Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г.В.Плеханова,
1985, т.105

УДК 622.24.543.063

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ПЛАВЛЕНИЯ КАВЕРН В ЛЕДНИКОВОЙ ПОРОДЕ

А.А.ЗЕМЦОВ, В.А.ЧУГУНОВ

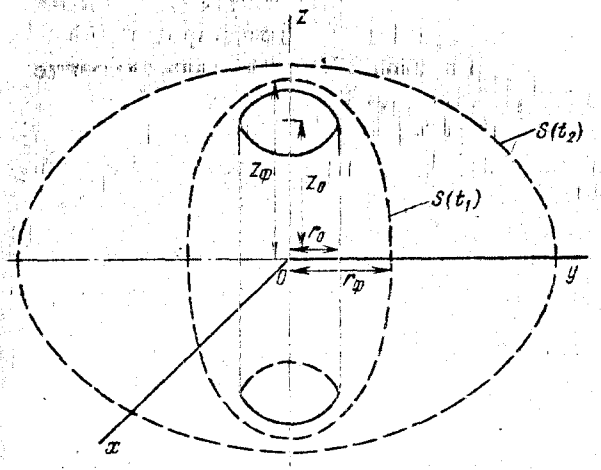
Для отбора значительных по объему проб жидкости или газа с целью детального изучения вещественного состава различных горизонтов ледниковых покровов, распределения в них редких или рассеянных химических элементов, их изотопного состава и пр. в практике гляциологических исследований широкое применение находит метод бурения скважин с плавлением в интервале опробования необходимых по объему каверн[x]. Отбор качественной пробы с минимальной стратиграфической погрешностью требует надежной изоляции и герметичности образующейся при плавлении каверны, форма которой должна обеспечивать максимальный объем при минимальной высоте, т.е. плавление каверны необходимо осуществлять направленно. С этой целью необходимо установить связь между основными режимными параметрами процесса и временем формирования каверны с оптимальными геометрическими размерами. Поставленная задача может быть решена как теоретическими, так и экспериментальными методами.

Теоретическое изучение процессов тепло- и массопереноса, происходящих при плавлении каверны, требует разработки довольно сложной математической модели, включающей в себя систему уравнений теплопроводности для массива ледниковых пород, уравнения динамики, энергии и теплопроводности для жидкой и газообразной фаз внутри каверны. Так как с учетом ограничения на подвижной границе плавления эти уравнения носят явно нелинейный характер, исследование такой полной математической модели даже численными методами представляет собой сложную и трудоемкую задачу. Экспериментальные исследования процесса плавления каверны сталкиваются с трудностями технического порядка и невозможностью в полном объеме удовлетворить все требования теории подобия к моделированию сложных процессов тепло- и массопереноса в лабораторных условиях.

В связи с вышеизложенным в статье на основе комплексного подхода к изучению процесса дан анализ наиболее характерных процессов и явлений формирования каверны - теплообмена и плавления - с учетом определенных допущений и результатов экспериментальных исследований, существенно упрощающих как разработку, так и исследование математической модели всего процесса.

---

[x] Земцов А.А., Кудрящов Б.Б., Чистяков В.К., Шкурко А.М. Скважинный газовый пробоотборник для изучения абсолютного возраста ледовых толщ с помощью изотопного углеродного анализа. - В кн.: Антарктида, вып. 23. М., Наука, 1984.



Математическая модель задачи

В качестве одной из возможных упрощенных моделей плавления каверны в ледниковой породе рассмотрим постановку и решение следующей задачи. В призабойной зоне скважины, пробуренной до нижней границы исследуемого горизонта, размещается специальное нагревательное устройство, с помощью которого плавится каверна заданного объема при минимальных геометрических ее размерах по высоте и максимальных по радиусу, перпендикулярному оси скважины. Начальные размеры будущей каверны определяются радиусом скважины r_0 и высотой нагревательного устройства $2z_0$. Плавление каверны происходит за счет направленной циркуляции и постоянного подогрева образующейся при плавлении льда воды. Вращательное движение жидкости в горизонтальной плоскости вокруг оси скважины увеличивает протяженность каверны в радиальном направлении, а расположенные по высоте нагревательного устройства уровни входа и выхода циркуляционного потока и конвективные перемещения заполняющей каверну жидкой фазы определяют размеры каверны по высоте.

Выберем ортогональную систему координат x, y, z с центром, расположенным на одинаковом расстоянии от всасывающего и нагнетательного отверстий нагревательного устройства на оси скважины (см. рисунок).

