Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г.В.Плеханова,
1985, т. 106

УДК 66.047.5-506

КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ СУШКИ КОНЦЕНТРАТА В БАРАБАННОЙ СУШИЛКЕ

В.Г.ДЕЙЧ, В.В.СТАЛЬСКИЙ,
С.В.СТОРОЖЕНКО

Расход энергии на сушку концентратов на обогатительных фабриках составляет не менее 10-15 % всех энергетических затрат горных предприятий, поэтому очень важным является оптимальное управление этим процессом для минимизации расхода энергии.

Ранее авторами была получена математическая модель процесса сушки и дан алгоритм оптимального решения задачи по критерию минимизации расхода энергии.[x] Однако алгоритм отличался сложностью, громоздкостью и требовал прогнозирования возмущений на входе аппарата.

В настоящей статье дана упрощенная задача, решение которой не требует прогнозирования состояния возмущений, и, следовательно, она может быть реализована независимо от автоматизации процессов, предшествующих сушке по схеме цепи аппаратов. Предложенное решение естественно считать оптимальным. Будем исходить из соображения, что формулировка задачи должна удовлетворять с точки зрения решения следующим принципам: 1) последовательный выбор оптимальных управлений на основе информации об управлении и возмущениях на предыдущих шагах и, возможно, экстраполяции основных возмущений на небольшое время; 2) учет обратной связи.

Математическая модель процесса сушки в барабанной сушилке может быть представлена уравнением[x]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_м \frac{\partial u}{\partial l} = -f(t,l)\varphi(u), \qquad (1)$$

где

$$f(t,l) = \frac{\alpha}{r}\left[T_a(t) - T_м\right] \exp\left[\frac{-k}{v v_м}\int_0^l g_м\left(t - \frac{l}{v_м}\right)dl\right]; \qquad (2)$$

при заданных начальных и граничных условиях

$$u(0,l) = u(l); \quad u(t,0) = u(t). \qquad (3)$$

[x] В.Г.Дейч, В.В.Стальский. Оптимальное управление процессом сушки во вращающейся барабанной сушилке. – Теоретические основы химической технологии, 1975, т. 9, № 1.

Функционал имеет вид

$$\mathcal{J} = \int_0^T (c_1 v T_a + c_2 v^3) dt \to \min \qquad (4)$$

и ограничение

$$u(L, t) = u^* = \text{const}, \qquad (5)$$

где c_1, c_2 - коэффициенты пропорциональности, соответствующие стоимости нагрева единицы веса газа на один градус и стоимости создания единицы тяги; l - текущая координата вдоль оси аппарата; L - длина аппарата; r - теплота парообразования воды; T_a, $T_м$ - температура сушильного агента и материала, u - влагосодержание материала; v, $v_м$ - скорость движения сушильного агента и материала; α - массовый коэффициент теплообмена; $\varphi(u)$ - множитель, учитывающий зависимость скорости сушки от влажности материалов, т.е. кривая сушки[x]; $g_м$ - расход сухого материала на входе.

Решение задачи начнем с преобразования уравнения модели. Основное уравнение модели (I) - квазилинейное с частными производными первого порядка - описывает влажность материала как функцию координаты l и времени t: $u = u(l, t)$.

Нелинейность уравнения (I) связана с наличием функции $\varphi(u)$, которая описывает кривую сушки в его правой части. Нетрудно превратить уравнение (I) в линейное с помощью замены неизвестной функции u на функцию w, такую, что

$$dw = du/\varphi(u). \qquad (6)$$

Соотношение (6) определяет функцию w с точностью до постоянной, которую удобно фиксировать следующим образом. Пусть $u_{зад}$ и $u_{кр}$ - соответственно заданная влажность и критическая влажность, являющаяся граничной для первого периода сушки[x], т.е. при $u > u_{кр}$ $\varphi(u) = 1$.

Положим

$$w(u) = \int_{u_{зад}}^{u} du/\varphi(u); \qquad (7)$$

при этом краевое условие $u(t,0) = u_0(t)$ на входе барабана переходит в условие

$$w(t,0) = u_0(t) + c - u_{кр} \equiv w_0(t), \qquad (8)$$

где постоянная $c = \int_{u_{зад}}^{u_{кр}} du/\varphi(u)$. Требование равенства выходной влажности заданному значению $u_{зад}$, которое и должна обеспечить система управления, эквивалентно условию

$$w(t, L) = 0. \qquad (9)$$

---

[x] А.В.Лыков. Теория сушки. М., Энергия, 1968.

