Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института
им. Г.В.Плеханова, 1984, т. 99

УДК 538.3:51

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПО МАЛОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ЗАДАЧИ СТЕФАНА ОТТАЙКИ МЕРЗЛЫХ ПОРОД В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Л.Э.РИКЕНГЛАЗ

При использовании электромагнитных полей СВЧ диапазона для оттайки мерзлых пород возникает следующая задача. На полубесконечный массив, находящийся при температуре $T_н(z)$, начинает нормально падать электромагнитная волна $\sim exp(i\omega t)$ с вектором Пойнтинга S. Требуется определить момент времени t_0 образования талого слоя, т.е. достижения температуры $T_ф$ границей массива, зависимость толщины талого слоя $\xi(t)$ от времени воздействия поля t, а также распределение температуры в предположении, что теплопроводность породы достаточно мала.

Впервые подобная задача была изучена в работах [4, 5] в пренебрежении теплопроводностью $\varkappa$. Хотя такой подход и позволил определить величину t_0 и зависимость $\xi(t)$, а также показал хорошее совпадение с экспериментальными результатами, его нельзя считать строгим, так как полученное решение даже приближенно не удовлетворяет граничным условиям на фронте фазового перехода и на границе массива. Уравнение нестационарной теплопроводности при $\varkappa = 0$ принадлежит к сингулярно возмущенным уравнениям, т.е. к уравнениям с малым параметром μ при старшей производной [1-3], в которых переход к $\mu = 0$ изменяет тип и порядок уравнения, и одновременное удовлетворение всех граничных условий становится невозможным. Это объясняется существованием вблизи границ пограничного слоя с шириной, пропорциональной $\mu^n (n > 0)$, в котором зависимость от μ носит неаналитический характер, и делает невозможным поиски решения в виде ряда по степеням μ, коэффициенты которого от μ не зависят. Все это вынуждает искать более строгое решение, учитывающее существование вблизи границы массива и фронта фазового перехода погранслоев.

Предполагая, что физические характеристики талого и мерзлого состояний являются постоянными величинами, не зависящими от температуры, а начальная температура $T_н$ не зависит от координаты z, получим систему уравнений рассматриваемой задачи:

$$c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} - \varkappa_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} = Q_1(\xi, z), \quad \xi(t) \le z < \infty, \tag{1}$$

$$c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} - \varkappa_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2} = Q_2(\xi, z), \quad 0 \le z \le \xi(t), \tag{2}$$

где $\xi(t) = 0$ при $t \le t_0$; t_0 является корнем уравнения $T_1(0, t_0) = T_\phi$; индекс I относится к мерзлой, а 2 – к талой породе; T, c, $\varkappa$, Q – соответственно температура, объемная теплоемкость, теплопроводность и объемные источники тепла.

Система уравнений (I)-(2) должна быть решена при начальном условии $T_1(z, 0) = T_н$ и граничных условиях $T_1(\xi, t) = T_2(\xi, t) = T_\phi$; $T(\infty, t) = T_н$; $\frac{\partial T_2(0,t)}{\partial z} = 0$; $t > t_0$:

$$\varkappa_1 \frac{\partial T_1(\xi, t)}{\partial z} = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ L_1 \xi + \varkappa_2 \frac{\partial T_2(\xi, t)}{\partial z}, & t > t_0, \end{cases} \tag{3}$$

где L – скрытая теплота фазового перехода.

Выражения для объемных источников тепла Q_1 и Q_2 после соответствующих преобразований можно записать в сравнительно компактном виде

$$Q_1(\xi, z) = q_1 B_1(\xi) e^{-2\alpha_1 z},$$
$$Q_2(\xi, z) = q_2 B_2(\xi, z),$$

