Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г.В.Плеханова, 1973, т. 97

УДК 621.833.1

# УРАВНЕНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ КРИВЫХ ЗУБЬЕВ КОЛЕС, НАРЕЗАЕМЫХ РЕЕЧНЫМ ПРОИЗВОДЯЩИМ КОНТУРОМ С КОМБИНИРОВАННЫМ СМЕЩЕНИЕМ ПРОФИЛЕЙ

И.П.ИВАНОВ

Применение зубчатых пар с комбинированным смещением зубчатых профилей открывает новые геометрические, кинематические и прочностные возможности в проектировании зубчатых передач [2, 3]. В частности, при ограниченной точности передачи, когда достаточны ограниченные коэффициенты перекрытия, можно существенно повысить прочность зубьев при изгибе с одновременным снижением удельных скольжений. Зубчатые колеса с положительным радиальным смещением можно применить при межосевом расстоянии, равном делительному. Достигается бóльшая гибкость в проектировании зацепления по расположению зубьев в пределах поля зацепления для получения определенных преимуществ.

Для разработки аналитических зависимостей напряжений зубьев таких передач необходимы уравнения переходных кривых зубьев, нарезаемых с комбинированным смещением, а также радиусов кривизны точек на переходных участках зубьев.

В статье рассмотрены необходимые аналитические связи параметров, которыми определяется форма переходной кривой зуба. Уравнения получены для точки $M$ на переходной кривой нарезаемого зуба в функции независимого углового параметра $\delta$, которым задается положение производящей точки $K$ на скругленном участке реечного производящего контура (РПК).

## Уравнения линии зацепления

В системе координат $\xi$, $\eta$ (см. рисунок) с началом в точке $П$ на середине начальной ширины впадины РПК безразмерные (отнесенные к модулю $m$) координаты центра $C$ скругления кромки зуба РПК

$$\xi_C = a + x_\tau/2;$$
$$\eta_C = b - x, \qquad (I)$$

где $a$ и $b$ – безразмерные комплексы параметров РПК,

$$a = \pi/4 + h_a^* \operatorname{tg}\alpha + \rho_к^* \cos\alpha; \quad b = h_a - \rho_к^* \sin\alpha;$$

$x$ – коэффициент радиального смещения, $x_\tau$ – коэффициент тангенциального

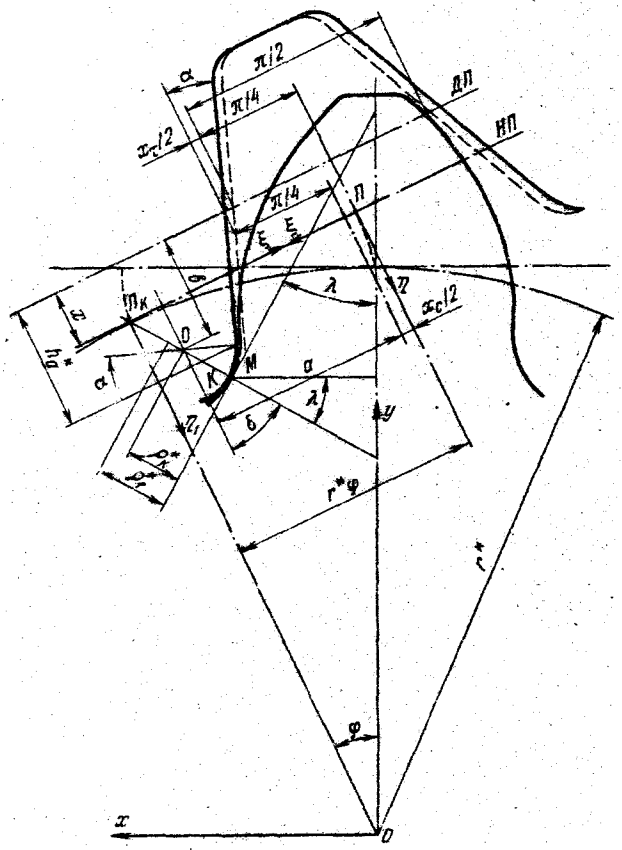



Схема станочного зацепления
НП и ДП – соответственно начальная и делительная прямые

смещения[x] РПК (положительное смещение толщину зубьев увеличивает, отрицательное уменьшает); $\alpha$ – угол главного профиля; $h_a^*$ коэффициент высоты; $\rho_к^*$ – коэффициент радиуса скругления кромки зуба РПК.

