Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г.В.Плеханова,
1983, т. 98

УДК 550.835

# ТЕОРИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ЯДЕРНО-ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ГЕТЕРОГЕННЫХ РУД

В.А.АРЦЫБАШЕВ

Построение современной теории гамма- и нейтронных методов ядерной геофизики должно базироваться на описании полей фотонов и нейтронов в гетерогенных средах, отражающих реальные структурные особенности руд.

Исследованию эффекта гетерогенности уделяется много внимания [1-6]. Наряду с прямым решением задачи для зернисто-слоистой среды [5, 6] предложены способы расчета эффективного коэффициента ослабления гамма-излучения [2, 4] и нейтронов [3], а также плодотворный способ решения прямой задачи с помощью полного и парциального сечений [1].

Однако все известные модели эффективных сечений фотонов и нейтронов не свободны от неточностей и поэтому применимы в ограниченных областях. Ниже предлагается новый подход, основанный на введении в качестве исходного параметра эффективного содержания зернистой фазы (или фаз), - метод эффективных параметров.

## I. Модели потока ядерных частиц в среде с включениями

Теоретические расчеты гетерогенного эффекта опираются на модели потоков частиц (фотонов или нейтронов), проходящих через гетерогенную среду. Непосредственные расчеты вторичных фотонных полей [5, 6 и др.], выполненные для простых геометрических условий, носят частный характер и не охватывают гетерогенных систем со статистически неоднородными распределениями включений. Иной подход заключается в конструировании простейшего потока параллельного проходящего пучка с последующим вычислением эффективного сечения [2-4 и др.].

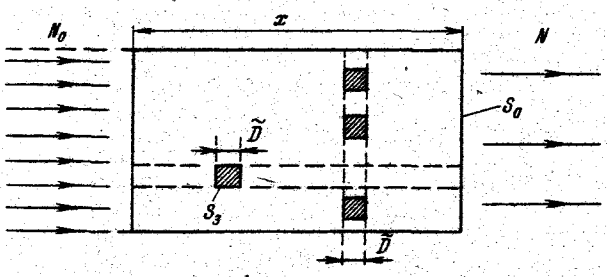



Рис.1. К расчету параллельного пучка частиц в среде с включениями

В своем выводе эффективных содержаний будем исходить из модели параллельного пучка. Для гомогенной

среды в последнем случае справедлив экспоненциальный закон

$$N = N_0 e^{-\sigma x}, \qquad (1)$$

где $N$ – ослабленный поток; $N_0$ – первичный поток; $x$ – толщина слоя среды; $\sigma$ – линейное макросечение (коэффициент ослабления излучения средой).

Поток в гетерогенной среде (рис.1) можно представить несколькими способами. Рассмотрим три модели.

М о д е л ь $T$ . Пусть включения-зерна, имеющие относительное сечение $S_B = S_з / S_0$, где $S_з$ – геометрическое сечение зерна, $S_0$ – сечение потока частиц, располагаются слоями. Если мощность слоя равна среднему продольному размеру $\tilde{D}$ зерна, среднее число зерен в каждом слое $\langle k \rangle$ и число слоев на пути $x$ равно $m$ (рис.1), то поток будет

$$N_m = N_0 e^{-\sigma^M x} \left[ 1 - \langle k \rangle S_B \left( 1 - e^{-\Delta\sigma \tilde{D}} \right) \right]^m, \qquad (2)$$

где $\Delta\sigma = \sigma^B - \sigma^M$; индекс B относится к включению, а M – к матрице.

Пусть число слоев $m$ распределено на $x$ статистически неравномерно и подчиняется биномиальному закону

$$P_m = \frac{a!}{m!(a-m)!} q_h^m (1-q_h)^{a-m}, \qquad (3)$$

где $q_h$ – средняя доля слоев на $x$ (линейное содержание включений); $a = x/D$ – максимально возможное значение $m$ на $x$.

