad (I5)$$

Ряд в формуле (I5) при малых $\bar{p}$ сходится быстро, поэтому эта формула будет хорошо аппроксимироваться следующей приближенной двухчленной зависимостью

$$G_P \approx \frac{D_M}{m_1 m_2}\left[\frac{2p}{p+2D_M/m_2^2 n_2}+\left(1-\frac{8}{\pi^2}\right)\frac{m_2^2 n_2 p}{D_M}\right]^{*} \qquad (16)$$

Обращение формулы (12) при $x = 0$ и комплексном параметре G_P, определяемом в соответствии с зависимостью (16), приводит к следующему решению относительно концентрации в хорошо проницаемом слое [6]:

$$\bar{C}_1 = J(\eta;\tau) = 1 - e^{-\tau}\int_0^{\eta} e^{-\lambda} I_0(2\sqrt{\tau\lambda})\,d\lambda\,, \qquad (17)$$

где $I_0(z)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка; графики для функции $J(\eta,\tau)$ приведены в работах [3, 5];

$$\eta = \frac{2x D_M}{v_{x_1} m_1 m_2}\,,\quad \tau = \frac{2D_M}{m_2^2 n_2}\left[t - \frac{x n_1}{v_{x_1}}(1-\beta)\right];\quad \beta = \left(1-\frac{8}{\pi^2}\right)\frac{m_2 n_2}{m_1 n_1}. \qquad (18)$$

Полученный результат интересен и тем, что к близкому с формулой (17) решению приводит вполне конкретная физическая предпосылка о регулярном (квазистационарном) режиме массообмена между слоями; соответствующая расчетная схема получила название схемы сосредоточенной емкости. Она предполагает, что вся емкость слабопроницаемого слоя сосредоточена в его средней плоскости (здесь концентрация отвечает среднему значению C_2), а скорость подтока вещества из смежного слоя бесконечно велика. Тогда интенсивность обмена между слоями

$$Q_S = \frac{\alpha_c}{m_1}(C_1 - C_2)\,, \qquad (19)$$

где α_c – коэффициент межслоевого массообмена.

Соответственно уравнение баланса вещества в слабопроницаемом слое имеет вид

$$m_2 n_2 \frac{\partial C_2}{\partial t} = \alpha_c (C_1 - C_2)\,. \qquad (20)$$

Общее решение задачи (2), (19) и (20):

$$\bar{C} = \begin{cases} \bar{C}_1 = J(\eta,\tau) = 1 - e^{-\tau}\int_0^{\eta} e^{-\lambda} I_0(2\sqrt{\tau\lambda})\,d\lambda\,; \\ \bar{C}_2 = J'(\eta,\tau) = e^{-\eta}\int_0^{\tau} e^{-\lambda} I_0(2\sqrt{\eta\lambda})\,d\lambda\,, \end{cases} \qquad (21)$$

в которых аргументы функций $J(\eta,\tau)$ и $J'(\eta,\tau)$ имеют вид

$$\eta = \frac{\alpha_c x}{m_1 v_{x_1}}\,,\quad \tau = \frac{\alpha_c}{m_2 n_2}\left(t - \frac{x n_1}{v_{x_1}}\right) \qquad (22)$$

Из формального сравнения переменных (18) и (22) нетрудно установить выражение для коэффициента межслоевого массообмена

$$\alpha_c \approx 2D_M / m_2\,,$$

---

* В работе [6] учитывается только первый член этого разложения.

который оказывается зависящим от мощности слабопроницаемого слоя и коэффициента молекулярной диффузии D_M.

При регулярном режиме обмена между слоями коэффициентом α_c может быть приближенно учтена и роль вертикальных конвективных межслоевых перетоков со скоростью v_z; так, при совпадении направлений диффузионного и конвективного потоков

$$\alpha_c \approx \frac{2D_M}{m_2} + v_z ,$$

откуда следует, что уже при $k_z \Delta H > 10^{-3} \div 10^{-4}$ м^2/сутки (k_z - коэффициент фильтрации слабопроницаемых пород; ΔH - перепад напоров в пределах слабопроницаемого слоя) значение вертикальной конвекции в межслоевом массообмене является определяющим.

