Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г.В.Плеханова,
1985, т. 106

УДК 62-505:66.028

ОПТИМАЛЬНОЕ СТОХАСТИЧЕСКОЕ УПРАВЛЕНИЕ СОСТАВОМ СМЕСИ

В.Г.ДЕЙЧ, В.А.ЕФРЕМОВ

Приготовление смеси нескольких материальных компонентов входит во многие технологические процессы. Задача минимизации максимальной погрешности относительной доли компонентов, возникающей из-за ошибок дозатора, рассматривалась в работе [I]. В настоящей работе рассматривается получение смеси с заданным значением одной из составляющих, входящей в каждый из дозируемых компонентов. Примером такой задачи является регулирование влажности шамотных масс в производстве огнеупоров.

Пусть массы $M_1, M_2, \ldots, M_N$ компонентов, подаваемых в смеситель соответствующими дозаторами, фиксированы, и x_k – процентное содержание (по массе) контролируемой составляющей в k-м компоненте, $k = 1, 2, \ldots, N$. Управляющим параметром процесса является масса u компонента с фиксированным содержанием x_0 этой составляющей. Содержание контролируемой составляющей в смеси будет, очевидно,

$$c = c(u) = \Big(\sum_{k=1}^{N} M_k + u\Big)^{-1}\Big(\sum_{k=1}^{N} M_k x_k + u x_0\Big). \qquad (1)$$

Выбор управления u осуществляется таким образом, чтобы обеспечить равенство $c = c_0$, где c_0 – заданная величина. Легко видеть, что эта цель достигается при

$$u = (x_0 - c_0)^{-1}\sum M_k(c_0 - x_k). \qquad (2)$$

Обычно вместо x_k приходится использовать результаты их измерения y_k, неизбежно содержащие погрешность. Управление

$$u = (x_0 - c_0)^{-1}\sum_{k=1}^{N} M_k(c_0 - y_k), \qquad (3)$$

получающееся при подстановке в формулу (2) y_k вместо x_k, будем называть детерминированным. Это управление приводит к отклонениям $c - c_0$ порядка $(\sum M_k + u)^{-1}\sum M_k\sigma_k$, где σ_k – погрешности измерений. Предложен алгоритм оптимального стохастического управления, который позволяет существенно уменьшить это отклонение, если имеется достаточно сильная корреляция величин x_k в последовательных замесах.

Перейдем к точной постановке задачи. Пусть t – номер замеса. Величины $x_k(t)$ будем считать случайными, независимыми при разных $k = 1, 2, \ldots, N$, но коррелированными для различных t. Результаты измерений $y_k(t)$ представим в виде суммы $x_k(t)+\sigma_k e_k(t)$, где $e_k(t)$ – неза-

висимые белые шумы единичной интенсивности; σ_k – среднеквадратичная погрешность измерения величины x_k.

Обозначим через Y_t информационный вектор [4], составленный из результатов измерений $y_k(s)$, k = I, 2, ..., m; $s \le t$, доступных к моменту времени t. Оптимальным управлением $u(t)$ в момент времени t (т.е. для замеса с номером t) назовем такую функцию $u = u(Y_t)$, для которой математическое ожидание

$$E\left(c(u) - c_0\right)^2 \to \min. \qquad (4)$$

Известно [4], что выражение (3) эквивалентно условию

$$\Phi(u) \equiv E\left\{\left(c(u) - c_0\right)^2 \middle| Y_t\right\} \to \min, \qquad (5)$$

где $E\left\{\cdot \middle| Y_t\right\}$ – условное математическое ожидание при известном Y_t.

Выражение (4) можно преобразовать к виду

$$E\left\{\left(c(u) - c_0\right)^2 \middle| Y_t\right\} = \left[E\left\{c(u) - c_0 \middle| Y_t\right\}\right]^2 + D\left\{c(u) \middle| Y_t\right\}, \qquad (6)$$

где $D\left\{\cdot \middle| Y_t\right\}$ – условная дисперсия.