Заметим, что $\langle k \rangle S_B = q_S$ – среднее площадное содержание включений в слое $m$, а среднее объемное содержание включений

$$q_V = q_S q_h \qquad (4)$$

при среднем числе слоев

$$\langle m \rangle = \frac{x}{\tilde{D}} q_h . \qquad (5)$$

Выполним статистическое осреднение потока (2) на пути $x$:

$$N = \sum_{m=0}^{a} N_m P_m = N_0 e^{-\sigma^M x} \sum_{m=0}^{a} P_m T^m, \qquad (6)$$

где $T = 1 - q_S \left( 1 - e^{-\Delta\sigma \tilde{D}} \right)$.

Используя производящую функцию биномиального распределения

$$P(T) = \sum_{m=0}^{a} P_m T^m = \left[ 1 - q_h (1-T) \right]^a, \qquad (7)$$

окончательно получаем $T_P$- модель потока:

$$N = N_0 e^{-\sigma^M x} \left[ 1 - q_V \left( 1 - e^{-\Delta\sigma \tilde{D}} \right) \right]^{\frac{x}{\tilde{D}}} . \qquad (8)$$

М о д е л ь $\delta$ . Поток частиц, встречающий на своем пути одно включение (рис.I) равен

$$N_1=(1-S_B)N_0 e^{-\sigma^M x} + S_B N_0 e^{-\sigma^M(x-\tilde{D})-\sigma^B\tilde{D}} . \qquad (9)$$

Если число включений на пути $x$ равно $n$, то при независимом взаимодействии с каждым включением поток будет

$$N_n=N_0 e^{-\sigma^M x}[1-\delta]^n , \qquad (10)$$

где $\delta = S_B(1-e^{-\Delta\sigma\tilde{D}})$ можно интерпретировать как эффективное сечение зерна.

Если принять $n$ равным его среднему значению $\theta = \langle n\rangle = \frac{q_V}{S_B\tilde{D}}$, то заменой $n$ на $\theta$ в выражении (I0) получим $\delta_\theta$ – модель потока для равномерного распределения включений в среде.

Статистическое осреднение потока (I0) по биномиальному распределению $P_n=\frac{\beta!}{n!(\beta-n)!}q_V^n(1-q_V)^{\beta-n}$, $(\beta=\frac{x}{S_B\tilde{D}})$ зерен дает $\delta_\beta$ – модель потока:

$$N=N_0 e^{-\sigma^M x}\left[1-q_V\,\delta\right]^{\frac{x}{S_B\tilde{D}}} . \qquad (11)$$

М о д е л ь $\Delta$ . Рассмотрим еще один подход к конструированию потока в гетерогенной среде. Если исходить из эффективного сечения отдельного зерна, взятого в виде $\Delta^B=S_B(1-e^{-\sigma^B\tilde{D}})$, то для $n$ зерен на $x$ получим поток

$$N_n=N_0 e^{-\sigma^M x-\Delta^B n+\Delta^M n} . \qquad (12)$$

Статистически осредненный поток ($\Delta_\beta$-модель) будет

$$N=N_0 e^{-\sigma^M x}\left[1-q_V(1-e^{-\Delta})\right]^{\frac{x}{S_B\tilde{D}}} , \qquad (13)$$

где $$\Delta=\Delta^B-\Delta^M=S_B\left(e^{-\sigma^M\tilde{D}}-e^{-\sigma^B\tilde{D}}\right).$$

Поток для случая равномерного распределения ($\Delta_\theta$-модель) получим из выражения (I2) заменой $n$ на $\theta$ .

## 2. Эффективное содержание

В качестве базового эффективного параметра гетерогенной среды введем объемное содержание $q_{V\,эфф}$ включений. Как будет показано, этот подход более плодотворный и общий, чем метод эффективных сечений.