Анализ показывает, что применительно к фундаментальной задаче схема сосредоточенной емкости дает относительно надежные результаты при выполнении условий

$$\tau^* = \frac{\alpha_c t}{m_2 n_2} > 0{,}5 \div 1 ; \qquad (23)$$

$$x < \frac{x_{01}}{1 + m_2 n_2 / m_1 n_1} , \qquad (24)$$

где x_{01} - координата фронта поршневого вытеснения в более проницаемом слое, $x_{01} = v_{x_1} t / n_1$. Условию (24) удовлетворяют концентрационные точки, характеризующие заднюю половину индикаторной волны ($\bar{C} > 0{,}5$).

Для нахождения функции, аппроксимирующей концентрационную кривую на весьма длительных этапах миграции ($\tau^* = \alpha_c t / m_2 n_2 > 20$), что отвечает асимптотическому режиму переноса, могут привлекаться известные решения эффективного диффузионного уравнения

$$n^* \frac{\partial C^*}{\partial t} + v_x^* \frac{\partial C^*}{\partial x} - D^* \frac{\partial^2 C^*}{\partial x^2} = 0. \qquad (25)$$

Для этого уравнения методом статистических соотношений легко устанавливаются асимптотические параметры, согласно которым общая интенсивность процесса определяется эффективными значениями скорости фильтрации и пористости

$$v_x^* = \frac{v_{x_1} m_1}{m_1 + m_2} \qquad n^* = \frac{m_1 n_1 + m_2 n_2}{m_2 + n_2} ,$$

а эффекты рассеяния характеризуются коэффициентом макродисперсии $D^* = \delta^* v_{x_1}^2$, где $\delta^* = m_1^2 / \alpha_c (m_1 + m_2)(1 + m_1 n_1 / m_2 n_2)^2$ - константа макродисперсии.

Вместе с тем численные оценки показывают, что, если допустимо ограничиться рассмотрением концентрационных точек со значениями $\bar{C} > 0{,}5$, то асимптотическая схема дает вполне приемлемые результаты и для менее жесткого временного интервала

$$\tau^* = \alpha_c t / m_2 n_2 > 5 . \qquad (26)$$

В этом случае дополнительным к соотношению (26) критерием применимости асимптотической схемы служит условие (24), которое означает, что соответствующие решения уравнения (25) будут достаточно хорошо описывать концентрационное поле в пласте лишь в области больших $\bar{C}$ ($\bar{C} > 0{,}5$).

Таким образом, условие применимости схемы сосредоточенной емкости (23) в значительной степени перекрывается условием (26), что свидетельствует об относительной ограниченности этой схемы, служащей лишь переходным расчетным приближением между двумя крайними асимптотическими режимами, удовлетворяющими несравненно более широкому кругу практически значимых задач миграции подземных вод в стратифицированных комплексах пород.

I.3. Перенос в двухслойном пласте с близкими значениями проницаемостей отдельных слоев

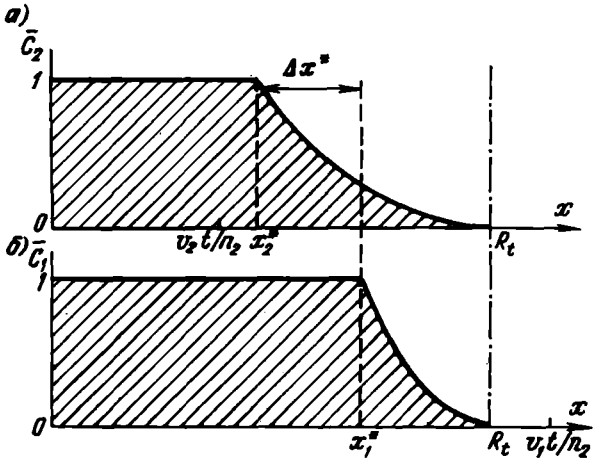


Рис.2. Эпюры концентрационного поля в двухслойном пласте (к выводу формулы для расчета длины зоны относительного смещения фронтов Δx^*): а и б - второй и первый слои соответственно