Наконец, уравнение (I) для $u(t,l)$ эквивалентно следующему линейному уравнению для $w(t,l)$:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + v_м \frac{\partial w}{\partial l} = -f\left(T_a(t),\, v(t);\, t,\, l\right), \qquad (10)$$

где обозначим для краткости

$$f(T_a, v, t, l) = \frac{\alpha_v}{r}\left(T_a - T_м\right)\exp\left[\left(\frac{-k}{v v_м}\right)\int_0^l g\left(t - \frac{\lambda}{v_м}\right)d\lambda\right]. \qquad (11)$$

Уравнение (10) с краевым условием (8) можно решить в явном виде для того, чтобы получить выражение для величины $w(t,L)$ в виде функционала от управлений $T_a(\tau)$, $v(\tau)$ при $\tau \le t$. Решение, которое приведено ниже, пригодно лишь при $t > \sigma = L/v_м$ (время прохождения материала через барабан), а при $t < \sigma$ следует учесть еще и начальное распределение влажности (или функции w) по длине барабана.

Итак, пусть $t > \sigma$. Тогда характеристика уравнения (10), проходящая через точку (t, L) плоскости (t, l), описывается уравнениями

$$\begin{aligned} t(\tau) &= t - \sigma + \tau, \\ l(\tau) &= v_м \tau, \\ 0 &\le \tau \le \sigma. \end{aligned} \qquad (12)$$

Производя в уравнении (10) замену переменных по формулам (12), получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dw}{d\tau} = -\frac{1}{2} f\left[T(t-\sigma+\tau),\; v(t-\sigma+\tau);\; t-\sigma+\tau, v_м\tau\right], \qquad (13)$$

интегрируя которое с учетом начального условия

$$w\big|_{\tau=0} = w_0(t-\sigma),$$

получим, что

$$w(t,L) = w\big|_{\tau=\sigma} = w_0(t-\sigma) - \frac{1}{2}\int_0^\sigma f\left[T(t-\sigma+\tau),\, v(t-\sigma+\tau);\, t-\sigma+\tau, v_м\tau\right]d\tau. \qquad (14)$$

Формула (14) и является искомым представлением выходной величины как функционала от управлений.

Рассмотрим некоторый временной интервал (θ', θ'') работы сушильного барабана. Целью решения задачи оптимального управления на этом интервале является разработка алгоритма выбора управлений $T(t)$, $v(t)$, $\theta' \le t \le \theta''$, обеспечивающих стабильную влажность, равную заданной на выходе барабана, и требующих минимально возможных затрат на управление. Соответствующий функционал (4) на интервале (θ', θ'') можно представить в виде

$$J(T_a, v, \theta', \theta'') = \int_{\theta'}^{\theta''}\left[c_1 T_a(t) v(t) + c_2 v^3(t)\right]dt. \qquad (15)$$

Рассмотрим для простоты дискретный вариант условия (9), т.е. будем требовать его выполнения не для всех $t \in (\theta', \theta'')$, а лишь для тех, при которых $t = \theta_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, где $\theta_k = \theta' + k\Delta t$, $\Delta t = (\theta'' - \theta')/n$ и число n достаточно велико. Тогда с учетом выражения (14) условие (9) принимает вид

$$w_0(\theta_k - \sigma) - \frac{1}{2}\int_0^{\sigma} f\left[T_a(\theta_k - \sigma + \tau),\ v(\theta_k - \sigma + \tau);\ \theta_k - \sigma + \tau,\ v_м\tau\right]d\tau = 0. \quad (16)$$

Пусть оптимальные управления $T_a(t)$, $v(t)$ уже найдены для моментов времени $t \le \theta_i$. Требуется определить управления $T_a(t)$, $v(t)$ при $t \in (\theta_i, \theta_{i+1})$ так, чтобы функция цели

$$J = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \left[c_1 v(t) T_a(t) + c_2 v^3(t)\right] dt \to min \quad (17)$$

при условии, что

$$w_0(\theta_{i+1} - \sigma) - \frac{1}{2}\int_0^{\sigma} f\left[T_a(\theta_{i+1} - \sigma + \tau),\ v(\theta_{i+1} - \sigma + \tau);\ \theta_{i+1} - \sigma + \tau, v_м\tau\right]d\tau = 0. \quad (18)$$

Легко видеть, что ни в функционал (17), ни в условие (18) не входят значения управлений и возмущений в моменты времени позже чем θ_{i+1}. Поэтому для нахождения $T_a(t)$, $v(t)$ при $t \in (\theta_i, \theta_{i+1})$ понадобится лишь экстраполировать значение $g(t)$ на этот интервал. При этом, если $\Delta t = \theta_{i+1} - \theta_i$ достаточно мало, эту экстраполяцию можно осуществить по последнему значению, т.е. полагать $g(t) = g(\theta_i)$ при $\theta_i \le t \le \theta_{i+1}$. Такой подход соответствует требованию (1), выдвинутому при постановке задачи.

