Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г.В.Плеханова,
1984, т. 101

УДК 550.838.01

РАЗЛОЖЕНИЕ МАГНИТНОЙ АНОМАЛИИ ΔT И Z_a ТРЕХМЕРНОГО ИСТОЧНИКА НА ЕСТЕСТВЕННЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ КОМПОНЕНТЫ

В.В.ГЛАЗУНОВ

Аномалию гармонического приближения величины ΔT трехмерного источника в общем случае формируют пять компонент магнитного поля [3]

$$\Delta T = \tilde{Z}_{0z} + \tilde{Z}_{0x} + \tilde{Z}_{0y} + (\tilde{X}_{0x} - \tilde{Y}_{0y}) + \tilde{X}_{0y}, \qquad (1)$$

которые пропорциональны линейно независимым вторым производным гравитационного потенциала W:

$$\tilde{Z}_{0z} = kW_{zz}A_{zz}; \quad \tilde{Z}_{0x} = kW_{xz}A_{xz}; \quad \tilde{Z}_{0y} = kW_{yz}A_{yz};$$
$$\tilde{X}_{0x} - \tilde{Y}_{0y} = -kW_{\Delta}A_{xxyy}; \quad \tilde{X}_{0y} = kW_{xy}A_{xy}, \qquad (2)$$

где $k = J/\sigma G$; J – намагниченность; σ – плотность масс; G – постоянная тяготения. Коэффициенты

$$A_{zz} = \lambda_z t_z - (\lambda_x t_x + \lambda_y t_y)/2; \quad A_{xz} = \lambda_x t_z + \lambda_z t_x; \quad A_{yz} = \lambda_y t_z +$$
$$+ \lambda_z t_y; \quad A_{xxyy} = (\lambda_x t_x - \lambda_y t_y)/2; \quad A_{xy} = \lambda_x t_y + \lambda_y t_x \qquad (3)$$

зависят от направления векторов намагниченности $\vec{J}$ и нормального поля $\vec{T}_0$, так как единичные векторы $\vec{\lambda} = \{\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z\}$ и $\vec{t} = \{t_x, t_y, t_z\}$ удовлетворяют равенствам: $\vec{t} = \vec{T}_0/T_0$; $\vec{\lambda} = \vec{J}/J$.

Аномалия составляющей Z_a, которая равна ΔT при $|\vec{t}| = t_z$, состоит из меньшего числа компонент:

$$Z_a = \tilde{Z}_{0z} + \tilde{Z}_{0x} + \tilde{Z}_{0y}. \qquad (4)$$

Количество компонент определяет сложность решения обратной задачи по аномалии магнитного поля [3]. Поэтому целесообразно рассмотреть возможность разложения аномалии на входящие в ее состав естественные компоненты, которые зависят от формы и удаленности источника аномалии.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда источник аномалии изометричен в плане, т.е. имеет ось вращения, перпендикулярную плоскости наблюдений. Компоненты аномалии $\tilde{K}_{mi}$ изометричных источников можно выразить через радиальную R_{mi} и круговую C_{mi} функции:

$$\tilde{Z}_{0z} = \tilde{K}_{00} = R_{00}C_{00}A_{zz}; \quad \tilde{Z}_{0x} = \tilde{K}_{11} = R_{11}C_{11}A_{xz}; \quad \tilde{Z}_{0y} = \tilde{K}_{12} =$$
$$= R_{12}C_{12}A_{yz}; \quad \tilde{X}_{0x} - \tilde{Y}_{0y} = K_{21} = R_{21}C_{21}A_{xxyy}; \quad \tilde{X}_{0y} = \tilde{K}_{22} = R_{22}C_{22}A_{xy}. \qquad (5)$$

Отметим, что функции с индексом $i = 1$ в общем случае описывают элементы поверхности тела, не параллельные оси $0y$, а при $i = 2$ – оси $0x$. Для изометричных источников очевидно равенство:

$$R_{mi} = R_{m(i+1)}. \qquad (6)$$

Выражения радиальных и круговых функций напишем для внешнего пространства в общем виде, используя разложение поля в ряд по сферическим функциям [1, 4]. В цилиндрической системе координат $(0\rho\phi z)$, ось аппликат которой совпадает с осью вращения источника, получим:

$$R_{00} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{r^{n+3}} A_n^{(0)} P_{n+2}^{(0)}\left(\frac{z}{r}\right); \quad C_{00} = 1;$$

$$R_{11} = R_{12} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{r^{n+3}} A_n^{(0)} P_{n+2}^{(1)}\left(\frac{z}{r}\right); \quad C_{11} = \cos\phi; \quad C_{12} = \sin\phi; \qquad (7)$$

$$R_{21} = R_{22} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+3}} A_n^{(0)} P_{n+2}^{(2)}\left(\frac{z}{r}\right); \quad C_{21} = \cos 2\phi; \quad C_{22} = \frac{1}{2}\sin 2\phi.$$