Строгое решение этой задачи переноса имеет весьма сложный вид [8], требующий при расчетах вычисления ряда специальных функций. Поэтому ограничимся более доступными приближенными решениями для достаточно длительных этапов миграции, характеризующихся квазистационарным режимом массообмена между слоями. Исходная система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} n_1 \dfrac{\partial C_1}{\partial t} + v_{x_1} \dfrac{\partial C_1}{\partial x} + \dfrac{\alpha_c}{m_1}(C_1 - C_2) = 0 ; \\ n_2 \dfrac{\partial C_2}{\partial t} + v_{x_2} \dfrac{\partial C_2}{\partial x} - \dfrac{\alpha_c}{m_2}(C_1 - C_2) = 0 , \end{cases} \qquad (27)$$

где α_c - параметр межслоевого массообмена.

Решение системы (27) будем искать относительно интегральных моментов

$$\vartheta_{0K} = m_K n_K \int_0^{R_t} C_K \, dx , \qquad (28)$$

где к - номер слоя, $\bar{C}_к = C_к / C_0$; C_0 - концентрация на входной границе ($x = 0$); R_t - условный радиус влияния концентрационных функций (рис.2). Домножая все члены системы уравнений (27) на dx и интегрируя их в пределах от 0 до R_t, преобразуем ее к виду

$$\frac{\partial \nu_{01}}{\partial t} - v_{x_1} m_1 + \alpha_c \left(\frac{\nu_{01}}{m_1 n_1} - \frac{\nu_{02}}{m_2 n_2} \right) = 0. \qquad (29)$$

Решение системы уравнений (29) относительно моментов ν_{01} и ν_{02} проще всего находится после ее трансформирования в область изображений по Лапласу

$$\begin{cases} p\,\tilde{\nu}_{01} - \dfrac{v_{x_1} m_1}{p} + \alpha_c \left(\dfrac{\tilde{\nu}_{01}}{m_1 n_1} - \dfrac{\tilde{\nu}_{02}}{m_2 n_2} \right) = 0; \\ p\,\tilde{\nu}_{02} - \dfrac{v_{x_2} m_2}{p} - \alpha_c \left(\dfrac{\tilde{\nu}_{01}}{m_1 n_1} - \dfrac{\tilde{\nu}_{02}}{m_2 n_2} \right) = 0, \end{cases} \qquad (30)$$

где $\tilde{\nu}_{0к} = \int_0^\infty \nu_{0к} e^{-pt} dt$. Теперь нетрудно получить

$$\tilde{\nu}_{01} = \frac{v_{x_1} m_1}{p(p + \alpha_c / m_1 n_1)} + \frac{\alpha_c p v_{x_2} / n_2 + \alpha_c^2 (v_{x_1} m_1 + v_{x_2} m_2)/m_1 m_2 n_1 n_2}{p^2 (p + \alpha_c / m_1 n_1)\left[p + \alpha_c (1 + m_2 n_2 / m_1 n_1)/m_2 n_2\right]}, \qquad (31)$$

$$\tilde{\nu}_{02} = \frac{v_{x_2} m_2 p + \alpha_c (v_{x_1} m_1 + v_{x_2} m_2)/m_1 n_1}{p^2 \left[p + \alpha_c (1/m_1 n_1 + 1/m_2 n_2) \right]}. \qquad (32)$$

Для обращения трансформанты (31) воспользуемся формулой из работы [1] с последующим применением для второго слагаемого теоремы свертки; в результате придем к решению относительно оригинала функции ν_{01}:

$$\nu_{01} = \frac{v_{x_1} m_1 + v_{x_2} m_2}{1 + m_2 n_2 / m_1 n_1} t + \frac{(m_2 n_2)^2}{\alpha_c (1 + m_2 n_2 / m_1 n_1)} \left[\frac{v_{x_1} m_1 + v_{x_2} m_2}{m_1 n_1 + m_2 n_2} - \frac{v_{x_2}}{n_2} \right] \times$$

$$\times \left[1 - \exp\left(- \frac{\alpha_c (m_1 n_1 + m_2 n_2) t}{m_1 m_2 n_1 n_2} \right) \right]. \qquad (33)$$