Эффективное объемное содержание связано с потоком $N$ частиц соотношением, которое вытекает из анализа закона (I) для двухкомпонентной среды:

$$q_{V\,эфф}=-\frac{1}{\Delta\sigma}\left(\frac{\partial\ln N}{\partial x}+\sigma^M\right). \qquad (14)$$

Используя поток (8), получаем следующую $T_p$-модель эффективного объемного содержания:

$$q_{V\,эфф} = -\frac{1}{\Delta\sigma\tilde{D}}\ln\left[1-q_V\left(1-e^{-\Delta\sigma\tilde{D}}\right)\right]. \qquad (15)$$

Если $q_V < 0{,}1$, то биномиальное распределение переходит в пуассоновское, для которого непосредственно из (15) или через статистическое осреднение потока находим $T_\pi$-модель:

$$q_{V\,эфф} = \frac{q_V}{\Delta\sigma\tilde{D}}\left(1-e^{-\Delta\sigma\tilde{D}}\right). \qquad (16)$$

Наконец, для равномерного распределения включений из потока (2) при $\langle m\rangle = \theta = \frac{x}{D}q_h$ находим $T_\theta$-модель эффективного содержания:

$$q_{V\,эфф} = -\frac{q_h}{\Delta\sigma\tilde{D}}\ln\left[1-q_s\left(1-e^{-\Delta\sigma\tilde{D}}\right)\right]. \qquad (17)$$

Аналогичные процедуры дают $\delta$- и $\Delta$-модели. Сводка всех типов эффективных содержаний дана ниже:

| Модель | Относительное эффективное объемное содержание включений, $q_{V\,эфф}/q_V$ |
|---|---|
| $T_p$ | $-\frac{1}{q_V\Delta\sigma\tilde{D}}\ln\left[1-q_V\left(1-e^{-\Delta\sigma\tilde{D}}\right)\right]$ |
| $T_\pi$ | $\frac{1}{\Delta\sigma\tilde{D}}\left(1-e^{-\Delta\sigma\tilde{D}}\right)$ |
| $T_\theta$ | $-\frac{1}{q_s\Delta\sigma\tilde{D}}\ln\left[1-q_s\left(1-e^{-\Delta\sigma\tilde{D}}\right)\right]$ |
| $\delta_p$ | $-\frac{1}{q_V\Delta\sigma\tilde{D}S_B}\ln\left[1-q_V S_B\left(1-e^{-\Delta\sigma\tilde{D}}\right)\right]$ |
| $\delta_\pi$ | $\frac{1}{\Delta\sigma\tilde{D}}\left(1-e^{-\Delta\sigma\tilde{D}}\right)$ |
| $\delta_\theta$ | $-\frac{1}{\Delta\sigma\tilde{D}S_B}\ln\left[1-S_B\left(1-e^{-\Delta\sigma\tilde{D}}\right)\right]$ |
| $\Delta_p$ | $-\frac{1}{q_V\Delta\sigma\tilde{D}S_B}\ln\left[1-q_V\left(1-e^{-\Delta}\right)\right]$ |

| | |
|---|---|
| $\Delta_\pi$ | $\frac{1}{\Delta\sigma\tilde{D}S_B}\left(1-e^{-\Delta}\right)$ |
| $\Delta_\theta$ | $\frac{1}{\Delta\sigma\tilde{D}}\left(e^{-\sigma^M\tilde{D}}-e^{-\sigma^B\tilde{D}}\right)$ |

Примечания. $\Delta\sigma=\sigma^B-\sigma^M$; $S_B=S_3/S_0$; $q_V=q_h\,q_s$;
$\Delta=S_B\left(e^{-\sigma^M\tilde{D}}-e^{-\sigma^B\tilde{D}}\right)$.

### 3. Численный анализ и предельные переходы

В области низких содержаний ($q_V<0,1$) и для типичного случая тяжелых включений в легкой матрице ($\sigma^B\gg\sigma^M$) все модели эффективных содержаний дают практически одинаковые численные значения в области от $\tilde{D}=0$ (гомогенная среда) до $\sigma^B\tilde{D}=3\div5$.