Здесь $r^2 = \rho^2 + z^2$; $A_n^{(0)} = 2\pi J \int_{h_1}^{h_2}\int_0^{2\pi} r'^n P_n^{(0)}\left(\frac{z'}{r'}\right)\rho' d\rho' dz' d\phi'$;

$P_n^{(k)}\left(\frac{z'}{r'}\right)$ и $P_{n+2}^{(0)}\left(\frac{z}{r}\right)$ – присоединенные полиномы Лежандра, заданные во внешней $(0\rho\phi z)$ и внутренней $(0\rho'\phi'z')$ по отношению к телу областях.

Введем коэффициенты:

$$a_0 = R_{00}A_{zz}; \quad a_1 = R_{11}A_{xz}; \quad b_1 = R_{12}A_{yz}; \quad a_2 = R_{21}A_{xxyy}; \quad b_2 = R_{22}A_{xy}/2, \qquad (8)$$

с помощью которых нетрудно выразить аномалии ΔT и Z_a через поверхностные Фурье-гармоники m-го порядка

$$G_m = a_m \cos m\phi + b_m \sin m\phi,$$

формирующие, согласно равенствам (1), (4), (5), (7), аномалии Z_a и ΔT изометричного источника:

$$\Delta T = \sum_{m=0}^{2} G_m; \qquad Z_a = \Delta T\Big|_{|\vec{t}|=t_z} = \sum_{m=0}^{1} G_m.$$

Коэффициенты (8) нетрудно найти по значениям магнитной аномалии с помощью Фурье-анализа:

$$a_0(\rho) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \Delta T(\rho, \phi_k); \quad a_m(\rho) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \Delta T(\rho, \phi_k)\cos m\phi_k;$$

$$b_m(\rho) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \Delta T(\rho, \phi_k)\sin m\phi_k, \qquad (9)$$

где $\phi_k = k\Delta\phi$; $n = 2\pi/\Delta\phi$.

Формулы (9) пригодны для анализа поля Z_a, если положить $m = 0{,}1$ и считать, что в формулах (3) $t_x = t_y = 0$, а $t_z = 1$.

Остановимся на выборе величины n и тем самым $\Delta\phi$ в формулах (9). Желательно брать величину $\Delta\phi$ минимальной, так как это содействует снижению случайных погрешностей вычисления коэффициентов (8). Максимальную величину интервала дискретизации $\Delta\phi$ следует выбирать в соответствии с известной в спектральном анализе теоремой отсчетов. Согласно этой теореме $\Delta\phi = \pi/2m$ при $m \neq 0$ [2]. Для $m = 0$ интервал $\Delta\phi$ следует выбирать вдвое большим минимального, поэтому для выделения a_0 по полю Z_a нужно положить $\Delta\phi = \pi$, а по полю ΔT: $\Delta\phi = \pi/2$. Для максимальных величин $\Delta\phi$ формулы (9) можно записать в упрощенном виде

$$a_0(\rho) = \frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{2m}\Delta T(\rho, \phi_{km}); \qquad (10)$$

$$a_m(\rho) = \frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{2m}(-1)^{k-1}\Delta T(\rho,\phi_{km}); \quad b_m(\rho) = \frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{2m}(-1)^{k-1}\Delta T(\rho,\phi_{km}+T_1/2m), \qquad (11)$$

где $\phi_{km} = (k-1)\pi/m$. Заметим, что в формуле (10) в общем случае $m = 2$, а в частном, когда $\Delta T = Z_a$, нужно положить $m = 1$.