Для изображения (32) существует табличный оригинал [1]:

$$\nu_{02} = \frac{v_{x_1} m_1 + v_{x_2} m_2}{1 + m_1 n_1 / m_2 n_2} t - \frac{m_1 m_2 n_1 n_2}{\alpha_c (1 + m_1 n_1 (m_2 n_2)} \left[\frac{v_{x_1} m_1 + v_{x_2} m_2}{m_1 n_1 + m_2 n_2} - \frac{v_{x_2}}{n_2} \right] \times$$

$$\times \left[1 - \exp\left(- \frac{\alpha_c (m_1 n_1 + m_2 n_2) t}{m_1 m_2 n_1 n_2} \right) \right]. \qquad (34)$$

Вернемся к исходной предпосылке. Интегралы ν_{01} и ν_{02} (28) имеют наглядный физический смысл - их численные значения отвечают общему количеству вещества, содержащегося в слоях (заключенному в интервале $0 \leq x < R_t$) к расчетному моменту времени t. В соответствии с этим, первые слагаемые в формулах (33) и (34) характеризуют средневзвешенное по поровому объему двух слоев содержание вещества в системе, а вторые отражают отклонение от этой величины за счет выноса или привноса вещества, обусловленного дисперсионным взаимодействием слоев. Естественно предположить, что одна часть

этого вещества идет на формирование стабильных для каждого из слоев областей полного насыщения (здесь $\bar{C}_K \approx 1$), другая формирует переходные зоны ($0 \leq \bar{C}_K < 1$). Тогда очевидно следующее представление интегралов ν_{0K}:

$$\frac{\nu_{0K}}{m_K n_K} = \int_0^{R_t} \bar{C}_K dx = \int_0^{x_K^*} \bar{C}_K dx + \int_{x_K^*}^{R_t} \bar{C}_K dx, \qquad (35)$$

где x_K^* отвечает положению фронта полного насыщения в k-м слое (рис.2).

Первый интеграл в правой части формулы (35) численно равен x_K^*, чтобы найти второй интеграл, предположим, что функция концентрации в пределах переходной зоны ($x_K^* < x < R_t$) изменяется по степенному закону

$$\bar{C}_K = \left(\frac{R_t - x}{R_t - x_K^*}\right)^{\lambda}$$

Тогда для рассматриваемого двухслойного пласта получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\nu_{01}}{m_1 n_1} = x_1^* + \dfrac{1}{1+\lambda}(R_t - x_1^*); \\ \dfrac{\nu_{02}}{m_2 n_2} = x_2^* + \dfrac{1}{1+\lambda}(R_t - x_2^*), \end{cases}$$

решая которую, найдем величину относительного смещения фронтов

$$\Delta x^* = x_1^* - x_2^* = \frac{1+\lambda}{\lambda}\left(\frac{\nu_{01}}{m_1 n_1} - \frac{\nu_{02}}{m_2 n_2}\right).$$

Далее, подставляя в эту формулу значения ν_{01} и ν_{02} при $\lambda > 3$, получим зависимость, дающую описание динамики развития зоны относительного смещения фронтов,

$$\Delta x^* \approx \left(\frac{v_{x_1}}{n_1} - \frac{v_{x_2}}{n_2}\right)\left(1 - e^{-t/\tau_c}\right)\tau_c, \qquad (36)$$

где $\tau_c = m_2 n_2 / \alpha_c (1 + m_2 n_2 / m_1 n_2)$ - некоторое характерное время релаксации двухслойной системы (оно приближенно отвечает периоду полного охвата пласта процессами поперечного дисперсионного перемешивания). Однако предположение о квазистационарном режиме массообмена между слоями заметно ограничивает применение решения (36) условием $t > \tau_c$.

