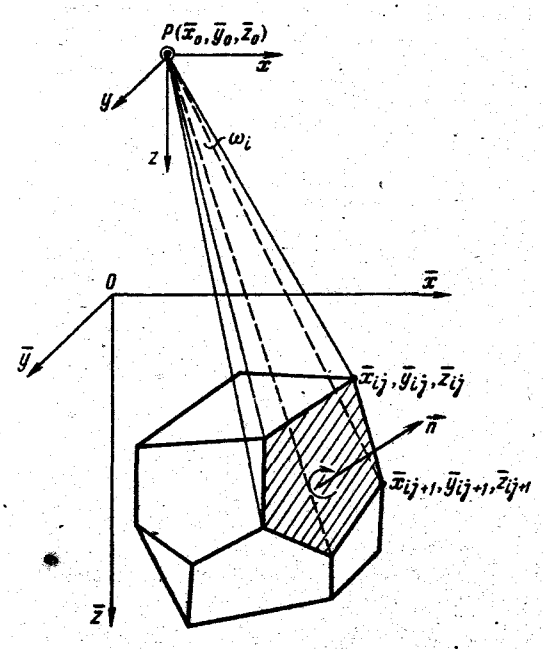
Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г.В.Плеханова,
1984, т. 101

УДК 550.831.01

ПОЛЕ ПРИТЯЖЕНИЯ МАСС ПРОСТОГО СЛОЯ ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТИ МНОГОУГОЛЬНОЙ СВОБОДНО ОРИЕНТИРОВАННОЙ ПЛАСТИНКИ

Г.Г.КРАВЦОВ

Аналитика решения прямой задачи ньютоновского потенциала для произвольно располагаемых в пространстве плоских материальных многоугольников и для неправильного многогранника во многом сходна. Интегралы, с которыми приходится иметь дело и в той и в другой задаче, по существу однотипные. Подобная закономерность не случайна. Она становится понятна, если обратиться к интегральным соотношениям, известным в теории потенциала под названием формул Римана [4]. В них притяжение объемных масс представляется как сумма потенциала объемных масс и потенциала простого слоя при некоторых специальных правилах распределения тяготеющих масс в объеме тела и на его поверхности. Наиболее прост случай однородных по плотности масс. Для него в формулах Римана пропадают тройные интегралы и остаются лишь двойные интегралы по поверхности притягивающего тела, относящиеся к потенциалу простого слоя. Этим замечательным свойством широко пользовались исследователи, обращавшиеся к решению прямых задач гравиметрии и магнитометрии [I].



Многогранник и притягиваемая точка P в правой системе прямоугольных координат

Формулы Римана предполагают, что плотность масс описывается функцией $\rho(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, обладающей непрерывными частными производными первого порядка по переменным, по которым ведется интегрирование. Этому требованию, очевидно, удовлетворяет полином, с помощью которого достаточно гибко можно характеризовать закономерность изменения плотности вещества, заполняющего некоторый объем. А прос-

тейшим случаем переменной плотности будет тогда линейная зависимость

$$\rho(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \sigma_1\bar{x}+\sigma_2\bar{y}+\sigma_3\bar{z}+\bar{\sigma}, \qquad (1)$$

где параметры $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и $\bar{\sigma}$ полагаются заранее известными.

Для произвольного типа неправильного многогранника, т.е. не обязательно выпуклого и представляющего собой не обязательно односвязную область (объем), прямая задача с линейным законом поведения плотности была в свое время решена [2, 3]. В качестве параметров такого многогранника (см. рисунок) выступают упорядоченные по граням совокупности координат его вершин $\bar{x}_{ij}, \bar{y}_{ij}, \bar{z}_{ij}$ ($i = \overline{1,n}$; $j = \overline{1,m_i}$) и коэффициенты в уравнении тех плоскостей

$$A_i\bar{x}+B_i\bar{y}+C_i\bar{z}+\bar{D}_i = 0 \quad (i=\overline{1,n}), \qquad (2)$$

на которых располагаются грани многогранника и которыми в пространстве трех измерений высекается его объем. Буквой m_i обозначено здесь число вершин, приходящихся на грань с порядковым номером i, а буквой n – общее число всех граней у многогранника. В правой системе прямоугольных координат нумерация вершин в плоскости каждой грани по индексу j ведется относительно внешней нормали $\vec{n}$ по ходу часовой стрелки, как это показано на рисунке. При этом в качестве первой вершины грани может быть выбрана любая вершина.