где $q_i = 2\alpha_i N_i S$ – объемная плотность источников тепла на границе массива полностью мерзлой или талой породы; α_i и N_i – коэффициенты затухания и проникновения энергии электромагнитного поля в породе; $B_1(\xi)$ – коэффициент ослабления вектора Пойнтинга после прохождения новой фазы,

$$B_1(\xi) = \left| \frac{R_{02} R_{21}}{1 + R_{02} R_{21} e^{-2ik_2\xi}} \right|^2 e^{2\xi(\alpha_1 - \alpha_2)}, \quad B_1(0) = 1, \tag{4}$$

k_2 – постоянная распространения электромагнитной волны в талой породе;

$$B_2(\xi, z) = \left| \frac{e^{ik_2(\xi - z)} + R_{21} e^{-ik_2(\xi - z)}}{1 + R_{02} R_{21} e^{-2ik_2\xi}} \right|^2,$$

R_{02} и R_{01} – коэффициенты отражения по полю на границах раздела воздух – талая порода и талая – мерзлая породы,

$$R_{02} = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon_2}}{1 + \sqrt{\varepsilon_2}}, \quad R_{21} = \frac{\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2} + \sqrt{\varepsilon_1}},$$

ε – комплексная относительная диэлектрическая проницаемость.

Рассмотрим начальный этап нагрева до образования новой фазы ($t \le t_0$). Для упрощения записи и более наглядного выделения роли малого параметра преобразуем уравнения для старой фазы и граничные условия к безразмерным переменным:

$$\eta = 2\alpha_1 z; \quad W = \frac{T_1 - T_н}{T_ф - T_н};$$

$$\tau = \frac{t}{t_0}; \quad \mu = 4\alpha_1^2 \alpha_1 \bar{t}; \quad \bar{t} = \frac{c_1(T_ф - T_н)}{q_1}, \tag{5}$$

где $\alpha_1 = \varkappa_1 / c_1$ – температуропроводность мерзлой породы.

В переменных (5) температурное поле в старой фазе описывается уравнениями

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \mu \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = e^{-\eta};$$

$$W(\infty, \tau) = W(\eta, 0) = \frac{\partial W(0,\tau)}{\partial \eta} = 0. \tag{6}$$

Уравнения (6) справедливы для полубесконечного интервала $0 \leq \eta < \infty$ и времен $\tau \leq \tau_0$, где τ_0 является корнем уравнения

$$W(0, \tau_0) = 1. \tag{7}$$

Будем искать решение системы (6) в виде суммы внешнего $U(\eta,\tau)$ и внутреннего $V(\eta,\tau)$ решения, из которых первое можно представить в виде ряда по степеням μ. Удерживая нулевой член этого разложения U_0, нетрудно показать, что

$$U(\eta,\tau) = U_0(\eta,\tau) + 0(\mu) = \tau e^{-\eta} + 0(\mu),$$

где выражение $0(\mu^n)$ обозначает слагаемое порядка μ^n.

Положив внутреннее решение $V = W - U$, имеем с точностью до членов порядка $0(\mu)$:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} - \mu \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = 0; \quad V(\infty,\tau) = 0; \quad V(\eta,0) = 0; \quad \frac{\partial V(0,\tau)}{\partial \eta} = \tau. \tag{8}$$

Произведем растяжение координаты η вблизи границы массива, введя новую переменную $y = \eta / \mu^{1/2}$. Тогда V удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0; \quad V(\infty,\tau) = V(y,0) = 0; \quad \frac{\partial V(0,\tau)}{\partial \eta} = \mu^{1/2}\tau. \tag{9}$$

Очевидно, что решение уравнений (9) имеет порядок $0(\mu^{1/2})$. Обозначая это решение в переменных η, τ через $V_{1/2}$, имеем после соответствующих вычислений:

$$V_{1/2}(\eta,\tau) = \frac{4\mu^{1/2}\tau^{3/2}}{3\pi^{1/2}} \left[(3x + 2x^2) \int_x^\infty e^{-x^2} dx - (1 + x^2) e^{-x^2} \right]_{x = \eta(4\mu\tau)^{-1/2}}. \tag{10}$$

Из формулы (10) следует, что $V_{1/2}$ заметно отлично от нуля лишь при $\eta \leq (4\mu\tau)^{1/2}$. При $\eta \to 0$ внутреннее решение стремится к $-4\mu^{1/2}\tau^{3/2}/3\pi^{1/2}$, т.е. является достаточно малой величиной, однако производная от $V_{1/2}$ по η при $\eta \to 0$ имеет тот же порядок, что и от U_0, делая тем самым возможным точное удовлетворение условию на границе массива с точностью до членов порядка $0(\mu)$.