Предельные размеры включений имеют ограничение $\tilde{D}_{max}\leqslant\frac{2}{\sigma^M}$, вытекающее из ограниченной глубины проникновения излучений в среду. Для больших $\tilde{D}$ все $\Delta$-модели стремятся к пределу

$$q_{V\,эфф}/q_V\longrightarrow 0{,}06\,\frac{\sigma^M}{\Delta\sigma}\;; \qquad (18)$$

модели $T_\beta$, $T_\theta$, $\delta_\beta$ стремятся к

$$q_{V\,эфф}/q_V\approx 0{,}7\,\frac{\sigma^M}{\Delta\sigma}\;; \qquad (19)$$

модели $T_\pi$ и $\delta_\pi$ совпадают и в пределе дают

$$q_{V\,эфф}/q_V=0{,}5\,\frac{\sigma^M}{\Delta\sigma}\;, \qquad (20)$$

а модель $\delta_\theta$ стремится к

$$q_{V\,эфф}/q_V\longrightarrow 1\;, \qquad (21)$$

т.е. не применима в области больших $\tilde{D}$.

Предел относительного эффективного содержания при $q_V\to 1$ вытекает из физических соображений:

$$q_{V\,эфф}/q_V=1. \qquad (22)$$

Ему удовлетворяет только модель T, которая и рекомендуется для описания гетерогенных сред с высокими $q_V$.

При экстремальных значениях $\sigma^B$, $\sigma^M$ и $S_B$ различные модели эффективных содержаний отличаются. На рис.2 показаны графики для случая $\sigma^B=$

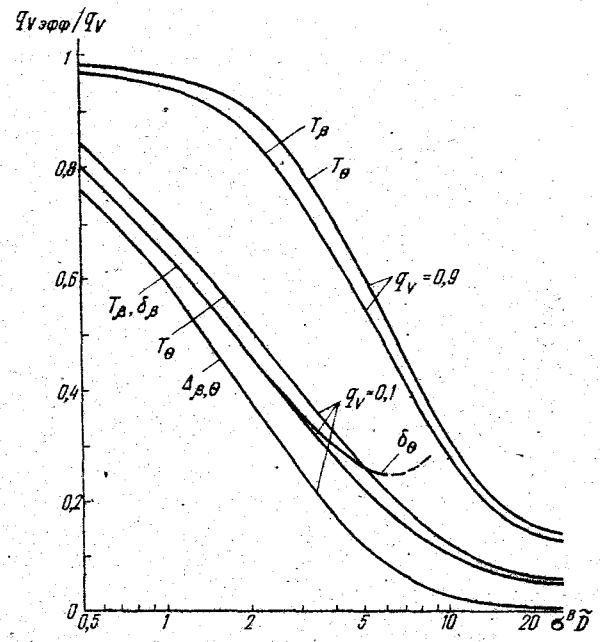



Рис.2. Относительные эффективные объемные содержания

= I0 $\sigma^M$ и $S_B = 0,0I(\sigma^B\tilde{D})^2$ при $q_V$, равном 0,I и 0,9. Как видно, и в этом случае в области умеренных размеров включений ($\sigma^B\tilde{D}<5$) модели $T$ и $\delta$ дают близкие результаты, а модель $\Delta$ заметно отличается от них.

## 4. Производные эффективные параметры

Эффективная плотность. Средняя плотность двухкомпонентной среды

$$\rho = \rho^M + \Delta\rho\, q_V, \tag{23}$$

где $\Delta\rho = \rho^B - \rho^M$.

Используя эффективное объемное содержание, определим эффективную плотность

$$\rho_{эфф} = \rho^M + \Delta\rho\, q_{V\,эфф}. \tag{24}$$

Эффективные сечения. Линейное сечение двухкомпонентной среды

$$\sigma = \sigma^M + \Delta\sigma\, q_V, \tag{25}$$

а эффективное сечение

$$\sigma_{эфф} = \sigma^M + \Delta\sigma\, q_{V\,эфф}, \tag{26}$$

где $\Delta\sigma = \sigma^B - \sigma^M$.