Все необходимые сведения о поверхности многогранника и его плотностную характеристику естественно задавать относительно некоторой базовой системы координат $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, причем коэффициенты равенства (2) вовсе не нуждаются в специальной подготовке. Восстанавливаются они очень просто [3], если известны координаты вершин многоугольника. При вычислении коэффициентов уравнения плоскости грани достаточно воспользоваться координатами любых трех ее вершин, не лежащих на одной прямой.

Вместе с тем конечные выражения прямой задачи даны в работах [2, 3] относительно системы прямоугольных координат xyz. Последняя получена параллельным переносом координатной системы $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ до совмещения ее начала с точкой наблюдения $\bar{P}(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0)$. Переносу сопутствует корректировка ряда параметров многогранника по формулам преобразования:

$$\begin{gathered} x_{ij} = \bar{x}_{ij} - \bar{x}_0; \quad y_{ij} = \bar{y}_{ij} - \bar{y}_0; \quad z_{ij} = \bar{z}_{ij} - \bar{z}_0; \\ D_i = A_i\bar{x}_0 + B_i\bar{y}_0 + C_i\bar{z}_0 + \bar{D}_i; \quad \sigma = \sigma_1\bar{x}_0 + \sigma_2\bar{y}_0 + \sigma_3\bar{z}_0 + \bar{\sigma}, \end{gathered} \qquad (3)$$

а координаты самой точки наблюдения обращаются тем самым в нуль.

Такой подход оказался полезным в двух отношениях. С одной стороны, выражения потенциала многогранника и его частных производных различного порядка стали без потери своей общности и универсальности записываться значительно проще и короче. Ведь в формулах обязательно должны были исчезнуть по причине равенства нулю координаты точки наблюдения.

Но главная ценность введенного преобразования заключалась в другом. Параметры многогранника сразу же четко подразделились на две группы. Одну группу составили те из них, которые в процессе переноса начала координат меняют свое значение. Иначе говоря, они связаны функциональной зависимостью (3) с координатами точки наблюдения P. Это позволило дать убедительную и наглядную геометрическую трактовку всех встречающихся в формулах ветвлений и непосредственно увязать ветвления с положениями притягиваемой точки относительно элементов поверхности многогранника. В то же время на числовую величину коэффициентов σ_1, σ_2, σ_3 и A_i, B_i, C_i равенств (I) и (2) параллельный перенос в пространстве координатных осей никак не влияет. Группу этих параметров просто можно принять за некоторые константы или постоянные, свойственные как индивидуальная особенность вполне конкретному виду многогранника.

В результате такого анализа становится предельно ясным, как надо наиболее целесообразно организовать вычисление и хранение исходных и промежуточных данных с тем, чтобы до минимума снизить трудоемкость расчета элементов поля притяжения многогранника. Кроме того, равенства (3) сразу же отвечают на вопрос о том, как осуществить дифференцирование по координатам точки наблюдения явного выражения потенциала тяготения многогранника W и потенциала бесконечно тонкой материальной пластины $U = U^{(i)}$, выступающей в качестве рядовой грани многогранника с порядковым номером i. Чтобы избежать излишнего загромождения формул, индекс i при букве U будем далее без всяких на то оговорок опускать.

Посмотрим теперь, как трансформируются формулы Римана, если их применить к многограннику с линейным законом изменения плотности вещества по его объему и на его поверхности:

$$W_x = f\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial x}\frac{dv}{r} - f\iint_S \rho\cos(\vec{n},x)\frac{ds}{r} = \sigma_1\overline{W} - \sum_{i=1}^{n}\mu A_i U; \qquad (4)$$

$$W_y = f\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial y}\frac{dv}{r} - f\iint_S \rho\cos(\vec{n},y)\frac{ds}{r} = \sigma_2\overline{W} - \sum_{i=1}^{n}\mu B_i U; \qquad (5)$$

$$W_z = f\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial z}\frac{dv}{r} - f\iint_S \rho\cos(\vec{n},z)\frac{ds}{r} = \sigma_3\overline{W} - \sum_{i=1}^{n}\mu C_i U, \qquad (6)$$

где W_x, W_y, W_z – первые производные потенциала многогранника; f – гравитационная постоянная; V и S – соответственно объем и площадь поверхности многогранника; $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\overline{W}$ – потенциал многогранника единичной плотности (ρ = I); $\cos(\vec{n},x) = \mu A_i$, $\cos(\vec{n},y) = \mu B_i$, $\cos(\vec{n},z) = \mu C_i$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности многогранника; $\mu = \mu_i$ – нормирующий множитель к коэффициентам уравнения плоскости (2).