Обозначим $E\left\{x_k(t) \middle| Y_t\right\}$ через $\hat{x}_k(t)$, $D\left\{x_k(t) \middle| Y_t\right\}$ через $\hat{\sigma}_k^2(t)$. Величины $\hat{x}_k(t)$ являются оптимальными в смысле среднеквадратичного отклонения оценками $x_k(t)$ по результатам наблюдений Y_t. В этих обозначениях задачу (4) можно записать явным образом:

$$\Phi(u) = \left(\sum M_k + u\right)^{-2}\left\{\left(\sum M_k(\hat{x}_k - c_0) + u(x_0 - c_0)\right)^2 + \sum M_k^2 \hat{\sigma}_k^2\right\} \to \min, \qquad (7)$$

где минимум берется по $u \ge 0$. Нетрудно показать, что решение (6) единственно:

$$u_0 = \frac{1}{(x_0 - c_0)}\left\{\sum M_k(c_0 - \hat{x}_k) + \frac{\sum M_k^2 \hat{\sigma}_k^2}{\sum M_k(x_0 - \hat{x}_k)}\right\}. \qquad (8)$$

Отметим, что при $\sigma_k = 0$, т.е. когда $\hat{x}_k = x_k = y_k$, решение (8) совпадает с выражением (3). Происхождение второго слагаемого в фигурных скобках в уравнении (7) можно объяснить тем, что в условиях неопределенности истинного значения x_k погрешность $c - c_0$ в среднем снижается, если выбирать u бо́льшим, чем в выражении (2), поскольку u входит в знаменатель (I).

Перейдем к построению оценок $\hat{x}_k(t)$, $\hat{\sigma}_k(t)$, входящих в алгоритм (8). Для этого необходимо сделать предположения о статистической природе временных рядов $x_k(t)$. Наиболее распространенным является предположение, что эти ряды представимы в виде модели авторегрессии – скользящего среднего (АРСС) [2]:

$$x_k(t) + a_{1k}x_k(t-1) + \ldots + a_{mk}(t - m_k) = v_k(t) + \sigma_{1k}u_k^{\sim}(t) + \ldots + b_{mk}u_k^{\sim}(t - m_k), \qquad (9)$$

где $u_k^{\sim}(t)$ – белый шум единичной интенсивности, $v_k(t)$ – детерминированная последовательность, определяющая дрейф среднего значения. Модель (9)

может быть каноническим образом [3] преобразована в модель в «пространстве состояний":

$$X_k(t)=\Phi_k X_k(t-1)+\Gamma_k v(t)+B_k w(t),\quad x_k(t)=H_k^T X_k(t), \qquad (10)$$

где B_k, Γ_k, H_k, X_k – векторы размерности m_k; Φ_k – $m_k \times m_k$ – матрица.

Уравнение измерений может быть записано в виде

$$y_k(t)=H_k^T X_k(t)+\sigma_k e_k(t),\quad k=1,2,\ldots,N.$$

Пусть

$$\hat{X}_k(t)=E\left\{\hat{X}_k(t)\middle|Y_t\right\},\quad P_k(t)=E\left\{\left(X_k(t)-\hat{X}_k(t)\right)\left(X_k(t)-\hat{X}_k(t)\right)\middle|Y_t\right\}.$$

Тогда, очевидно,

$$\hat{x}_k=H_k^T X_k(t),\quad \hat{\sigma}_k^2(t)=H_k^T P_k(t) H_k \qquad (11)$$

и, таким образом, необходимо построить $\hat{X}(t)$ и $P(t)$.

Если коэффициенты моделей (9) и (10) и величины σ_k известны, а шумы $w_k(t)$ и $e_k(t)$ – гауссовы, то $\hat{X}_k(t)$ и $P_k(t)$ можно построить с помощью рекуррентного алгоритма фильтрации Калмана. Мы не будет приводить здесь хорошо известные [3, 4] формулы для общего случая, а ограничимся рассмотрением численного примера, построенного по реальным данным для процесса регулирования влажности шамотных масс в производстве огнеупоров.

