Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г.В.Плеханова, т. XCIV, 1982 г.

УДК 530.10

ОБОБЩЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ ЗАКОНОВ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

О.Н.ТИХОНОВ

Формула, из которой могут быть выведены математические выражения законов Кулона, Ампера, Фарадея, имеет вид[X]

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{c^2 \rho}\vec{a}_{12} = \frac{q_1 q_2}{c^2 \rho}\left(\ddot{\vec{r}}_{12} + 2\vec{\omega}_{12}\times\dot{\vec{r}}_{12}\right);$$
$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{c^2 \rho}\left[\ddot{\vec{r}}_{12} - 2\frac{\dot{\vec{r}}_{12}\vec{r}_{12}}{\rho^2}\dot{\vec{r}}_{12} + 2\frac{\left|\dot{\vec{r}}_{12}\right|^2}{\rho^2}\vec{r}_{12}\right], \qquad (1)$$

где $\vec{F}_{12}$ – сила действия субчастицы с электрическим зарядом q_1 на субчастицу с электрическим зарядом q_2; $\vec{a}_{12}$ – полное ускорение q_2 относительно q_1, слагаемое из ускорения $\ddot{\vec{r}}_{12}$, изменяющего радиус-вектор $\vec{r}_{12}$, и ускорения, сходного с кориолисовым $2\vec{\omega}_{12}\times\dot{\vec{r}}_{12}$, причем $\vec{\omega}_{12} = (\dot{\vec{r}}_{12}\times\vec{r}_{12})/\rho^2$; ρ^2 – расстояние между q_1 и q_2; C – скорость света в пустоте; $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{12}$.

Во второй форме записи сила $\vec{F}_{12}$ разложена по векторам $\ddot{\vec{r}}_{12}$, $\dot{\vec{r}}_{12}$, $\vec{r}_{12}$. Эта сила между уединенными зарядами q_1 и q_2 пропорциональна полному взаимному ускорению и обратно пропорциональна расстоянию.

Заряды q_1 и q_2 взаимно движутся по траекториям $\vec{r}_{12}(t)$, являющимся математическим решением уравнения $\vec{F}_{12} = 0$, которое можно решить в полярных координатах $(\rho;\ \varphi)$ с введением единичных радиус-вектора $\vec{r}_{ед}$ и перпендикулярного ему $\vec{n}_{ед}$:

$$\vec{r}_{12} = \rho\vec{r}_{ед};\quad \dot{\vec{r}}_{12} = \dot{\rho}\vec{r}_{ед} + \rho\dot{\varphi}\vec{n}_{ед};$$
$$\ddot{\vec{r}}_{12} = \left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right)\vec{r}_{12} + \left(2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}\right)\vec{n}_{ед}. \qquad (2)$$

[X] О.Н.Тихонов. Физические основы электромагнитного обогащения руд. Л., изд. ЛГИ, 1980.

O.N.Tikhonov, V.V.Dembovsky. Part 3. Measuring Instruments and Controllers, GEBO, Cairo, 1973.

Если начало отсчета берется посередине между q_1 и q_2, то дополнительно к $\vec{F}_{12} = 0$ учитывается $\vec{r}_{01} + \vec{r}_{02} = 0$. В проекциях на $\vec{r}_{ед}$ и $\vec{n}_{ед}$ для нахождения движения q_2 относительно упомянутой середины 0 это дает два уравнения для $\vec{r}_{02}$ через φ_{02} и ρ_{02}:

$$F_{r_{ед}} = \frac{q_1 q_2}{c^2 \rho_{02}} \left(\ddot{\rho}_{02} + \dot{\varphi}_{02}^2 \rho_{02} \right) = 0 ;$$