Если абсолютная величина нормирующего множителя находится достаточно просто: $\mu^2 = I/(A_i^2 + B_i^2 + C_i^2)$, то алгебраический знак его целиком зависит от величины углов, образуемых внешней нормалью $\vec{n}$ с координатными

осями x, y и z. Для установления алгебраического знака нормирующего множителя можно воспользоваться любым из следующих соотношений:

$$\mu A_i = S_{yz}^{(i)}/S_i; \quad \mu B_i = S_{xz}^{(i)}/S_i; \quad \mu C_i = S_{xy}^{(i)}/S_i,$$

где

$$S_{yz}^{(i)} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m_i} p_{yz}; \quad S_{xz}^{(i)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m_i} p_{xz}; \quad S_{xy}^{(i)} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m_i} p_{xy};$$

$$S_i = \sqrt{(S_{yz}^{(i)})^2 + (S_{xz}^{(i)})^2 + (S_{xy}^{(i)})^2}; \quad p_{xy} = x_{ij}y_{ij+1} - x_{ij+1}y_{ij};$$

$$p_{xz} = x_{ij}z_{ij+1} - x_{ij+1}z_{ij}; \quad p_{yz} = y_{ij}z_{ij+1} - y_{ij+1}z_{ij}$$

(здесь S_i – площадь грани многогранника с порядковым номером i; $S_{xy}^{(i)}$, $S_{xz}^{(i)}$ и $S_{yz}^{(i)}$ – площадь проекций грани соответственно на координатные плоскости $x0y$, $x0z$ и $y0z$, полученная с учетом алгебраического знака направляющих косинусов внешней нормали к грани).

Не представляет большого труда найти для потенциала U явное решение, опираясь на равенства (4)–(6). Для этого достаточно воспользоваться выражениями W, W_x, W_y, W_z, которые приведены в работах [2, 3]. Если подставить их в любое из трех выше названных равенств, то после несложных алгебраических преобразований приходим к следующему результату:

$$U = (\sigma - \mu^2 t_4 D_i)\bar{U} + \frac{1}{2} f\mu \sum_{j=1}^{m_i}\left(\frac{\delta}{\Delta} t_5 J_1 - tQJ\right). \qquad (7)$$

В формуле (7) использованы следующие обозначения:

$$\Delta x = x_{ij+1} - x_{ij}; \quad \Delta y = y_{ij+1} - y_{ij}; \quad \Delta z = z_{ij+1} - z_{ij};$$

$$x_{im_i+1} = x_{i1}; \quad y_{im_i+1} = y_{i1}; \quad z_{im_i+1} = z_{i1};$$

$$\Delta = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2;$$

$$t_1 = \Delta z B_i - \Delta y C_i; \quad t_2 = \Delta x C_i - \Delta z A_i; \quad t_3 = \Delta y A_i - \Delta x B_i;$$

$$t_4 = A_i\sigma_1 + B_i\sigma_2 + C_i\sigma_3; \quad t_5 = t_1\sigma_1 + t_2\sigma_2 + t_3\sigma_3;$$

$$t = \Delta x\sigma_1 + \Delta y\sigma_2 + \Delta z\sigma_3;$$

$$u_1 = \Delta x x_{ij} + \Delta y y_{ij} + \Delta z z_{ij}; \quad u_2 = \Delta x x_{ij+1} + \Delta y y_{ij+1} + \Delta z z_{ij+1};$$

$$R_1=\sqrt{x_{ij}^2+y_{ij}^2+z_{ij}^2}\;;\quad R_2=\sqrt{x_{ij+1}^2+y_{ij+1}^2+z_{ij+1}^2}\;;$$

$$\delta=p_{xy}^2+p_{xz}^2+p_{yz}^2\;;\quad Q=A_i p_{yz}-B_i p_{xz}+C_i p_{xy}\;;$$