Рассматриваемый здесь двухслойный хорошо проницаемый пласт может быть сведен при $v_{x_2} = 0$ к своему частному варианту - пласту с существенно различными значениями проницаемостей отдельных слоев, для которого известны более строгие аналитические решения, позволяющие рассчитать показатель Δx^* напосредственно по распределению концентрационного поля. Таким образом, появляется возможность подтвердить надежность выполненных приближенных построений. Примерами сопоставительных численных оценок могут служить расчеты (рис.3), где величина Δx^* определялась по относительному смещению изолинии концентрации $\bar{C} = 0{,}9$, которые вполне между собой согласуются. Между прочим, если емкостные характеристики слоев не

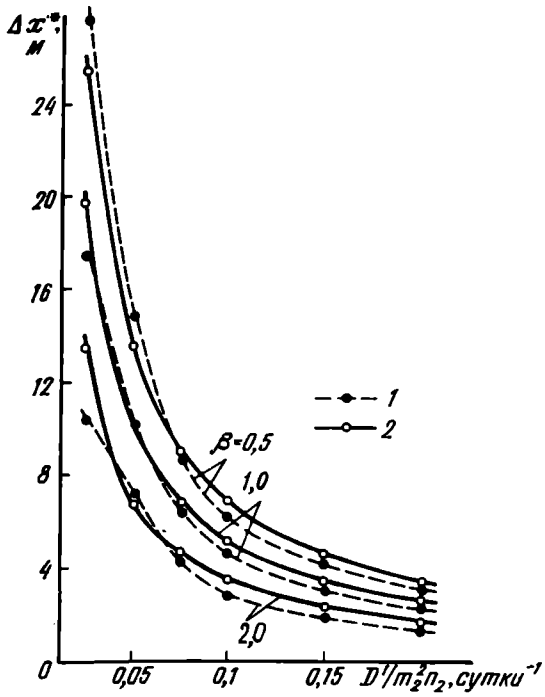


Рис.3. Изменение размера зоны относительного смещения фронтов Δx^* в двухслойном пласте в зависимости от параметров системы $\alpha_c' = D'/m_2^2 n_2$ и $\beta = m_2 n_2 / m_1 n_1$
1 и 2 - результаты расчетов по формулам (36) и (21) соответственно (t = 40 суток, v_{x_1}/n_1 = 2 м/сутки, v_{x_2}/n_2 = 0)

слишком сильно различаются, то порядок приведенных оценок сохраняется и при расчетах Δx^* по относительному смещению других одноименных точек концентрационного фронта $\bar{C} \geqslant 0,5$.

Анализ полученной зависимости (36) показывает, что величина относительного смещения фронтов Δx^* пропорциональна разности между послойными действительными скоростями фильтрации и растет во времени, стремясь при $t > t^* \approx (2 \div 3)\tau_c$ к своему предельному значению[x]

$$\Delta x_a^* \approx \left(\frac{v_{x_1}}{n_1} - \frac{v_{x_2}}{n_2} \right) \tau_c , \quad (37)$$

т.е. относительное смещение одноименных концентрационных точек Δx_a^*, характеризующих задние половины ($\bar{C} \geqslant 0,5$) фронтов послойного переноса, стабилизируется. Это значит, что размер всей переходной зоны Δx_a^* в дальнейшем увеличивается в основном за счет кинетических межслоевых обменных процессов на переднем фронте вытеснения.

С наступлением асимптотического режима переноса для описания процесса может использоваться диффузионная схема (25). Асимптотическими параметрами этого уравнения являются эффективные значения скорости фильтрации и пористости

$$v_x^* = \frac{v_{x_1} m_1 + v_{x_2} m_2}{m_1 + m_2} \qquad n^* = \frac{m_1 n_1 + m_2 n_2}{m_1 + m_2} , \quad (38)$$

которые определяют общую интенсивность переноса, и постоянный коэффициент макродисперсии

$$D^* = \delta^* \left(v_{x_1} - \frac{n_1}{n_2} v_{x_1} \right)^2 \quad (39)$$

[x] Стабилизация во времени показателя Δx^*, а затем и других параметров стратифицированной системы подтверждается лабораторными экспериментами [4, 15], а также решениями задачи на математических (численных) моделях [3, 11].