$$F_{n_{ед}} = \frac{q_1 q_2}{c^2} \ddot{\varphi}_{02} = 0 . \qquad (3)$$

Решение для $\vec{r}_{02}(t)$ имеет вид

$$\varphi_{02}(t) = \omega_0 t ;$$

$$\rho_{02} = \rho_{max} \cos \omega_0 t . \qquad (4)$$

Значения $\omega_0 = \text{const}$ и $\rho_{max} = \text{const}$ соответствуют начальным условиям. Движение $\vec{r}_{01}(t)$ для q_1 является симметричным $\vec{r}_{01}(t) = -\vec{r}_{02}(t)$. Это соответствует движению q_1 и q_2 по одинаковым касающимся друг друга кругам диаметром ρ_{max} с постоянной линейной скоростью $v = \omega_0 \rho_{max}$. Под действием силы $\vec{F}_{12}$ заряды q_1 и q_2 соединяются независимо от их знака, образуя устойчивую составную частицу. Например, если q_1 и q_2 имеют заряд как у электрона $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ и движутся при $\rho_{max} = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ см (радиус электрона), то удерживающая сила (возникающая, если одна из частиц вынуждена отрываться от другой) равна $|F_{12}| = e^2/\rho_{max}^2 =$ $= 2{,}94 \cdot 10^5$ дин $= 29{,}4$ Н.

Соединенные силой типа $\vec{F}_{12}$ две заряженные частицы q_1 и q_2 или несколько частиц q_i образуют частицу с зарядом, равным сумме q_i, т.е. $Q = \sum q_i$. Две такие заряженные частицы взаимодействуют, причем сила от Q_1 на Q_2 равна сумме сил типа $\vec{F}_{12}$ между отдельными q_i, входящими в Q_1 и Q_2. Если Q_1 и Q_2 отстоят друг от друга на расстояние $\rho_{Q_1 Q_2}$, значительно большем их внутреннего размера ρ_{max}, то суммирование отдельных $\vec{F}_{12}$ по формуле (I) дает

$$\vec{F}_{Q_1 Q_2} = \frac{Q_1 Q_2}{\rho_{Q_1 Q_2}^3} \vec{r}_{Q_1 Q_2} + \frac{Q_1 Q_2}{c^2 \rho_{Q_1 Q_2}} \left[\ddot{\vec{r}}_{Q_1 Q_2} + \frac{(\dot{\vec{r}}_{Q_1 Q_2} \dot{\vec{r}}_{Q_1 Q_2}) \vec{r}_{Q_1 Q_2}}{\rho_{Q_1 Q_2}^2} \right], \qquad (5)$$

где первый член соответствует закону Кулона, а второй похож на силу $\vec{F}_{12}$, но без коэффициента 2 перед „кориолисовым" членом.

При выводе закона Кулона – первого члена в формуле (5) – составные частицы Q_1 и Q_2 берутся взаимно неподвижными, а отдельные частицы q_i внутри Q_1 действуют на частицы q_i внутри Q_2 с силами $\vec{F}_{12}$. Так как отдельные q_i имеют периодические движения по формуле (4), вклады в суммарную силу $\vec{F}_{Q_1 Q_2}$ от первых двух членов во второй формуле для $\vec{F}_{12}$ (вдоль $\ddot{\vec{r}}_{12}$ и $\dot{\vec{r}}_{12}$), будучи знакопеременными, за период дают нуль. Остается только третий член $2 \frac{|\dot{\vec{r}}_{12}|^2}{\rho^2} \vec{r}_{12}$, который при усредненном $|\dot{\vec{r}}_{12}|^2 = c^2/2$ дает закон Кулона. Математический вывод сравнительно прост при условии, что плоскости траекторий q_i в Q_1 и Q_2 взаимно параллельны.

При выводе второго члена в формуле (5) составные частицы Q_1 и Q_2 взаимно движутся, и упомянутая знакопеременность при усреднении дает не нуль, а второй член формулы (5). Сила $\vec{F}_{Q_1Q_2}$ оценивает взаимодействие составных частиц (электронов, протонов, ионов, мицелл, заряженных тел). В ней существенно преобладает кулонова компонента и только при взаимных скоростях Q_1 и Q_2, близких к световой, второй член становится сравнимым с кулоновым. Сила $\vec{F}_{Q_1Q_2}$ существенно меньше силы типа $\vec{F}_{12}$. Например, взаимодействие по Кулону протона и электрона на расстоянии $\rho_{Q_1Q_2} = 5{,}29\cdot10^{-9}$ см (первая боровская орбита) равно $|\vec{F}_{Q_1Q_2}| = 0{,}823\cdot10^{-2}$ дин, что существенно меньше упомянутого внутриэлектронного взаимодействия.