Нетрудно показать, что момент образования новой фазы на границе массива

$$\tau_0 = 1 - 4\mu^{1/2}/3\pi^{1/2} + 0(\mu) = 1 + 0(\mu^{1/2}). \qquad (11)$$

Определим температурное поле в мерзлой породе после возникновения талого слоя ($\tau > \tau_0$). Обозначив через $d = 2\alpha_1\xi(t)$ безразмерную ширину талого слоя, имеем при $\tau > \tau_0$:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} - \mu\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} = B_1(d)e^{-\eta}, \quad W(\infty,\tau) = 0, \quad W\left[d(\tau),\tau\right] = 1, \qquad (12)$$

с начальным условием

$$W(\eta,\tau_0) = U_0(\eta,\tau_0) + V_{1/2}(\eta,\tau_0) + 0(\mu). \qquad (13)$$

С точностью до членов порядка $0(\mu^{1/2})$ находим внешнее решение U, удовлетворяющее граничному условию на бесконечности и начальному условию при $\tau = \tau_0$:

$$U(\eta,\tau) = e^{-\eta}\left[1 + \int_1^\tau B_1(d)d\tau\right] + 0(\mu^{1/2}). \qquad (14)$$

Определяя, как и выше, внутреннее решение $V = W - U$ и совершив замену переменных

$$\tau' = \tau; \quad y = \left[\eta - d(\tau)\right]/\mu,$$

получим с точностью до членов порядка $0(\mu^{1/2})$ следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \dot{d}(\tau)\frac{\partial V}{\partial y} = \mu\frac{\partial V}{\partial \tau}; \quad V(\infty,\tau) = 0, \; V(y,1) = V_{1/2}(\mu^{1/2},y,1), \qquad (15)$$

$$V(0,\tau) = 1 - e^{-d(\tau)}\left[1 + \int_1^\tau B_1(d)d\tau\right], \qquad (16)$$

где $\dot{d}$ – производная от d по τ.

Соответствующими вычислениями можно показать, что система уравнений (15)-(16) имеет решение, в котором главную роль играют члены нулевого порядка по μ:

$$V = V_0(\eta,\mu) + 0(\mu^{1/2}) = \left\{1 - e^{-d/\tau}\left[1 + \int_1^\tau B_2(d)dt\right]\right\}e^{-d(\eta-d)/\mu} + 0(\mu^{1/2}). \qquad (17)$$

С точностью до членов порядка $O(\mu^{1/2})$ безразмерное температурное поле в старой фазе имеет вид

$$W(\eta,\tau)=U_0(\eta,\tau)+V_0(\eta,\tau)+O(\mu^{1/2})=$$
$$=e^{-\eta}\left[1+\int_1^{\tau}B_1(\alpha)d\tau\right]+\left\{1-e^{-\alpha}\left[1+\int_1^{\tau}B_1(\alpha)d\tau\right]\right\}e^{-\alpha(\eta-\alpha)/\mu}+O(\mu^{1/2}). \qquad (18)$$

Используя формулы (14) и (18) и возвращаясь к обычным переменным z, t, нетрудно показать, что с точностью до членов порядка $O(\varkappa_1^{1/2})$ тепловой поток в мерзлой породе на границе фаз:

$$-\varkappa_1\frac{\partial T_1(\xi(t),t)}{\partial z}=\dot{\xi}q_1\left\{t_0-e^{-2\alpha_1\xi}\left[t_0+\int_{t_0}^{t}B_1(\xi)dt\right]\right\}+O(\varkappa_1^{1/2}), \qquad (19)$$

где $t_0\approx\bar{t}$.