Координаты текущей точки $K$ участка скругления кромки зуба РПК в функции независимого параметра $\delta$ – угла между нормалью к делительной прямой и нормалью к кривой скругления

$$\xi_к = \xi_c - \rho_к^* \sin\delta = a + x_c/2 - \rho_к^* \sin\delta$$

$$\eta_к = \eta_c + \rho_к^* \cos\delta = b - x + \rho_к^* \cos\delta$$

Полученные параметрические зависимости представляют собой уравнения линии зацепления в нарезании переходной кривой зуба обкаткой.

С переходом к системе $\xi_1$, $\eta_1$ с началом $П_к$, совмещенным с полюсом станочного зацепления на делительной окружности нарезаемого колеса,

$$\xi_{1к} = П_к П - \xi_к; \quad \eta_{1к} = \eta_к.$$

Параметрические уравнения линии зацепления

$$\xi_{1к} = (b - x)\operatorname{tg}\delta + \rho_к^* \sin\delta;$$
$$\eta_{1к} = (b - x) + \rho_к^* \cos\delta \qquad (2)$$

выражают собой конхоиду Никомеда с полюсом $П_к$ и с базисом в виде линии поступательного перемещения центра скругления РПК.

---

[x] Отрицательное тангенциальное смещение можно реализовать смещением РПК по касательной к делительной окружности колеса, положительное тангенциальное смещение требует неравноделенности шага РПК.

## Уравнения переходной кривой зуба нарезаемого зубчатого колеса

В момент формирования переходной кривой в точке $M$ зуба нарезаемого колеса точкой $K$ РПК нормали к кривым в этих точках совпадают и проходят через полюс $П_к$ станочного зацепления. Это положение определяет угол обкатки $\varphi$ в процессе нарезания, угол $\lambda = \lambda(\delta) = \pi/2 - \varphi - \delta$ между нормалью к переходной кривой зуба в текущей точке и нормалью к оси его симметрии, координаты точки $M$ переходной кривой зуба колеса, а также радиус кривизны $\rho_f$ этой точки.

Согласно схеме станочного зацепления (см. рисунок)

$$П_к П = a + x_\tau/2 + (b - x)\operatorname{tg}\delta = \varphi r^* = \varphi z/2,$$

где $r^*$ – безразмерный делительный радиус, $r^* = z/2$; $z$ – число зубьев; отсюда угол обкатки при нарезании в функции угла $\delta$

$$\varphi = \varphi(\delta) = 2\left[a + x_\tau/2 + (b - x)\operatorname{tg}\delta\right]/z. \qquad (3)$$

Для выражения координат текущей точки $M$ переходной кривой зуба в системе $x, y$ нарезаемого колеса с началом на центральной оси необходимо переписать уравнения линии зацепления (2) в эту систему. Квадратную матрицу перехода от системы $\xi, \eta$ к системе $x, y$ составим проектированием ортов осей $\xi, \eta$ на оси $x, y$; радиус-вектор $\bar{\rho}_П$ производящей линии представим столбцевой матрицей. Для однородности координат применяемых систем используем орт времени $t_П = t_0 = 1$, что позволит отразить в матрицах перенос начала координат из одной системы в другую с одновременным поворотом осей.

В системе $x, y$ радиус-вектор переходной кривой зуба колеса получим умножением матрицы перехода на радиус $\bar{\rho}_П$:

$$\bar{\rho}_0 = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & r^*(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) \\ -\sin\varphi & -\cos\varphi & r^*(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi) \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \xi_к \\ \eta_к \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \xi_к\cos\varphi - \eta_к\sin\varphi + r^*(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi) \\ -\xi_к\sin\varphi - \eta_к\cos\varphi + r^*(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi) \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

После преобразований получим параметрические уравнения переходной кривой нарезаемого зуба (с безразмерными координатами):

$$\begin{aligned} x^* &= x^*(\delta) = (z/2 - b + x)\sin\varphi - (\varphi z/2 - a - x_\tau/2)\cos\varphi - \rho_к^*\cos\lambda; \\ y^* &= y^*(\delta) = (z/2 - b + x)\cos\varphi + (\varphi z/2 - a - x_\tau/2)\sin\varphi - \rho_к^*\sin\lambda. \end{aligned} \qquad (4)$$

Параметрическое уравнение эквидистанты к переходной кривой зуба, равноотстоящей от нее на величину $\rho_к^*$, в функции угла обкатки получим по уравнениям (4) при $\rho_к^* = 0$:

$$x_0^* = x_0^*(\varphi) = (z/2 - b + x)\sin\varphi - (\varphi z/2 - a - x_\tau/2)\cos\varphi;$$
$$y_0^* = y_0^*(\varphi) = (z/2 - b + x)\cos\varphi + (\varphi z/2 - a - x_\tau/2)\sin\varphi.$$

Радиус кривизны переходной кривой зуба

Имея параметрические уравнения переходной кривой, можно получит соответствующие зависимости для радиусов кривизны.