Массовое макросечение

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}^{м} + \Delta\bar{\sigma}\, q, \qquad (27)$$

где $q$ – массовое содержание включений.

Чтобы ввести эффективное массовое сечение $\bar{\sigma}_{эфф}$, определим эффективное массовое содержание:

$$q_{эфф} = q_{в эфф}\,\frac{\rho^{в}}{\rho_{эфф}}. \qquad (28)$$

Тогда заменой в формуле (27) $q$ на $q_{эфф}$ получим массовое эффективное сечение

$$\bar{\sigma}_{эфф} = \bar{\sigma}^{м} + \Delta\bar{\sigma}\, q_{эфф}. \qquad (29)$$

Соотношение между линейным и массовым эффективными сечениями гетерогенной среды будет следующим:

$$\sigma_{эфф} = \bar{\sigma}_{эфф}\,\rho_{эфф}. \qquad (30)$$

Аналогичным образом через эффективные содержания и плотность определяют парциальные сечения фотонов и нейтронов для гетерогенных руд с очевидным обобщением на многокомпонентные среды. В частности, массовое сечение фотоэффекта для руды, содержащей флуоресцирующие включения ($\bar{\tau}^{в} \neq 0$; $\bar{\tau}^{м} = 0$), равно ($T_{\beta}$-модель):

$$\bar{\tau}_{эфф} = -\frac{\bar{\tau}^{в}\rho^{в}}{\rho_{эфф}\,\mu^{в}\tilde{D}}\, ln\left[1 - q\,\frac{\rho}{\rho^{в}}\left(1 - e^{-\mu^{в}\tilde{D}}\right)\right], \qquad (31)$$

где $\mu^{в}$ – полное сечение фотонов для включения.

Эффективные параметры переноса излучения. Кроме упомянутых выше эффективных параметров, в теории гамма- и нейтронных полей используют и другие параметры. Например, перенос нейтронов определяется длиной замедления (или возрастом) на стадии замедления, а на стадии диффузии – длиной диффузии и средним временем жизни теплового нейтрона в среде. Все перечисленные параметры (как линейные, так и массовые) выражаются через содержания, сечения и плотность, а поэтому могут быть определены для гетерогенных руд на основе предложенных выше эффективных параметров.

## 5. Метод эффективных параметров

Обобщая и развивая предложенный ранее способ эффективных сечений [I], сформулируем следующий метод решения прямых и обратных задач ядерной геофизики:

для описания фотонных и нейтронных полей в гетерогенных рудах в качестве исходных решений используются решения для гомогенных сред;

переход к гетерогенной руде осуществляется введением в решение эффективного содержания и всех зависящих от него эффективных параметров.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арцыбашев В.А., Леман Е.П. Универсальная схема расчета фотонных полей в гетерогенных средах. – В кн.: Ядерно-геофизические методы анализа на предприятиях цветной металлургии. Тезисы докладов. Ташкент, СредазНИИЦветмет, 1977.

2. Арцыбашев В.А., Леман Е.П. Об эффективных коэффициентах ослабления фронтонов в гетерогенных средах. – Атомная энергия, 1978, т. 44, вып. 1.

3. Захарченко В.Ф. К методике интерпретации нейтронных измерений в средах с включениями. – В кн.: Ядерно-геофизические исследования. Геофиз.сб. № 6. Свердловск, УФ АН СССР, 1967.

4. Шмонин Л.И., Потребников Г.К. О расчете эффективного коэффициента ослабления гамма-излучения в среде со случайно распределенными по ее объему инородными включениями. – В кн.: Прикладная и теоретическая физика. Алма-Ата, Алма-атинский гос. ун-т, 1972. Вып. 4.

5. Berry P.E., Furuta T., Rhodes J.R. – Advances in X-ray Anal., 1969, v.12.

6. Claisse F., Samson C. – Advances in X-ray Anal., 1962, v.5.