Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г.В.Плеханова, т. XCII, 1982 г.

УДК 550.838.01

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТРЕХМЕРНЫХ ИСТОЧНИКОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ НА НЕГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

В.В.ГЛАЗУНОВ

Детерминистические способы интерпретации разрабатываются, как правило, на основании формул, справедливых для горизонтальной поверхности. Но физическая поверхность может быть сколь угодно сложной, и ее чаще и с меньшей погрешностью можно аппроксимировать наклонной, а не горизонтальной плоскостью. Сочетая это обстоятельство с желанием использовать первичные, а не трансформированные на горизонтальную плоскость данные, легко обосновать переход к формулам более общего вида, справедливым для произвольно ориентированной плоскости.

Для двумерных задач требуется незначительная коррекция формул за негоризонтальность поверхности наблюдений.[x] Структура аналитических выражений после коррекции сохраняется. Этого нельзя сказать о формулах для полей трехмерных источников. Покажем, что изменения имеют принципиальный характер, на примере магнитного поля тел произвольной формы.

Вектор напряженности аномального магнитного поля $\vec{T}_a$ в точке, удаленной от элемента объема намагниченного тела dV на расстояние r (вектор $\vec{r}$ направлен от точки наблюдения), определяется формулой

$$-\operatorname{grad} U = \vec{T}_a = \int_V \frac{3(\vec{J}\vec{r})\vec{r} - \vec{J}r^2}{r^5}\, dV, \qquad (I)$$

где V – объем тела; $\vec{J}$ – вектор намагниченности, $\operatorname{div}\vec{J} = 0$.

Из формулы (I) легко получить любую компоненту аномального магнитного поля. Для этого достаточно умножить ее на единичный вектор, параллельный требуемой компоненте. По этому правилу найдем выражение компоненты, не совпадающей с осями геомагнитной системы координат. Для этой цели подходит ΔT, которую можно считать компонентой при условии $T_a < 0{,}2T_0$. Учитывая, что ΔT в рамках принятого условия соответствует проекции $\vec{T}_a$

[x] Логачев А.А., Захаров В.П. Магниторазведка. Л., Недра, 1979.

на $\vec{T}_0$, определим единичный вектор $\vec{t}$, который направим вдоль $\vec{T}_0$. Тогда

$$\Delta\vec{T} = \vec{T}_a\,\vec{t} = \mathcal{J}\int_V \frac{3(\vec{\lambda}\vec{r})(\vec{t}\vec{r}) - (\vec{\lambda}\vec{t})r^2}{r^5}\,dV, \qquad (2)$$

где $\vec{\lambda}$ – единичный вектор, направленный вдоль $\vec{\mathcal{J}}$, т.е. $\mathcal{J}=\vec{\mathcal{J}}\vec{\lambda}$.

Разложим векторы $\vec{\lambda}$, $\vec{t}$, $\vec{r}$ в правой прямоугольной системе координат $\{x,y,z\}$, которая произвольно расположена в евклидовом пространстве, и выразим скалярные произведения векторов в формуле (2) через их компоненты:

$$\Delta T = \mathcal{J}\int_V \frac{3(\lambda_x r_x+\lambda_y r_y+\lambda_z r_z)(t_x r_x+t_y r_y+t_z r_z) - (\lambda_x t_x+\lambda_y t_y+\lambda_z t_z)(r_x^2+r_y^2+r_z^2)}{r^5}\,dV.$$

После несложных преобразований получим

$$\Delta T = (X_{0x}\lambda_x+X_{0y}\lambda_y+X_{0z}\lambda_z)t_x + (Y_{0x}\lambda_x+Y_{0y}\lambda_y+Y_{0z}\lambda_z)t_y+(Z_{0x}\lambda_x+Z_{0y}\lambda_y+Z_{0z}\lambda_z)t_z, \qquad (3)$$