Получив значения коэффициентов по формуле (9), несложно найти поле компонент в интервале $0 \leq \phi \leq \pi/2m$, домножив коэффициенты (8) на соответствующие им, согласно формулам (5), круговые функции

$$\tilde{K}_{m1}(\rho,\phi) = a_m C_{m1}; \quad \tilde{K}_{m2}(\rho,\phi) = b_m C_{m2}. \qquad (12)$$

Поле компонент в точках плоскости $(0\rho\phi)$ можно получить на основании формул (10) и (11):

$$\tilde{K}_{00}(\rho,\phi) = \frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{2m}\Delta T(\rho,\phi+\phi_{km}); \quad \tilde{K}_{1i}(\rho\phi) = \frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{2m}(-1)^{k-1}\Delta T(\rho,\phi_{km}+\phi);$$

$$\tilde{K}_{2i}(\rho,\phi) = \frac{1}{2m}\sum_{k=1}^{2m}(-1)^{k-1}\Delta T(\rho,\phi_{km}+\pi/2m). \qquad (13)$$

Несмотря на то, что формулы (12) и (13) дают одинаковые результаты, между ними существует принципиальное отличие. Анализ поля, выполняемый с помощью формул (9) и (12), приводит к разложению аномалии на естественные радиальные и априорное заданные круговые функции. А применение формул (13) обеспечивает разложение на естественные радиальные и естественные круговые функции при условии, что источник аномалии изометричен. Заметим, что преобразования, описываемые формулами (13), эквивалентны вращению источника аномалии вокруг оси $0z$ на угол ϕ_{km} k раз и суммированию поля ΔT неподвижного и развернутого источника в точках с одинаковыми координатами (ρ,ϕ).

Можно предложить еще один способ разложения аномалии на естественные ортогональные компоненты, основанный на свойствах симметрии поля компонент. Поле компонент имеет плоскости симметрии и антисимметрии, линия

пересечения которых совпадает с осью $0z$. Значения углов, под которыми проходят p плоскостей симметрии $\phi_{sp}^{(mi)}$ и антисимметрии $\phi_{ap}^{(mi)}$ поля компоненты K_{mi} изометричного источника, можно найти по формулам, вытекающим из выражений (7) для C_{mi}:

$$\phi_{sp}^{(mi)}=(2p+i-1)\pi/2m; \quad \phi_{ap}^{(mi)}=\phi_{sp}^{(mi)}+\pi/2m, \qquad (14)$$

где p = 0, I, ..., $2m$ - I; m = 0, I, 2; i = I, 2. Алгебраическая особенность, возникающая при m = 0, означает, что компонента Z_{0z} изометрична, т.е. имеет бесконечное число плоскостей симметрии.

Значения компонент в точках, равно удаленных от плоскостей симметрии, антисимметрии и оси $0z$, удовлетворяют следующим равенствам:

$$\tilde{K}_{mi}(\rho,\phi_{sp}^{(mi)}+\phi)=\tilde{K}_{mi}(\rho,\phi_{sp}^{(mi)}-\phi); \quad \tilde{K}_{mi}(\rho,\phi_{ap}^{(mi)}+\phi)=-\tilde{K}_{mi}(\rho,\phi_{ap}^{(mi)}-\phi). \qquad (15)$$

Откуда, с учетом (I4), следуют формулы выделения компонент аномалии ΔT:

$$\tilde{K}_{00}(\rho,\phi)=\frac{1}{4}\sum_{p=0}^{1}\left[\Delta T(\rho,\phi_{sp}^{(1i)}+\phi)+\Delta T(\rho,\phi_{sp}^{(1i)}-\phi)\right]; \qquad (16)$$

$$\tilde{K}_{mi}(\rho,\phi)=\frac{1}{4m}\sum_{p=0}^{2m-1}(-1)^p\left[\Delta T(\rho,\phi_{sp}^{(mi)}+\phi)+\Delta T(\rho,\phi_{sp}^{(mi)}-\phi)\right], \qquad (17)$$

где m = I, 2; i = I, 2.

Формула (I6) дает значения компоненты в интервале $0\le\phi\le\pi/2$, а формула (I7) - в интервале $0\le\phi\le\pi/2m$. Для анализа поля Z_a формула (I6) оказывается пригодной, если ограничить p = 0, тогда $\tilde{Z}_{0z}$ можно получить в интервале $-\pi/2\le\phi\le\pi/2$ при m = 2 и в интервале $-\pi\le\phi\le\pi$ при m = I. Формула (I7) может быть использована для анализа поля Z_a с ограничением m = I. Впервые частные случаи формул (I6) и (I7) для $\lambda_y = t_x = t_y$ = 0 и ϕ = 0,π были опубликованы Ю.П.Тафеевым [7].