$$M_1=(y_{ij}p_{xy}+z_{ij}p_{xz})/(p_{yz}R_1);\quad M_2=(y_{ij+1}p_{xy}+z_{ij+1}p_{xz})/(p_{yz}R_2);$$

$$N_1=(z_{ij}Q+p_{xy}D_i)/(\Delta z D_i R_1);\quad N_2=(z_{ij+1}Q+p_{xy}D_i)/(\Delta z D_i R_2);$$

$$\varphi:=\underline{\text{if}}\;p_{yz}=0\;\underline{\text{then}}\;0\;\underline{\text{else}}\;arctg(M_2)-arctg(M_1)^{x};$$

$$\phi:=\underline{\text{if}}\;\Delta z=0\;\underline{\text{then}}\;0\;\underline{\text{else}}\;arctg(N_2)-arctg(N_1);$$

$$J_1:=\underline{\text{if}}\;\delta\neq 0\;\underline{\text{then}}\;\bar{J}_1\;\underline{\text{else}}\;\underline{\text{if}}\;R_1R_2\neq 0\;\underline{\text{then}}\;\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left|\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\right|\;\underline{\text{else}}\;0;$$

$$\bar{J}_1=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\ln\left|\frac{u_2+R_2\sqrt{\Delta}}{u_1+R_1\sqrt{\Delta}}\right|;$$

$$J_2:=\underline{\text{if}}\;D_i=0\;\underline{\text{then}}\;0\;\underline{\text{else}}\;\underline{\text{if}}\;A_i=0\;\underline{\text{then}}\;\varphi\;\underline{\text{else}}\;\phi\;;$$

$$J=(R_2-R_1)/\Delta\;;\quad \omega_i=\sum_{j=1}^{m_i}J_2\;;\quad \bar{U}=f\mu\left(D_i\omega_i-\sum_{j=1}^{m_i}QJ_1\right),$$

где $\bar{U}=\bar{U}^i$ – потенциал i-й грани многогранника единичной плотности ($\rho=1$).

Располагая решением в явном виде для потенциала U, уместно сопоставить с ним структуру формул потенциала W и первых его частных производных именно в том представлении, как они записаны в правой части равенств (4)–(6). Проведенный анализ обнаружил явную аналитическую аналогию в правилах вычисления функций U и W, W_x, W_y, W_z:

---

x Для простоты описания разветвляющихся формул использованы элементы языка АЛГОЛ.

$$W=\frac{1}{3}\left(\sigma\bar{W}-\sum_{i=1}^{n}\mu D_i U\right)=-\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{n}\mu D_i(U+0{,}5\sigma\bar{U});$$

$$W_x=-\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i U+0{,}5\sigma_1 D_i\bar{U});\quad W_y=-\sum_{i=1}^{n}\mu(B_i U+0{,}5\sigma_2 D_i\bar{U});\qquad (8)$$

$$W_z=-\sum_{i=1}^{n}\mu(C_i U+0{,}5\sigma_3 D_i\bar{U}).$$

Для вывода первых производных потенциала простого слоя, распределенного на грани многогранника, воспользуемся следующим приемом. Обратим прежде всего внимание на то, что параметры A_i, B_i, C_i и σ_1, σ_2, σ_3, присутствующие в равенствах (4)–(6), с координатами точки наблюдения функциональной зависимостью не связаны и при дифференцировании могут рассматриваться как некие постоянные. С учетом сказанного подвергнем операции дифференцирования левую и правую части этих равенств:

$$W_{xx}=\sigma_1\bar{W}_x-\sum_{i=1}^{n}\mu A_i U_x;\quad W_{yy}=\sigma_2\bar{W}_y-\sum_{i=1}^{n}\mu B_i U_y;\quad W_{zz}=\sigma_3\bar{W}_z-\sum_{i=1}^{n}\mu C_i U_z;$$

$$W_{xy}=\sigma_1\bar{W}_y-\sum_{i=1}^{n}\mu A_i U_y=\sigma_2\bar{W}_x-\sum_{i=1}^{n}\mu B_i U_x;\qquad (9)$$

$$W_{xz}=\sigma_1\bar{W}_z-\sum_{i=1}^{n}\mu A_i U_z=\sigma_3\bar{W}_x-\sum_{i=1}^{n}\mu C_i U_x;$$

$$W_{yz}=\sigma_2\bar{W}_z-\sum_{i=1}^{n}\mu B_i U_z=\sigma_3\bar{W}_y-\sum_{i=1}^{n}\mu C_i U_y.$$

За счет независимости результатов дифференцирования от порядка проведения этой операции для смешанных производных получены два внешне различных представления.