где

$$X_{0x} = \mathcal{J}\int_V \frac{2r_x^2-r_y^2-r_z^2}{r^5}\,dV; \quad Y_{0y} = \mathcal{J}\int_V \frac{2r_y^2-r_x^2-r_z^2}{r^5}\,dV;$$

$$Z_{0z} = \mathcal{J}\int_V \frac{2r_z^2-r_x^2-r_y^2}{r^5}\,dV; \quad X_{0y} = Y_{0x} = 3\mathcal{J}\int_V \frac{r_x r_y}{r^5}\,dV;$$

$$X_{0z} = Z_{0x} = 3\mathcal{J}\int_V \frac{r_x r_z}{r^5}\,dV; \quad Y_{0z} = Z_{0y} = 3\mathcal{J}\int_V \frac{r_y r_z}{r^5}\,dV; \qquad (4)$$

$$r = \sqrt{r_x^2+r_y^2+r_z^2}\,; \quad r_x = (\xi - x); \quad r_y = (\eta - y); \quad r_z = (\xi - z);$$

$$dV = d\xi\,d\eta\,d\xi.$$

Физический смысл величин (4) вытекает из формулы Пуассона[x], связывающей магнитный потенциал U тела, намагниченного в направлении $\vec{\lambda}$, с ньютоновским потенциалом W того же тела, имеющего плотность σ:

$$U = -\frac{\mathcal{J}}{f\sigma}\frac{dW}{d\lambda},$$

где f – гравитационная постоянная.

Компонента магнитного поля[xx] в направлении, заданном единичным вектором $\vec{t}$

---

[x] Логачев А.А., Захаров В.П. Магниторазведка, Л., Недра, 1979.

[xx] Баранов В. Потенциальные поля и их трансформации в прикладной геофизике. М., Недра, 1980.

$$T_t = -\vec{t}\,\mathrm{grad}\,U = \frac{J}{f\sigma}\,\frac{d^2W}{d\lambda dt} = \frac{J}{f\sigma}\,W_{\lambda t}.$$

Тогда

$$X_{0y} = 3J\int_V \frac{r_x r_y}{r} = \frac{J}{f\sigma}\,W_{xy}$$

можно рассматривать как компоненту X от тела, намагниченного по оси y. Аналогично можно истолковать остальные величины (4). С учетом равенств

$$X_{0y} = Y_{0x};\quad X_{0z} = Z_{0x};\quad Y_{0z} = Z_{0y},$$

изменим формулу (3):

$$\Delta T = X_{0x}\lambda_x t_x + Y_{0y}\lambda_y t_y + Z_{0z}\lambda_z t_z +$$
$$+X_{0y}(\lambda_y t_x + \lambda_x t_y) + Z_{0x}(\lambda_z t_x + \lambda_x t_z) + Z_{0y}(\lambda_z t_y + \lambda_y t_z). \qquad (5)$$

Введем обозначения углов, характеризующих положение единичных векторов $\vec{t}$ и $\vec{\lambda}$ в выбранной системе координат: I' и i' – углы, образуемые плоскостью $x0y$ с $\vec{t}$ и $\vec{\lambda}$; A'_0 и A – углы, измеряемые в плоскости $x0y$ от оси x до проекций на эту плоскость векторов $\vec{t}$ и $\vec{\lambda}$. Выразим компоненты единичных векторов через тригонометрические функции введенных углов:

$$t_x = \cos I'\cos A'_0;\quad \lambda_x = \cos i'\cos A';$$
$$t_y = \cos I'\sin A'_0;\quad \lambda_y = \cos i'\sin A'; \qquad (6)$$
$$t_z = \sin I';\quad \lambda_z = \sin i'.$$

В магниторазведке принято определять углы от горизонтальной плоскости и направления на магнитный север.

Чтобы связать компоненты (6) с общепринятой системой координат, введем угол ρ, образуемый осью x с горизонтальной плоскостью, и угол A_0, отсчитываемый от проекции оси x на горизонтальную плоскость до направления на север. При этом ось x направим вдоль линии падения плоскости, а ось y разместим горизонтально. Тогда вместо формул (6) можно написать

$$t_x = \sin I\sin\rho + \cos I\cos\rho\cos A_0;\quad \lambda_x = \sin i\sin\rho + \cos i\cos\rho\cos A;$$
$$t_y = \cos I\sin A_0;\quad \lambda_y = \cos i\sin A; \qquad (7)$$
$$t_z = \sin I\cos\rho - \cos I\sin\rho\cos A_0;\quad \lambda_z = \sin i\cos\rho - \cos i\sin\rho\cos A.$$

Поясним, как на практике можно воспользоваться выражениями (5)-(7). Предположим, что магнитная съемка выполнена на негоризонтальной плоскости, магнитный азимут падения которой $D = -A_0$, а угол падения ρ. Измеренное поле можно аппроксимировать формулой (5), если положение и геометрию источника аномалии рассматривать в ортогональном базисе, оси x и y которого лежат в наклонной плоскости. Данный способ описания источника выглядит наиболее естественным и удобным. Его нетрудно согласовать с при-

нятой формой представления геологической информации. Если для упрощения выражений (4) ориентировку системы координат следует подчинить структурным линиям геометрии источника, то направление оси x может не совпасть с направлением на север и азимутом падения плоскости наблюдений. В этом случае целесообразно воспользоваться формулами (6), т.е. определить наклонение и склонение векторов $\vec{T}_0$ и $\vec{J}$ относительно наклонной поверхности. Если контур проекции тела на плоскость наблюдений изометричен или близок к изометричному, то x следует направить вдоль азимута падения плоскости A_0. Тогда можно воспользоваться вспомогательными формулами (7).