Преобразования поля, описываемые формулами (I6) и (I7), можно уподобить процедуре "складывания" карты поля ΔT. Линии сгибов карты должны совпадать со следами плоскостей симметрии и антисимметрии поля выделяемых компонент. Значения ΔT "сложенной" карты, равноудаленные от плоскостей симметрии, суммируются, а антисимметрии - вычитаются.

Полезно иметь в виду еще один подход к выделению компонент. Он основан на вычитании компоненты из наблюдаемой аномалии сразу после их выделения. Так, например, получив компоненты $\tilde{X}_{0y}$ и $\tilde{X}_{0x}$-$\tilde{Y}_{0y}$ из аномалии ΔT по формулам (I3) или (I6) и (I7) в области $0\le\phi\le\pi/4$, можно развернуть их на область $0\le\phi\le2\pi$ путем симметричного воспроизведения и вычесть из наблюдаемой аномалии. Разностная аномалия ΔT будет подобна аномалии Z_a, из которой можно выделить оставшиеся компоненты в пределах $0\le\phi\le\pi$, а не $0\le\phi\le\pi/2$, как это предусмотрено формулами анализа поля ΔT. Преимущества способа вычитания компонент в том, что он позволяет найти значения поля компонент на большей площади и разложить анома-

лию, выполнив меньшее число «поворотов» тела или «сгибов» карты. Недостаток в том, что этот способ приводит к накоплению помех в компонентах, остающихся после вычитания.

Качество разделения изометричной аномалии на компоненты позволяет оценить соотношения

$$\tilde{\Phi}_m(\rho,\phi)=\tilde{K}_{mi}(\rho,\phi)/\tilde{K}_{m(i+1)}(\rho,\pi/2m-\phi),$$

справедливые для $m=$ I, 2, и соотношение:

$$\tilde{\Phi}_0(\rho,\phi)=\tilde{K}_{00}(\rho,\phi)/\tilde{K}_{00}(\rho,\pi/2-\phi).$$

Согласно равенству (5), (6) и (7) соотношения

$$\tilde{\Phi}_0(\rho,\phi)=A_{zz}/A_{zz};\quad \tilde{\Phi}_1(\rho,\phi)=A_{xz}/A_{yz};\quad \tilde{\Phi}_2(\rho,\phi)=2A_{xxyy}/A_{xy}$$

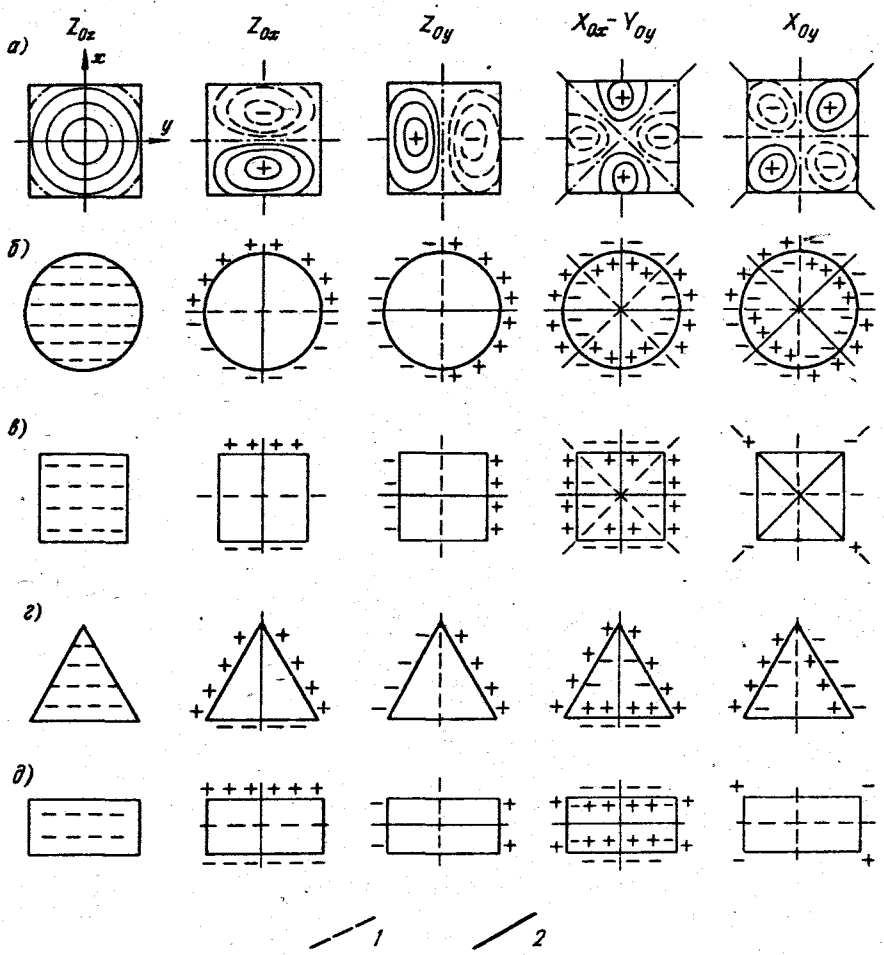
являются величинами постоянными для данного изометричного источника. Поэтому дисперсия