Подставим теперь в равенства (9) явные выражения первых и вторых производных потенциала W, которые можно взять из работы [3]. Полученные таким способом уравнения относительно определяемых первых производных потенциала простого слоя U_x, U_y и U_z после небольших преобразований приводят к искомому результату:

$$U_x=(\sigma_1-\mu^2 t_4 A_i)\bar{U}+t_6\bar{U}_x-f\mu\sum_{j=1}^{m_i}(t t_1 J+u_3 t_5 J_1);$$

$$U_y=(\sigma_2-\mu^2 t_4 B_i)\bar{U}+t_6\bar{U}_y-f\mu\sum_{j=1}^{m_i}(t t_2 J-u_4 t_5 J_1);\qquad (10)$$

$$U_z=(\sigma_3-\mu^2 t_4 C_i)\bar{U}+t_6\bar{U}_z-f\mu\sum_{j=1}^{m_i}(t t_3 J-u_3 t_5 J_1),$$

где

$$\bar{U}_x = f\mu\left(A_i\omega_i - \sum_{j=1}^{m_i} t_1 J_1\right);\quad \bar{U}_y = f\mu\left(B_i\omega_i - \sum_{j=1}^{m_i} t_2 J_1\right);\quad \bar{U}_z = f\mu\left(C_i\omega_i - \sum_{j=1}^{m_i} t_3 J_1\right);$$

$$u_3 = (\Delta y p_{xy} + \Delta z p_{xz})/\Delta;\quad u_4 = (\Delta x p_{xy} - \Delta z p_{yz})/\Delta;\quad u_5 = (\Delta x p_{xz} + \Delta y p_{yz})/\Delta;$$

$$t_6 = \sigma - \mu^2 t_4 D_i.$$

Из последующих исследований стало ясно, что выражениями (8) аналитические аналогии в представлении потенциалов W и U и их частных производных первого порядка далеко не исчерпываются. Формулы элементов поля тяготения многогранника, как показал скрупулезный их анализ, обладают исключительной аглебраической гибкостью. И среди возможных вариантов их записи определенный интерес представляет установление прямой связи между первыми производными потенциалов W и U. Последнее стало возможным осуществить, как только были получены соотношения (IO):

$$W_x = \frac{1}{2}\left(\sigma\bar{W}_x - \sum_{i=1}^{n}\mu D_i U_x\right) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mu D_i(U_x + \sigma\bar{U}_x);$$

$$W_y = \frac{1}{2}\left(\sigma\bar{W}_y - \sum_{i=1}^{n}\mu D_i U_y\right) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mu D_i(U_y + \sigma\bar{U}_y); \qquad (11)$$

$$W_z = \frac{1}{2}\left(\sigma\bar{W}_z - \sum_{i=1}^{n}\mu D_i U_z\right) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mu D_i(U_z + \sigma\bar{U}_z).$$

Теперь в нашем распоряжении имеется все необходимое, чтобы установить аналитическую аналогию между вторыми производными потенциала многогранника и первыми производными потенциала его граней. Воспользуемся соотношениями (IO) и (II). Подставляя их в равенства (9), получим:

$$W_{xx} = -\sum_{i=1}^{n}\mu(\sigma_1 D_i\bar{U}_x + A_i U_x);\quad W_{yy} = -\sum_{i=1}^{n}\mu(\sigma_2 D_i\bar{U}_y + B_i U_y);\quad W_{zz} = -\sum_{i=1}^{n}\mu(\sigma_3 D_i\bar{U}_z + C_i U_z);$$

$$W_{xy} = -\sum_{i=1}^{n}\mu(\sigma_1 D_i\bar{U}_y + A_i U_y) = -\sum_{i=1}^{n}\mu(\sigma_2 D_i\bar{U}_x + B_i U_x);$$

$$W_{xz} = -\sum_{i=1}^{n}\mu(\sigma_1 D_i\bar{U}_z + A_i U_z) = -\sum_{i=1}^{n}\mu(\sigma_3 D_i\bar{U}_x + C_i U_x); \qquad (12)$$

$$W_{yz} = -\sum_{i=1}^{n}\mu(\sigma_2 D_i\bar{U}_z + B_i U_z) = -\sum_{i=1}^{n}\mu(\sigma_3 D_i\bar{U}_y + C_i U_y).$$