Безразмерный радиус кривизны точки $M$ переходной кривой на осн вании свойств, известных из дифференциальной геометрии,

$$\rho_f^* = (\dot{x}^{*2} - \dot{y}^{*2})^{3/2}/(\dot{x}^*\ddot{y}^* - \dot{y}^*\ddot{x}^*),$$

где соответствующие первая и вторая производные по углу $\varphi$ оказывают с учетом выражений (4) весьма громоздкими.

Воспользуемся эквидистантой к переходному контуру зуба, выражен более простыми зависимостями (5) и только от угла $\varphi$. Единичный ради кривизны в точке $M$

$$\rho_f^* = \rho_f^*(\varphi) = \rho_x^* + \rho_0^*(\varphi) = \rho_x^* + (\dot{x}_0^{*2} - \dot{y}_0^{*2})^{3/2}/(\dot{x}_0^*\ddot{y}_0^* - \dot{y}_0^*\ddot{x}_0^*).$$

Дифференцированием уравнений (5) по углу обкатки $\varphi$ получим:

$$\dot{x}_0^* = dx_0^*/d\varphi = -(b - x)\cos\varphi + (\varphi z/2 - a - x_\tau/2)\sin\varphi;$$

$$\dot{y}_0^* = dy_0^*/d\varphi = (b - x)\sin\varphi + (\varphi z/2 - a - x_\tau/2)\cos\varphi;$$

$$\ddot{x}_0^* = d^2x_0^*/d\varphi^2 = (z/2 + b - x)\sin\varphi + (\varphi z/2 - a - x_\tau/2)\cos\varphi;$$

$$\ddot{y}_0^* = d^2y_0^*/d\varphi^2 = (z/2 + b - x)\cos\varphi - (\varphi z/2 - a - x_\tau/2)\sin\varphi.$$

Подстановкой производных в выражение (6) и преобразованием (с учето знака кривизны) выведем уравнение безразмерного радиуса кривизны в ф ции угла обкатки:

$$\rho_f^* = \rho_f^*(\varphi) = \rho_x^* + \frac{\left[(b - x)^2 + (\varphi z/2 - a - x_\tau/2)^2\right]^{3/2}}{(b - x)(z/2 + b - x) + (\varphi z/2 - a - x_\tau/2)^2}.$$

Для выражения радиуса кривизны в функции независимого параметр зависимость (3) вставим в уравнение (7); тогда

$$\rho_f^* = \rho_f^*(\delta) = \rho_x^* + \frac{b - x}{(z/2)\cos^3\delta/(b - x) + \cos\delta}.$$

Минимальный радиус кривизны $\rho_{f\min}^* = \rho_x^*$ получим при $x = b$, при стандартных параметрах $h_a^* = 1$, $\alpha = 20^\circ$ и $\rho_x^* = 0{,}4$ соответст ет $x = 0{,}863$.

Центральный радиус расположения точки на переходном контуре зуба можно выразить через координаты этой точки. Построения (см. рисунок) позволяют безразмерный радиус точки $M$ переходного контура представить сразу в функции угла $\delta$:

$$r_M^* = \left( \left[ z/2 - (b - x + \rho_k^* \cos\delta) \right]^2 + \left[ (b - x + \rho_k^* \cos\delta) \operatorname{tg}\delta \right]^2 \right)^{1/2}. \qquad (9)$$

При этом $0 \le \delta \le \pi/2 - \alpha$; $r_f \le r_M \le r_e$, где $r_f$ – радиус впадин зубьев; $r_e$ – радиус нижней граничной точки эвольвентного профиля зуба, определяемый по формулам ГОСТа [1].

Истинные линейные размеры (координаты точки переходного контура зуба, радиус кривизны и центральный радиус этой точки) получим умножением на модуль $m$ безразмерных величин, представленных соответственно уравнениями (4), (5), (8) и (9).

Выведенные аналитические зависимости успешно применены нами в уравнениях, описывающих напряжения при изгибе зубьев зубчатых колес с комбинированным смещением.

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ 16532-70. Передачи зубчатые цилиндрические эвольвентные внешнего зацепления. Расчет геометрии. М., Изд-во стандартов, 1971.

2. Иванов И.П. Зубчатые передачи с комбинированным смещением профилей зубьев. – *Депонированные рукописи* / ВИНИТИ, 1981, № 11.

3. Иванов И.П. Комбинированное смещение производящего контура как резерв прочности зубчатых передач горных машин. – Зап. ЛГИ, 1981, т. 89.