Учитывая, что практически все тепло, генерируемое в нагревательном устройстве, передается циркулирующим в каверне потоком жидкости ледниковой породе и идет на ее прогрев до температуры фазового перехода и плавление с увеличением объема и изменением формы каверны, а теплосодержание жидкой фазы при этом меняется незначительно, из условия теплового баланса на подвижной поверхности фазового перехода математически сформулируем нашу задачу в виде

$$\ell \frac{dV}{dt} = N - \Phi \,, \qquad (1)$$

где ℓ – удельная теплота плавления льда, Дж/м^3; V – объем каверны, м^3; t – время плавления каверны, с; N – мощность нагревательного устройства, Вт; Φ – тепловой поток от поверхности каверны в ледовый массив, Вт,

$$\Phi = -\int_S \lambda \frac{\partial T}{\partial n} dS \,, \qquad (2)$$

λ – коэффициент теплопроводности льда, Вт/(м.^{0}С); T – температура льда, ^{0}С; n – внешняя нормаль к поверхности плавления каверны S.

Исходя из реальных условий процесса плавления каверны, для упрощения поставленной задачи и получения ее приближенного решения в удобной для практических расчетов аналитической форме примем дополнительно следующие допущения:

I) в начальный период плавления до времени t_0 форма поверхности каверны изменяется от вытянутого вдоль оси $0z$ эллипсоида вращения до сферы, а затем начинает принимать форму сплюснутого эллипсоида вращения вдоль оси $0y$;

2) температурное поле в ледниковой породе достаточно точно описывается стационарным уравнением теплопроводности, так как при продолжительности процесса в несколько десятков часов скорость движения поверхности плавления относительно невысока;

3) между величинами z_Φ и r_Φ, определяющими высоту и радиус каверны в процессе ее плавления, существует функциональная зависимость $z_\Phi = f(r_\Phi)$, которая может быть с достаточной для практических целей точностью установлена как на основе анализа конкретных условий тепло- и массопереноса, так и экспериментально.

С целью упрощения решения поставленной задачи, учитывая допущение I, перейдем к координатам эллипсоида вращения[x] σ, τ, φ. Тогда для начального периода плавления каверны в форме вытянутого эллипсоида вращения $t_0 \geqslant t \geqslant 0$, заканчивающегося образованием сферической полости, т.е. при $t = t_0$ $z_\Phi = r_\Phi$. С учетом допущения 2 температура в ледовом массиве будет зависеть только от координаты σ, т.е. $\partial T/\partial\tau = 0$; $\partial T/\partial\varphi = 0$, и может быть найдена из решения задачи

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left[\left(\sigma^2-1\right)\frac{\partial T}{\partial\sigma}\right]=0; \quad \sigma=\sigma_\Phi;\ T=0;\ \sigma\to\infty;T\to T_\infty=const, \qquad (3)$$

где σ_Φ - координата поверхности фазового перехода.

Решение задачи (3) для всех $\sigma \geqslant \sigma_\Phi \geqslant 1$ находим в виде

$$T = T_\infty\left[1-\frac{\ln\frac{\sigma-1}{\sigma+1}}{\ln\frac{\sigma_\Phi-1}{\sigma_\Phi+1}}\right]. \qquad (4)$$

Тогда уравнение (2) для теплового потока в ледниковую породу при $\sigma = \sigma_\Phi$ примет вид

$$\Phi = -\lambda\int_S \frac{\sqrt{g_{\tau\tau}\,g_{\varphi\varphi}}}{\sqrt{g_{\sigma\sigma}}}\left.\frac{\partial T}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_\Phi} d\tau\,d\varphi, \qquad (5)$$

где $g_{\sigma\sigma}$, $g_{\tau\tau}$ и $g_{\varphi\varphi}$ - коэффициенты Лямэ; $r_\Phi = a\sqrt{\sigma_\Phi^2-1}$; $z_\Phi = a\sigma_\Phi$; a - коэффициент пропорциональности.

---

[x] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., Наука, 1970.

Выражая ε_Φ и q через z_Φ и r_Φ, получим

$$\Phi = \frac{8\pi\lambda\left|T_\infty\right| z_\Phi \sqrt{1-\left(\frac{r_\Phi}{z_\Phi}\right)^2}}{\ln \frac{1+\sqrt{1-\left(r_\Phi / z_\Phi\right)^2}}{1-\sqrt{1-\left(r_\Phi / z_\Phi\right)^2}}} . \qquad (6)$$

Принимая во внимание, что в начальный период плавления каверны ее высота практически остается неизменной, т.е. $z_\Phi = z_0$, объем каверны в форме вытянутого эллипсоида

$$V = 4/3\pi r_\Phi^2 z_0 . \qquad (7)$$

Подставляя в уравнение (I) соотношения (6) и (7), получим дифференциальное уравнение относительно определяющего размера каверны r_Φ для начального периода ее плавления $(0 \le t \le t_0)$

$$8/3\,\pi z_0 r_\Phi \ell \frac{dr_\Phi}{dt} = N - \frac{8\pi\lambda\left|T_\infty\right| z_0 \sqrt{1-\left(r_\Phi / z_0\right)^2}}{\ln \frac{1+\sqrt{1-\left(r_\Phi / z_0\right)^2}}{1-\sqrt{1-\left(r_\Phi / z_0\right)^2}}} ; \qquad (8)$$

$$t=0;\ r_\Phi = r_0 ;$$

$$t=t_0;\ r_\Phi = z_0 .$$

Для удобства исследования уравнения (8) с целью оценки продолжительности начального периода плавления каверны запишем его в безразмерном виде

$$\begin{cases} Y\frac{dY}{dX} = 1 - b\frac{\sqrt{1-(cY)^2}}{\ln \frac{1+\sqrt{1-(cY)^2}}{1-\sqrt{1-(cY)^2}}} ; \\ X=0,\ Y=1 \\ X=X_0,\ Y=z_0/r_0=\frac{1}{c} , \end{cases} \qquad (9)$$