характеризующий динамику развития полной переходной зоны Δx_a^*. Последняя для условий фундаментальной задачи дается формулой (37), в которой характерный масштаб времени

$$\tau_c = \frac{4 m_1 m_2 n_1 n_2}{m_1 n_1 + m_2 n_2} \sqrt{\frac{t}{\alpha_c (m_1 n_1 + m_2 n_2)}}$$

Таким образом, при достаточно длительных этапах миграции коэффициенты (38) и (39) сводят двухслойный пласт к эквивалентному однородному.

Заметим, что вертикальные конвективные перетоки, резко увеличивая расчетные значения коэффициента межслоевого обмена α_c, приводят к сокращению размера переходной зоны. В частном варианте ($n_1 \approx n_2, m_1 \approx m_2 = m$, $v_{x_1} \gg v_{x_2}$), а также в предположении о доминирующей роли конвективного обмена над диффузионным, получим $D^* \approx m v_z / 6 \mu^2$ где $\mu = v_z / v_x$; $v_x = v_{x_1}$ и v_z - компоненты скорости фильтрации по напластованию и вкрест ему.

2. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

При переходе к многослойным пористым толщам детерминированные модели оказываются малоэффективными; во-первых, весьма затруднены любые аналитические оценки (за исключением асимптотических), а, во-вторых, вертикальные распределения всех необходимых параметров (в том числе и фильтрационных) не могут быть получены на практике. Поэтому заслуживают внимания стохастические модели миграционного процесса.

Рассматривая миграционные параметры как случайные функции вертикальной координаты z, авторы работы [10] получили стохастическое представление двумерного уравнения переноса (1) при $v_z = 0$, что позволило при помощи спектрального анализа исследовать процессы дисперсии в стратифицированной системе (схематично представленной на рис.1,в) с относительно небольшими вариациями послойной проницаемости (при постоянной пористости n). В частности, было получено выражение для коэффициента макродисперсии эквивалентной модели (25) в терминах статистических свойств среды (при $v^* = v_x$; $n^* = n$). Оказалось, что в общем случае расчетные значения параметра D^* в значительной степени зависят от масштаба области рассмотрения процесса, однако, как и в предыдущих случаях, можно выделить два характерных предельных режима массопереноса.

В режиме послойного переноса значение D^*, пропорциональное скорости фильтрации v_x и статистической дисперсии коэффициента фильтрации σ_k^2, растет вместе со средней длиной переноса L:

$$D^* = \left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 v_x L, \qquad (40)$$

где k и v_x - средние значения соответственно коэффициента фильтрации и скорости фильтрации.

Уже из формального анализа зависимости (40) следует, что масштабы макродисперсии в статистически стратифицированных средах должны превосходить гидродисперсионное рассеяние в однородных (пусть даже обладающих

высокими рассеивающими параметрами) породах, причем эффективный коэффициент D^* растет с увеличением масштаба области переноса (линейность этой зависимости соблюдается до тех пор, пока пренебрежимо мала роль процессов поперечного обмена). Полезно также отметить, что характерное число Пекле Pe в этом варианте определяется коэффициентом профильной вариации проницаемости: $Pe = I/W_K^2$, где $W_K = \sigma_K/k$.

Наоборот, асимптотический режим характеризуется постоянным коэффициентом макродисперсии D^*, который зависит только от свойств среды и средней скорости фильтрации $D^* = \delta^* v_x^2$, где $\delta^* = \sigma_K^2 l^2 / 3k^2 D_z$ – константа макродисперсии для стратифицированного пласта; l – характерный масштаб ковариационной функции проницаемости.

В работе [I4] подчеркивается принципиальная важность вертикальной составляющей скорости фильтрации для развития макродисперсии в слоистых системах: она во многом определяет асимптотический режим переноса. Вертикальная компонента скорости фильтрации v_z ускоряет поперечный обмен в рассматриваемой стратифицированной системе, тем самым уменьшая расчетные значения константы макродисперсии [I4]:

$$\delta^* = \frac{\sigma_K^2 D_z (D_z/3l + v_z)}{k^2 (D_z/l + v_z)^3}.$$

Оценки, выполненные для характерных значений параметров стратифицированных систем [I4], показывают, что уже при $\mu = v_z/v_x > 0{,}01$ (т.е. при сравнительно малых значениях v_z, которыми обычно принято пренебрегать в построениях плановой теории фильтрации) вертикальная конвекция существенно влияет на весь процесс макродисперсии. При бо́льших $v_z (v_z \gg D_z/l)$ получим $D^* = \sigma_K^2 D_z / k^2 \mu^2$.