Выведем из формулы (5) закон Ампера. Сила взаимодействия двух элементарных проводников dl_1 и dl_2 с токами I_1 и I_2 состоит из следующих четырех слагаемых:

сила от движущихся электронов внутри dl_1 на движущиеся электроны внутри dl_2

$$\frac{Q_{1e}Q_{2e}}{c^2\rho^3}\left[\left(\frac{\vec{I}_2\vec{dl}_2}{Q_{2e}}-\frac{\vec{I}_1\vec{dl}_1}{Q_{1e}}\right)\vec{r}_{12}\right]\left(\frac{\vec{I}_2\vec{dl}_2}{Q_{2e}}-\frac{\vec{I}_1\vec{dl}_1}{Q_{1e}}\right); \qquad (6)$$

сила от неподвижных протонов внутри dl_1 (той части их, которая соответствует только движущимся электронам) на движущиеся электроны внутри dl_2

$$\frac{Q_{1n}Q_{2e}}{c^2\rho^3}\left[\left(0-\frac{\vec{I}_1\vec{dl}_1}{Q_{1e}}\right)\vec{r}_{12}\right]\left(0-\frac{\vec{I}_1\vec{dl}_1}{Q_{1e}}\right); \qquad (7)$$

сила от движущихся электронов внутри dl_1 на неподвижные (в том же смысле) протоны внутри dl_2

$$\frac{Q_{1e}Q_{2n}}{c^2\rho^3}\left[\left(\frac{\vec{I}_2\vec{dl}_2}{Q_{2e}}-0\right)\vec{r}_{12}\right]\left(\frac{\vec{I}_2\vec{dl}_2}{Q_{2e}}-0\right); \qquad (8)$$

сила от неподвижных протонов внутри dl_1 на протоны в dl_2

$$\frac{Q_{1n}Q_{2n}}{c^2\rho^3}\left[0\,\vec{r}_{12}\right](0-0), \qquad (9)$$

где Q_{1e}, Q_{2e} - суммарные заряды движущихся электронов в элементах dl_1, dl_2; Q_{1n}, Q_{2n} - заряды учитываемых протонов в тех же элементах, причем $|Q_{1n}| = |Q_{1e}|$; $|Q_{2n}| = |Q_{2e}|$; $\vec{r}_{12} = \vec{r}_{dl_1dl_2}$.

В формуле (5) учитывается только последний член, так как $\vec{r}_{Q_1Q_2} = 0$ и кулонова компонента в сумме дает нуль. В формулах (6)-(9) учитывается $\vec{r}_{Q_1Q_2} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$; $\vec{v}_2 = \vec{I}_2\vec{dl}_2/Q_{2e}$; $\vec{v}_1 = \vec{I}_1\vec{dl}_1/Q_{1e}$.

Суммирование четырех сил дает силу действия элемента $\vec{I}_1\vec{dl}_1$ на $\vec{I}_2\vec{dl}_2$

$$\vec{F}_{I_1I_2} = \frac{1}{c^2}\left[\vec{I}_2\vec{dl}_2\left(\frac{\vec{I}_1\vec{dl}_1\vec{r}_{12}}{\rho^3}\right)+\vec{I}_1\vec{dl}_1\left(\frac{\vec{I}_2\vec{dl}_2\vec{r}_{12}}{\rho^3}\right)\right]. \qquad (10)$$

Полученная формула несколько отличается от формулы Ампера

$$\vec{F}_{I_1I_2\,Amp} = \frac{2}{c^2}\vec{I}_2\vec{dl}_2\left(\frac{\vec{I}_1\vec{dl}_1\vec{r}_{12}}{\rho^3}\right) = 2\vec{I}_2\vec{dl}_2\vec{H}_{12}, \qquad (11)$$

где $\vec{H}_{12}=(I_1\vec{dl}_1\vec{r}_{12})/\rho^3c^2$ – напряженность магнитного поля по закону Био-Савара-Лапласа.