Рассмотрим формулы основных компонент вектора $\vec{T}_a$ для наклонной поверхности. В произвольно ориентированном базисе $\{x,y,z\}$ эти компоненты не совпадают с его ортами, поэтому для их описания справедлива формула общего вида (5). Изменения возникнут только в формулах (4) и (5). Так, для Z_a роль вектора $\vec{T}_0$ играет $\vec{Z}_0$, который в избранной системе координат имеет наклонение $I' = 90^0 - \rho$ и склонение γ, равное углу между осью x и линией падения плоскости. В формулах (6) и (7) заменим составляющие вектора $\vec{t}$ составляющими единичного вектора $\vec{z}$ ($Z_0 = \vec{Z}_0 \vec{z}$). Компоненты вектора $\vec{\lambda}$ останутся прежними. Формулы составляющих вектора $\vec{z}$ имеют вид

$$z_x = \sin\rho\cos\gamma; \quad z_y = \sin\rho\sin\gamma; \quad z_z = \cos\rho. \tag{8}$$

Аналогичным путем получим формулы компонент единичных векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, определяющих направление $\vec{X}_0$ и $\vec{Y}_0$:

$$\begin{gathered} x_x = \cos\rho_x\cos\gamma_x; \quad x_y = \cos\rho_x\sin\gamma_x; \quad x_z = -\sin\rho_x; \\ y_x = \cos\rho_y\cos\gamma_y; \quad y_y = \cos\rho_y\sin\gamma_y; \quad y_z = -\sin\rho_y, \end{gathered} \tag{9}$$

где ρ_x и ρ_y - углы, образуемые векторами $\vec{X}_0$ и $\vec{Y}_0$ с наклонной плоскостью; γ_x и γ_y - углы между проекциями векторов $\vec{X}_0$ и $\vec{Y}_0$ на наклонную плоскость и осью x, лежащей в наклонной плоскости.

Чтобы получить формулы для X_a, Y_a, Z_a, достаточно в уравнение (5) подставить вместо компонент $\vec{t}$ компоненты единичных векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, определенные формулами (8) и (9).

Сопоставив полученные формулы с выведенными для горизонтальной поверхности наблюдений[x], легко усмотреть их различие. Оно имеет принципиальный характер для составляющих X_a, Y_a, Z_a и второстепенный для ΔT. Количество слагаемых в выражении ΔT остается одинаковым, меняется только способ их описания. В первом случае вектор геометрических (4) и физических (6) параметров задается относительно горизонтальной, а во втором - относительно наклонной плоскости. Основные компоненты X_a, Y_a, Z_a при переходе к наклонной поверхности выражаются эквивалентно полю ΔT и отличаются лишь вектором физических параметров (8) и (9). Заметим попутно, что поле ΔT, полученное в плоскости, нормальной к векторам $\vec{T}_0$ или $\vec{J}$, подобно полю Z_a, заданному на горизонтальной плоскости.

---

[x] Баранов В. Потенциальные поля и их трансформации в прикладной геофизике. М., Недра, 1980.

Выводы

Аналитические способы определения параметров трехмерных источников по полю X_a, Y_a, Z_a, заданному на горизонтальной плоскости, не применимы к полям, измеренным на негоризонтальной поверхности. В последнем случае пригодны способы, справедливые для поля ΔT, которое определено на горизонтальной или наклонной плоскости. Трансформация поля ΔT в поле $\frac{Z_a}{T_0}$ возможна посредством его пересчета на плоскость, нормальную к вектору $\bar{T}_0$ или $\bar{J}$.

Если аномалия создана телом, намагниченным современным полем, то подобная трансформация преобразует ее к компоненте Z_{0z}. При измерениях в скважинах использование осевой, а не вертикальной компоненты поля обеспечивает получение более простой структуры аномального поля.