Зависимость (40) справедлива для временного диапазона $t < t_П \approx 0{,}05\nu$ (здесь $\nu = l^2 n / D_z$, а при наличии интенсивных межслоевых конвективных перетоков $\nu \approx ln/v_z$); при выполнении условия $t > t^* \approx (5 \div 10)\nu$ процесс описывается асимптотическим значением D^*. Время наступления асимптотического режима, например, для песчаных толщ с характерной мощностью отдельных прослоев около I м достаточно велико: тысячи-десятки тысяч суток; однако при наличии вертикальной конвекции указанные значения могут уменьшаться на один-два порядка.

Заметим также, что структура и порядок этих временных критериев близка к полученным для детерминированной модели двухслойного пласта.

Выводы

I. Относительно кратковременные и мелкомасштабные индикаторные эксперименты в стратифицированных комплексах реализуются, главным образом, в режиме послойного переноса. Следовательно, они практически не дают информации о межслоевых обменных процессах, отражая в лучшем случае неоднородность поля скоростей фильтрации в пределах опробуемой области; этим последним обстоятельством можно воспользоваться для расшифровки профильной фильтрационной неоднородности водоносных пластов.

Ленинградский Горный Ин-т

119883

2. При суммарном индикаторном опробовании подобных комплексов выходные кривые должны рассматриваться как отражение существующих колебаний фильтрационных параметров среды, а интерпретация опытов в рамках осредненных диффузионных схем (отвечающих однородным пластам) часто может давать физически неправдоподобные результаты. Однако при большой продолжительности переноса могут использоваться асимптотические решения, в которых макродисперсия отражается некоторыми приведенными параметрами - аналогично диффузионным расчетным моделям. В целом ситуация такова: каждому новому масштабу осреднения отвечает асимптотическая диффузионная расчетная схема с новым параметром макродисперсии, но для переходных периодов, до выхода на новую асимптотику, диффузионная расчетная модель „не работает".

3. Прогноз эффектов макродисперсии в региональном масштабе лишь в редких случаях может базироваться на схеме послойного переноса и, следовательно, требует информации не только о послойных скоростях фильтрации, но и о параметрах поперечной дисперсии и профильной фильтрационной анизотропии. В противовес этому, осреднение проницаемости в слоистых пластах и пренебрежение вертикальной составляющей скорости фильтрации могут приводить к большим погрешностям при миграционных прогнозах, даже при сравнительно слабых различиях проницаемости слоев (в пределах одного порядка, что отвечает предпосылкам плановой фильтрации) и при небольших относительных значениях вертикальной скорости фильтрации (уже при $\mu = v_z / v_x$ около 0,01).

4. Прогноз может еще более осложниться при миграции разноплотностных жидкостей: плотностная конвекция способна усиливать межслоевой обмен веществом (если она совпадает с ним по направлению) или, наоборот, ослаблять его вплоть до изменения направления (в противном случае); более того, в последнем варианте плотностная конвекция может практически полностью предотвратить обмен веществом между слоями, резко ускоряя тем самым продвижение загрязняющих компонентов по наиболее проницаемому слою водоносной системы. Таким образом, в подобных условиях достоверный прогноз должен базироваться на сопоставительной оценке нескольких составляющих переноса (поперечная дисперсия, вертикальная - вынужденная - конвекция, плотностная конвекция), что возможно лишь при наличии надежных сведений о проницаемости пород вкрест напластования (наряду с данными о послойной проницаемости вдоль напластования) или представительных данных о величинах конвективных составляющих фильтрационных потоков по соответствующим направлениям, полученных прямыми замерами.