где $Y = r_\Phi / r_0$; $X = t/t^*$; $t^* = 8/3\pi z_0 r_0^2 \ell / N$; $c = r_0 / z_0$; $b = 8\pi\lambda z_0 \left|T_\infty\right| / N$.

Решим уравнение (9) относительно безразмерного времени X_0 с учетом подстановки $z = \sqrt{1-(cY)^2}$:

$$X_0 = \frac{1}{c^2} \int_0^{\sqrt{1-c^2}} \frac{z \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) dz}{\ln \frac{1+z}{1-z} - bz} . \qquad (10)$$

Учитывая, что величина b на практике мала ($b < 0{,}1$), а $z \in [0, 1]$, получим $\ln\left[(1+z)/(1-z)\right] \gg bz$. Тогда уравнение (10) можно приближенно записать в виде

$$X_0 \simeq \frac{1}{c^2} \int_0^{\sqrt{1-c^2}} z\,dz = \frac{1-c^2}{2c^2} . \qquad (11)$$

Оценка величины X_0 при следующих начальных условиях плавления каверны: $r_0 = 0{,}075$ м; $z_0 = 0{,}255$ м; $\lambda = 2{,}2$ Вт/(м·°С); $T_\infty = -57$ °С; $\ell = 303$ кДж/м^3; $N = 7$ кВт – показывает, что $t_0 \simeq 0{,}7$ ч. Таким образом,

при длительности процесса плавления каверны, намного превышающей продолжительность начального периода ее формирования, т.е. достижения формы сферы, интервалом времени от 0 до t_0 можно пренебречь.

Рассмотрим процесс плавления каверны на втором этапе (от сферы к сплюснутому эллипсоиду вращения), считая, что экспериментально можно получить зависимость $z_\Phi = f(r_\Phi)$.

Задачу (I) будем решать также, как и предыдущую, перейдя к соответствующим координатам сплюснутого эллипсоида вращения. Из аналогичной постановки задачи о распределении температуры в ледниковой породе следует:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(1+\sigma^2\right)\frac{\partial T}{\partial\sigma}=0;\ \sigma=\sigma_\Phi;\ T=0;\ \sigma\to\sigma_\infty;\ T\to T_\infty=const \qquad (I2)$$

и

$$T=T_\infty\frac{arctg\,\sigma-arctg\,\sigma_\Phi}{\pi/2-arctg\,\sigma_\Phi}. \qquad (I3)$$

С учетом $r_\Phi=a\sqrt{1+\sigma_\Phi^2}$, $z_\Phi=a\sigma_\Phi$ найдем

$$\Phi=\frac{4\pi\lambda\,|T_\infty|\,z_\Phi\sqrt{(r_\Phi/z_\Phi)^2-1}}{\pi/2-arcsin\,(z_\Phi/r_\Phi)}; \qquad (I4)$$

$$V=4/3\,\pi r_\Phi^2 z_\Phi. \qquad (I5)$$

Подставляя выражения (I3)-(I5) в уравнение (I), получим

$$4/3\,\pi\ell\frac{d}{dt}(r_\Phi^2 z_\Phi)=N-\frac{4\pi\lambda\,|T_\infty|\,z_\Phi\sqrt{(r_\Phi/z_\Phi)^2-1}}{\pi/2-arcsin\,(z_\Phi/r_\Phi)}; \qquad (I6)$$

$t=0;\ z_\Phi=r_\Phi;$

$t>0;\ z_\Phi=f(r_\Phi).$

Уравнение (I6) при известном значении зависимости $z_\Phi=f(r_\Phi)$ позволяет найти радиус каверны в любой момент времени, а также предельные размеры каверны при $t\to\infty$. Обозначив предельные размеры каверны - r_∞ и z_∞ и учитывая, что левая часть равенства (I6) при этом будет равна нулю, так как $d(r_\Phi^2 z_\Phi)/dt=0$, получим

$$h_\infty\,b'=\frac{\pi/2-arcsin\,h_\infty}{\sqrt{1-h_\infty^2}}, \qquad (I7)$$

где $h_\infty=z_\infty/r_\infty;\quad b'=4\pi\lambda\,|T_\infty|\,z_\Phi/N.$

Эффективность разработанной упрощенной математической модели процесса плавления каверны в ледниковых породах предполагается оценить при анализе результатов экспериментальных исследований, которые в настоящее время проводятся в лабораторных условиях и на реальных полевых объектах.