До сих пор весь анализ касался случая линейного закона распределения плотности тяготеющих масс. Интересно проследить, как упростятся выраже-

ния (6), (II) и (I2) для однородных масс единичной плотности, тем более, что обозначениями W и U мы широко пользовались:

$$\overline{W} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mu D_i \overline{U};$$

$$\overline{W}_x = -\sum_{i=1}^{n}\mu A_i \overline{U} = -\sum_{i=1}^{n}\mu D_i \overline{U}_x;\quad \overline{W}_y = -\sum_{i=1}^{n}\mu B_i \overline{U} = -\sum_{i=1}^{n}\mu D_i \overline{U}_y;\quad \overline{W}_z = -\sum_{i=1}^{n}\mu C_i \overline{U} = -\sum_{i=1}^{n}\mu D_i \overline{U}_z;$$

$$\overline{W}_{xx} = -\sum_{i=1}^{n}\mu A_i \overline{U}_x;\quad \overline{W}_{yy} = -\sum_{i=1}^{n}\mu B_i \overline{U}_y;\quad \overline{W}_{zz} = -\sum_{i=1}^{n}\mu C_i \overline{U}_z; \qquad (I3)$$

$$\overline{W}_{xy} = -\sum_{i=1}^{n}\mu A_i \overline{U}_y = -\sum_{i=1}^{n}\mu B_i \overline{U}_x;\quad \overline{W}_{xz} = -\sum_{i=1}^{n}\mu A_i \overline{U}_z = -\sum_{i=1}^{n}\mu C_i \overline{U}_x;$$

$$\overline{W}_{yz} = -\sum_{i=1}^{n}\mu B_i \overline{U}_z = -\sum_{i=1}^{n}\mu C_i \overline{U}_y.$$

Формулы (I3) легко распространяются и на случай

$$\rho(x,y,z) = \sigma - const \neq 1.$$

Для этого достаточно перед знаком суммирования поставить множитель σ. Некоторые из выражений (I3) именно в таком обобщенном виде удобно сопоставить с аналогичными результатами, опубликованными в работе [5]. В другом варианте с более дробной детализацией сравнение становится затруднительным, так как свои исследования В.Н.Страхов выполнял с привлечением аппарата теории функций комплексного переменного.

Рассмотренный процесс легко обобщается последующим дифференцированием равенств (9) на производные потенциалов W и U любого порядка. Несложно убедиться, что такие же закономерности, порождаемые формулами Римана, имеют место при любой полиномиальной плотности. Следовательно, если прямая задача ньютоновского потенциала для неправильного многогранника с полиномиальным законом представления плотности масс решена, то тем самым автоматически оказывается решенной и прямая задача для масс простого слоя, распределенных на его гранях по тому же полиномиальному закону. Разумеется, имеет место и обратное явление.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоголов В.Т. Вычисление магнитных и гравитационных полей при аппроксимации тел многоугольниками и многогранниками. – Тр. СНИИГГИМС, 1971, вып. 136.

2. Кравцов Г.Г. Поле притяжения многогранников переменной плотности. – Зап. ЛГИ, 1978, т. 76, вып. 1.

3. Кравцов Г.Г. Аналитическое представление внутреннего и внешнего полей притяжения тел с переменной плотностью, ограниченных поверхностями первого порядка. – В кн.: Теория и методика интерпретации гравимагнитных полей. Докл. Всесоюз. семинара. Киев, Наукова думка, 1981.

4. Сретенский Л.Н. *Теория ньютоновского потенциала*. М.–Л., Гостехиздат, 1946.

5. Страхов В.Н., Лапина М.И. Прямая и обратная задачи гравиметрии и магнитометрии для произвольных однородных многогранников. – В кн.: Теория и практика интерпретации гравитационных и магнитных полей в СССР. Материалы III Всесоюз. школы-семинара. Киев, Наукова думка, 1983.