$$D\tilde{\Phi}_m=\frac{1}{kn}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left[\tilde{\Phi}_m(\rho_i,\phi_j)-M\tilde{\Phi}_m\right]^2, \qquad (18)$$

где $M\tilde{\Phi}_m=\frac{1}{kn}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\Phi}_m(\rho_i,\phi_j)$, оказывается равной нулю, если выделенные компоненты соответствуют изометричному источнику и помехи отсутствуют.

Алгоритмы разложения оказываются справедливыми не только для изометричных источников. Класс источников, анализ поля которых можно выполнять по формулам (I3) и (I6), установим с помощью «концепции разностных тел» [5, 6], которая помогает получить требуемые заключения в наглядном виде без рассмотрения громоздких аналитических выражений. Разностными будем считать тела, гравитационный потенциал которых описывается выражениями, справедливыми для вторых производных. Разностные тела, полученные из вертикальных призм, обладающих осью геометрической симметрии 2-го, 3-го, 4-го и бесконечного порядков (см. рисунок), состоят из простых и двойных слоев, расположенных на гранях призм или заряженных нитей, совпадающих с ребрами призм. Распределение зарядов разных знаков на поверхности тела приводит к возникновению элементов антисимметрии источника.

Группы симметрии поля компонент и соответствующих им разностных тел совпадают (рисунок, а, б). Возможность выделения отдельных компонент из суммарной аномалии определяют различия, которые существуют между положением и количеством плоскостей симметрии и антисимметрии связанных с ними разностных тел. Так, благодаря индивидуальным особенностям групп симметрии каждой компоненты, из аномалии ΔT можно выделить поле всех пяти компонент призмы с осью симметрии 4-го порядка и поле только трех компонент призмы с осью 2-го порядка. Поскольку разностные источники компонент $\tilde{Z}_{0z}$, $\tilde{X}_{0x}-\tilde{Y}_{0y}$ призмы с осью 2-го порядка одинаковы, можно выделить только суммарное поле этих компонент. По аналогичной причине из поля ΔT призмы с нечетной осью симметрии можно выделить только суммарное поле $[\tilde{Z}_{0x}+(\tilde{X}_{0x}-\tilde{Y}_{0y})]$ и $[\tilde{Z}_{0y}+\tilde{X}_{0y}]$. Заметим, что из аномалии Z_a любой призмы можно выделить каждую из трех входящих в нее компонент.



Компоненты Z_{0z}, Z_{0x}, Z_{0y}, X_{0x}-Y_{0y} и X_{0y} магнитного поля шара (а) и „разностные тела", образованные из изометричного источника (б) и призм с осью симметрии 4-го (в), 3-го (г), 2-го (д) порядков
1-2 – следы плоскостей антисимметрии и симметрии

Выделение компонент возможно способами «вращения" источника, «складывания" карты и вычитания компонент. Алгоритм выделения для конкретной модели нетрудно сконструировать, исходя из особенностей симметрии разностного источника. Отметим, что выделение компонент поля призм с четной осью симметрии S-го порядка, если $S/2$ – четное, возможно способами, справедливыми для изометричного источника, а если $S/2$ – нечетное, способами, подходящими для призм с осью 2-го порядка. Разделению аномалии на компоненты необходимо предпослать определение координат оси и плоскостей симметрии источника на плоскости наблюдений.