5. Таким образом, необходимо существенно ужесточить требования к опытно-фильтрационным работам и наблюдениям, проводимым на участках возможного загрязнения подземных вод, с тем, чтобы оценивать профильную фильтрационную анизотропию и неоднородность, с определением, в частности, показателей проницаемости вкрест напластования. При постановке экспериментальных исследований в стратифицированных водоносных комплексах следует учитывать ограниченные возможности изучения необходимых миграционных параметров локальными опытно-миграционными опробованиями (речь идет, по крайней мере, о комплексах песчано-глинистых пород, в которых стратификацией определяют

ся основные особенности фильтрации и массопереноса). Следует подчеркнуть исключительную важность контрольных опытно-миграционных наблюдений, которые должны быть направлены на корректировку погрешностей прогноза, практически неизбежных в рассмотренных, весьма сложных для достоверного анализа, условиях. Разработка принципов постановки, методов проведения и интерпретации таких наблюдений с учетом профильной анизотропии и неоднородности водоносных комплексов – одна из актуальных проблем современной инженерной гидрогеологии.

В заключение еще одно замечание о дальнейших путях теоретического исследования задач массопереноса в стратифицированных водоносных комплексах. Так как фациально-литологическая характеристика этих комплексов обычно существенно меняется на площадях, соизмеримых с масштабами прогнозных гидрогеологических задач, то рассмотренные двумерные профильные модели могут оказаться в ряде случаев излишне сильной идеализацией, приводящей к экстремальным методическим и практическим выводам. Поэтому очень важно сопоставить данные двумерного анализа с результатами исследования преимущественно (на математических моделях) трехмерных задач массопереноса с учетом реальной площадной изменчивости стратифицированных водоносных комплексов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и $\mathcal{Z}$-преобразования. М., Наука, 1971.

2. Кононенко Г.Н., Вознюк Л.Ф. Приближенные методы исследования тепло- и массопереноса в системах извлечения тепла Земли. Киев, Наукова думка, 1975.

3. Мироненко В.А., Румынин В.Г., Учаев В.К. Охрана подземных вод в горнодобывающих районах (опыт гидрогеологических исследований). Л., Недра, 1980.

4. Огаджанянц В.Г., Садчиков П.Б., Кудрявцева Л.П. О роли молекулярной диффузии при движении взаиморастворимых жидкостей в неоднородных пористых средах. – В кн.: Разработка нефтяных месторождений и гидродинамика пласта. Тр. ВНИИ нефти и газа, 1967, вып. 50.

5. Рошаль А.А., Шестаков В.М. О миграции подземных вод в слоистых пластах. – В кн.: Гидрогеологические вопросы подземного захоронения промстоков. Тр. ВСЕГИНГЕО, 1969, вып. 14.

6. Рошаль А.А. Массоперенос в двухслойной пористой среде. – Журнал ПМТФ, 1969, № 4.

7. Шестаков В.М. Модели переноса в неоднородных пластах. – В кн.: Теория и расчеты фильтрации. Киев, Наукова думка, 1980.

8. Al-Niami A.N.S., Rushton K.R. – Water Res. Res., 1979, vol.15, N 5.

9. Brissaud F., Couchat Ph., Escande C. J. of Hydrology, 1976, vol.30, N 1/2.

10. Gelhar L.W., Gutjahr A.L., Naff R.L. – Water Res. Res., 1979, vol.15, N 6.

11. K o u t i t a s O., G a n o u l i s J. - Textes des communications presentees ou Symposium sur „les effects d'echelle en milieu poreux". Thessaloniki, 1978, p.3.

12. L a u v e r i e r H.A. - Applied Sci. Res., Section A, 1955, vol.5, N 2-3.

13. M a r l e C., S i m a n d o u x P., P a c s i r s z k y J., G a u r i e r C. - Revue de l'Institut Francais du Petrole, 1967, vol.22, N 2.

14. M a t h e r o n G., D e M a r s i l y G. - Water Res. Res., 1980, vol.16, N 5.

15. R o n a u t D., M u n t z e r P., Z i l l i o x L. - Techniques et Sciences Municipales, 1975.