Пусть $N=2$ и процессы $x_1(t)$, $x_2(t)$ описываются моделями ARI:

$$x_k(t)=a_k x_k(t-1)+b_k w_k(t)+v_k(t), \qquad (12)$$

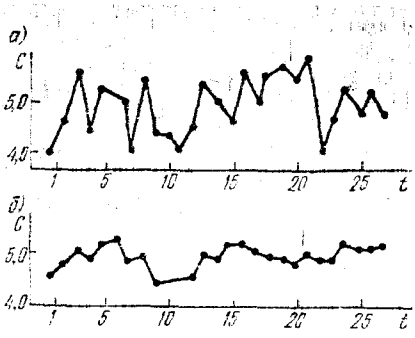
где $k=1,2$; $a_1=0{,}75$, $a_2=0{,}8$, $b_1=1{,}1$, $b_2=0{,}3$, $v_1(t)=3$, $v_2(t)=0{,}2$; $\sigma_1^2=3$, $\sigma_2^2=0{,}15$.

Алгоритм фильтрации Калмана в данном случае сводится к следующим рекуррентным вычислениям

$$\hat{x}_k(t)=a_k\hat{x}_k(t-1)+v_k+\hat{\sigma}_k^2(t)\sigma_k^{-2}\left(y_k(t)-a_k\hat{x}_k(t-1)-v_k\right);$$

$$\hat{\sigma}_k^2(t)=\left[\sigma_k^{-2}+\left(a_k^2\hat{\sigma}_k^2(t-1)+b_k^2\right)^{-1}\right]^{-1}. \qquad (13)$$

Таким образом, алгоритм оптимального управления состоит в вычислении при каждом $t=1, 2, \ldots$ оценок (13) и подстановке их в формулу (8). Работа алгоритма моделировалась на ЭВМ. Шумы $w_k(t)$, $e_k(t)$, $k=1,2$ вырабатывались независимо генератором случайных чисел с нормальным распределением $N(0,1)$. Остальные параметры задачи были приняты: $M_1=100$, $M_2=400$, $x_0=70$, $c_0=5$. Результаты моделирования показаны на рисунке, где $c(t)$ и $c_0(t)$ – влажность смеси при использовании детерминированного (3) и оптимального стохастического управления (8) соответственно. Полученные результаты демонстрируют существенное (в среднем более чем в два раза) снижение отклонения выходной влажности от заданной.



Выходная величина при „детерминированном" (а) и оптимальном стохастическом (б) управлениях

Если указанная выше информация о статистических свойствах временных рядов $x_k(t)$ отсутствует, можно попытаться воспользоваться адаптивным алгоритмом фильтрации, в котором коэффициенты модели (I0) и состояние $\hat{x}$ оцениваются одновременно в реальном времени. Для простейшего случая (II) можно предложить следующую процедуру оперативной идентификации. Заметим [2], что если временной ряд $x_k(t)$ описывается моделью API, то соответствующий ряд наблюдений $y_k(t)$ описывается моделью APCCI:

$$y_k(t) - a_k y_k(t-1) = \varepsilon_k(t) - \theta_k \varepsilon_k(t-1) + v_k, \qquad (I4)$$

где $\varepsilon_k(t)$ - белый шум интенсивности γ_k. При этом имеется следующая связь параметров:

$$\gamma_k^2 = \frac{a_k \sigma_k^2}{\theta_k},$$

$$b_k^2 = (1+\theta_k^2)\gamma - \sigma_k^2(1+a_k^2). \qquad (I5)$$

Величины σ_k^2 (погрешности измерений) можно считать известными, величины a_k, θ_k и v_k могут быть найдены с помощью текущих оценок среднего $\bar{y}_k$, дисперсии $\bar{\sigma}_{yk}^2$ и первых двух членов автокорреляции ρ_1 и ρ_2 временного ряда $y_k(t)$, как это показано в работе [2]. Определяя после этого величину v_k^2 по формуле (I5), мы можем затем использовать найденные значения a_k, b_k для построения оценок $\hat{x}_k$, $\hat{\sigma}_k$ по выражению (I3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Барский Р.Г., Ермаков В.В. Оптимизация процесса дозирования многокомпонентной смеси при минимаксном критерии качества. - Автоматика и телемеханика, 1982, № 4.

2. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. М., Мир, 1974.

3. Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. М., Наука, 1966.

4. Острем К. Введение в стохастическую теорию управления. М., Мир, 1973.