Определим температурное поле в талом слое при $0\le z\le\xi(t)$. Новая фаза образуется в точке z в момент времени t_z, удовлетворяющий условию $T(z,t_z)=T_2$. Поэтому, обозначая через $U_2(z,t)$ внешнее решение уравнения (2), которое будем искать в виде ряда по степеням малого параметра $\varkappa_2$, получим с точностью до членов порядка $O(\varkappa_2)$:

$$U_2(z,t)=\frac{q_2}{c_2}\int_{t_z}^{t}B_2\left[\xi(t),z\right]dt+T_\Phi. \qquad (20)$$

Произведя соответствующие растяжения координат вблизи границы массива и фронта фазового перехода, можно показать, что тепловой поток в талом слое на границе фазового фронта имеет порядок $O(\varkappa_2)$, т.е. при $\varkappa_2\to 0$ он пренебрежимо мал по сравнению с тепловым потоком со стороны мерзлой породы, определяемой формулой (19).

Учитывая это обстоятельство и используя граничные условия (3), получим интегральное уравнение для определения $\xi(t)$:

$$e^{-2\alpha_1\xi}\left[t_0+\int_{t_0}^{t}B_1(\xi)dt\right]=t_\Phi,\quad t>t_0, \qquad (21)$$

где

$$t_\Phi=\frac{Q_\Phi(T_н)}{q_1},\quad Q_\Phi(T_н)=L_1+c_1(T_\Phi-T_н).$$

Аналогично тому, как это было сделано в работе [4], можно из уравнения (21) найти неявную зависимость ξ от t:

$$t-t_0=\frac{Q_\Phi(T_н)}{N_1S}\int_0^{\xi}\frac{e^{-2\alpha_1\xi}d\xi}{B_1(\xi)},\quad t>t_0. \qquad (22)$$

Зависимость (22) можно превратить в явную, если учесть, что во многих практических приложениях модуль произведения коэффициентов отражения $|R_{02}R_{21}|\le 0{,}1\text{–}0{,}2$, что позволяет $B_1(\xi)$ положить равным $\exp\left[2\xi(\alpha_1-\alpha_2)\right]$.

Опуская простые преобразования, приведем конечный результат:

$$\xi = 0{,}5\alpha_2^{-1}\ln\left[1+\frac{\alpha_2(t-t_0)}{\alpha_1 t_\phi}\right], \quad t > t_0. \tag{23}$$

Распределение температур в обычных переменных с точностью до членов порядка $O(\varkappa_1)$ имеет вид:

до образования талого слоя $(t \le t_0)$

$$T \approx T_н + (t/t_0)e^{-2\alpha_1 z}, \quad 0 \le z < \infty; \tag{24}$$

в мерзлой породе $(t > t_0)$

$$T \approx T_н + \frac{1}{c_1}\left\{Q_\phi(T_н)e^{-2\alpha_1(z-\xi)} - L_1 e^{-(z-\xi)\dot{\xi}/a_1}\right\}, \tag{25}$$
$$\xi(t) \le z < \infty,$$

пренебрегая узким погранслоем

$$T \approx \frac{Q_\phi(T_н)}{c_1}e^{-2\alpha_1(z-\xi)} + T_н, \quad \xi(t) < z < \infty; \tag{26}$$

в талом слое

$$T \approx T_\phi + \frac{2N_2\alpha_2 S}{c_2}(t-t_z)e^{-2\alpha_2 z}, \quad 0 \le z \le \xi(t).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Мир, 1968.

2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., Наука, 1973.

3. Найфе А. Методы возмущений. М., Мир, 1976.

4. Некрасов Л.Б., Рикенглаз Л.Э. Отражение энергии электромагнитного поля от полубесконечной диэлектрической среды при наличии в среде фазового перехода. – ЖТФ, 1972, т. 42, вып. 7.

5. Некрасов Л.Б., Рикенглаз Л.Э., Шонин О.Б. Скорость движения фронта фазы, вызванной поглощением энергии электромагнитного поля цилиндрически симметричного излучателя. – ЖТФ, 1973, т. 43, вып. 4.