Сила $\vec{F}_{I_1I_2}$ выражается через $\vec{F}_{I_1I_2\,\text{Амп}}$:

$$\vec{F}_{I_1I_2}=\frac{1}{2}\left(\vec{F}_{I_1I_2\,\text{Амп}}-\vec{F}_{I_2I_1\,\text{Амп}}\right). \qquad (12)$$

В формуле Ампера (11) действие не равно противодействию, но если по ней вычислить суммарную силу взаимодействия между любым **замкнутым** контуром с током и другим замкнутым контуром $\oint\oint\vec{F}_{I_1I_2\,\text{Амп}}\,dl_1\,dl_2$, а затем наоборот – $\oint\oint\vec{F}_{I_2I_1\,\text{Амп}}\,dl_2\,dl_1$, получим, что действие равно противодействию:

$$\oint\oint\vec{F}_{I_1I_2\,\text{Амп}}\,dl_1\,dl_2=-\oint\oint\vec{F}_{I_2I_1\,\text{Амп}}\,dl_2\,dl_1. \qquad (13)$$

С учетом формул (12)–(13) получается

$$\oint\oint\vec{F}_{I_1I_2}\,dl_1\,dl_2=\oint\oint\vec{F}_{I_1I_2\,\text{Амп}}\,dl_1\,dl_2. \qquad (14)$$

Для замкнутых контуров (и для бесконечно длинных проводов) полученная формула (10) и закон Ампера дают одинаковый результат. Экспериментальные измерения одинаково подтверждают и закон Ампера и формулу (10), но в последней действие разно противодействию не только для замкнутых контуров, но и для элементов с током.

Таким образом, через закон Ампера обосновывается справедливость последнего члена в формуле (5).

Покажем еще, что формула закона электромагнитной индукции Фарадея эквивалентна формуле (5); закон Фарадея связывает э.д.с. $\mathcal{E}$ с магнитным потоком Φ контура: $\mathcal{E}=-\partial\Phi/\partial t$, чему эквивалентно первое уравнение Максвелла, связывающее напряженности электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ поля,

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}=-\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}. \qquad (15)$$

Напряженность, т.е. сила на единицу заряда, от Q_1 на Q_2, согласно формуле (5),

$$\vec{E}_{12}=\frac{\vec{F}_{q_1q_2}}{Q_2}=\frac{Q_1}{\rho_{q_1q_2}}\vec{r}_{q_1q_2}+\frac{Q_1}{C^2\rho_{q_1q_2}}\left[\ddot{\vec{r}}_{q_1q_2}+\frac{(\dot{\vec{r}}_{q_1q_2}\dot{\vec{r}}_{q_1q_2})\,\dot{\vec{r}}_{q_1q_2}}{\rho^2_{q_1q_2}}\right]. \qquad (16)$$

Введем также замену переменной по закону Био-Савара-Лапласа

$$\vec{H}_{12}=-\frac{Q_1}{C^2}\frac{\dot{\vec{r}}_{q_1q_2}\vec{r}_{q_1q_2}}{\rho^3_{q_1q_2}} \qquad \text{при } I_1\vec{dl}_1=-Q_1\dot{\vec{r}}_{q_1q_2} \qquad (17)$$

и вычислим

$$-\frac{\partial\vec{H}_{12}}{\partial t}=\frac{Q_1}{C^2}\left[\frac{\ddot{\vec{r}}_{q_1q_2}\vec{r}_{q_1q_2}}{\rho^3_{q_1q_2}}-\frac{3\dot{\rho}_{q_1q_2}}{\rho^4_{q_1q_2}}\dot{\vec{r}}_{q_1q_2}\vec{r}_{q_1q_2}\right]. \qquad (18)$$

Далее вычислим $\mathrm{rot}\vec{E}_{12}$ из формулы (I7), полученное выражение полностью совпадает с формулой (I8). Таким образом, оказывается, что формула (5) соответствует также и закону Фарадея (в этом соответствии проявляется и компонента с $\ddot{r}_{a_1 a_2}$ из (5), но наличие или отсутствие кулонова члена не влияет на удовлетворение равенству (I5)).

Таким образом, формула (I) с учетом формулы (5) ведет к трем главным законам электромагнетизма.