Качество выделения компонент произвольного источника можно оценить, основываясь на очевидных для третьих производных гравитационного потенциала равенствах:

$$(Z_{0z})'_x=(Z_{0x})'_z;\ (Z_{0z})'_y=(Z_{0y})'_z;\ (Z_{0x})'_y=(Z_{0y})'_x=(X_{0y})'_z;\ (Z_{0x})'_x-(Z_{0y})'_y=(X_{0x})'_z-(Y_{0y})'_z.$$

Введем обозначения

$$\tilde{\Phi}_0(\rho,\phi)=\left[Z_{0z}(\rho,\phi)\right]'_x/\left[\tilde{Z}_{0z}(\rho,\pi/2-\phi)\right]'_y;\ \tilde{\Phi}_1(\rho,\phi)=\left[\tilde{Z}_{0x}(\rho,\phi)\right]'_z/\left[\tilde{Z}_{0y}(\rho,\pi/2-\phi)\right]'_z$$

и на их основе соотношение

$$\tilde{S}_{01}(\rho,\phi)=\tilde{\Phi}_1(\rho,\phi)/\tilde{\Phi}_0(\rho,\phi)=A_{xz}/A_{yz},$$

которое является величиной постоянной для источника произвольной формы. Дисперсия этого соотношения, рассчитанная по формулам, аналогичным (I8), дает требуемую оценку погрешности выделения компонент $\tilde{Z}_{0z}$, $\tilde{Z}_{0x}$, $\tilde{Z}_{0y}$.

Затем, основываясь на среднем значении $M\tilde{S}_{01}$ и соотношениях

$$\tilde{\Phi}_{12}(\rho,\phi)=\left\{\left[\tilde{Z}_{0x}(\rho,\phi)\right]'_x-M\tilde{S}_{01}\left[Z_{0y}(\rho,\phi)\right]'_x\right\}/\left[Z_{0x}(\rho,\pi/4-\phi)\right]'_y=$$

$$=\left\{\left[\tilde{Z}_{0x}(\rho,\phi)\right]'_x/M\tilde{S}_{01}-\left[\tilde{Z}_{0y}(\rho,\phi)\right]'_y\right\}/\left[\tilde{Z}_{0y}(\rho,\pi/4-\phi)\right]'_y;$$

$$\tilde{\Phi}_2(\rho,\phi)=\left[\tilde{X}_{0x}(\rho,\phi)-\tilde{Y}_{0y}(\rho,\phi)\right]'_z/\left[\tilde{X}_{0y}(\rho,\pi/4-\phi)\right]'_z,$$

можно получить величину, постоянную для произвольного намагниченного источника [3],

$$\tilde{S}_{12}(\rho,\phi)=\tilde{\Phi}_2(\rho,\phi)/\tilde{\Phi}_{12}(\rho,\phi)=2A_{xxyy}/A_{xy},$$

дисперсия которой, найденная по формулам, аналогичным (I7), даст оценку погрешности выделения компонент $\tilde{X}_{0y}$ и $\tilde{X}_{0x}-\tilde{Y}_{0y}$ при заданной величине $M\tilde{S}_{01}$.

В заключение отметим, что разложение аномалии на компоненты упрощает решение обратной задачи, так как в результате разложения магнитная аномалия как бы преобразуется в несколько гравитационных. Причем компоненты аномалии образуют систему линейно независимых уравнений относительно параметров источника. Наличие системы уравнений повышает устойчивость и однозначность решения задачи. Система уравнений линейна относительно физических параметров, поэтому ее несложно решить относительно углов, определяющих направление вектора намагниченности [3]. Кроме того, по полю компонент можно вычислить гармонические моменты источника, используя хорошо известные интегральные формулы [8]. Геометрические параметры источников следует определять методами, разработанными для вторых производных гравитационного потенциала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьев Н.Л. Метод расчета потенциальных полей в пространстве и его применение в разведочной геофизике. М., Недра, 1968.

2. Бат Маркус. Спектральный анализ в геофизике. М., Недра, 1980.

3. Глазунов В.В. Компонентный метод интерпретации изометричных магнитных аномалий. ВИНИТИ, № 5467-83 деп. Л., 1983.

4. Дубошин Г.Н. Теория притяжения. М., Недра, 1964.

5. Логачев А.А., Захаров В.П. Магниторазведка. Л., Недра, 1973.

6. Страхов В.Н., Лапина М.И. Прямая и обратная задача гравиметрии и магнитометрии для произвольных однородных многогранников. - В кн.: Теория и практика интерпретации гравитационных и магнитных полей в СССР. Киев, Наукова думка, 1983.

7. Тафеев Г.П., Соколов К.П. Геологическая интерпретация магнитных аномалий. Л., Недра, 1981.

8. Тафеев Ю.П. О расчетах магнитного поля ΔT. - В кн.: Геофизическая разведка рудных месторождений. М., Госгеолтехиздат, 1953.