Покажем далее, что условие (17) можно переформулировать с тем, чтобы ввести в систему обратную связь. Для этого заметим, что в соответствии с условием (18) выходное значение w при $t = \theta_i$ составляет

$$w(\theta_i) = w(\theta_i, L) = w_0(\theta_i - \sigma) - \frac{1}{2}\int_0^{\sigma} f\left[T_a(\theta_i - \sigma + \tau),\ v(\theta_i - \sigma + \tau);\ \theta_i - \sigma + \tau,\ v_м\tau\right]d\tau. \quad (19)$$

Вычитая (19) из (18), запишем получающееся выражение:

$$\Delta w_0(i) - \frac{1}{2}\int_0^{\sigma} \left[\Delta f(T_{a(i+1)},\ v_{i+1};\ \tau)\right]d\tau = -w(\theta_i), \quad (20)$$

где

$$\Delta w_0(i) = w_0(\theta_{i+1} - \sigma) - w_0(\theta_i - \sigma);$$

$$\Delta f(T_{a(i+1)},\ v_{i+1};\ \tau) = f\left[T_a(\theta_{i+1} - \sigma + \tau),\ v(\theta_{i+1} - \sigma + \tau);\ \theta_{i+1} - \sigma + \tau,\ v_м\tau\right] - f\left[T_a(\theta_i - \sigma + \tau),\ v(\theta_i - \sigma + \tau);\ \theta_i - \sigma + \tau, v_м\tau\right]. \quad (21)$$

Введенные обозначения (21) подчеркивают, что левая часть выражения (20) является функционалом от пары $\{T_{a(i+1)},\ v_{i+1}\}$, где $T_{a(i+1)} = T_a(t)$, $v_{i+1} = v(t)$ при $t \in (\theta_i, \theta_{i+1})$.

Смысл условия (20) в том, что ограничения, накладываемые на $\{T_a, v\}$ на шаге управления $i+1$ зависят от выходной влажности $w(\theta_i)$ в конце предыдущего шага управления. Следовательно, полученная таким образом система управления включает в себя обратную связь.

Сделаем теперь попытку решить поставленную задачу в линейном приближении и составить алгоритм управления, близкого к оптимальному. Для решения задачи прежде всего подвергнем условие (20) дополнительным преобразованиям. Произведем в интеграле (20) замену переменной интегрирования $\theta_{i+1} - \sigma + \tau = t$ и с учетом обозначений (21) перепишем это соотношение в виде

$$\frac{1}{2}\int_{\theta_{(i+1)}-\sigma}^{\theta_{i+1}} \Big\{ f\Big[T_a(t),\ v(t);\ t,\ (t-\theta_{i+1}+\sigma)v_м\Big] - f\Big[T_a(t-\Delta t),\ v(t-\Delta t);\ t-\Delta t,\ (t-\theta_{i+1}+\sigma)v_м\Big]\Big\} dt = \Delta w_0(i) + w(\theta_i). \qquad (22)$$

Интеграл в левой части выражения (22) можно разбить на две части: от $\theta_{i+1}-\sigma$ до θ_i и от θ_i до θ_{i+1}. Заметим теперь, что величина

$$F_i \equiv \frac{1}{2}\int_{\theta_{i+1}-\sigma}^{\theta_{i+1}} \Big\{ f\Big[T_a(t),\ v(t);\ t,\ (t-\theta_{i+1}+\sigma)v_м\Big] - f\Big[T_a(t-\Delta t),\ v(t-\Delta t);\ t-\Delta t,\ (t-\theta_{i+1}+\sigma)v_м\Big]\Big\} dt \qquad (23)$$

определяется лишь информацией, уже имеющейся к моменту θ_i.

Равенство (22) переходит теперь в следующее

$$\frac{1}{2}\int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \Big\{ f\Big[T_{i+1}, v_{i+1};\ t, (t-\theta_{i+1}+\sigma)v_м\Big] - f\Big[T_i, v_i;\ t-\Delta t, (t-\theta_{i+1}+\sigma)v_м\Big]\Big\} dt = \Delta w_0(i) + w(\theta_i) - F_i. \qquad (24)$$

Введем для решения задачи следующие упрощающие предположения:

1) оптимальное управление ищем в классе функций $T_a(t)$, $v(t)$, постоянных на каждом из интервалов (θ_k, θ_{k+1});

2) величина Δt и приращения $\Delta T_k = T_{k+1} - T_k$ и $\Delta v_k = v_{k+1} - v_k$ таковы, что приращение

$$f\Big[T_{a,i+1}, v_{i+1};\ t, (t-\theta_{i+1}+\sigma)v_м\Big] - f\Big[T_{ai}, v_i;\ t-\Delta t, (t-\theta_{i+1}+\sigma)v_м\Big]$$

можно с достаточной точностью заменить на

$$\frac{\partial f}{\partial T_a}\Delta T_i + \frac{\partial f}{\partial v}\Delta v_i + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t, \qquad (25)$$

где частные производные вычисляются при значениях аргументов

$$(T_a, v;\ \tau, l) = \Big[T_{ai} v_i;\ t-\Delta t,\ (t-\theta_{i+1}+\sigma)v_м\Big]. \qquad (26)$$

3) функцию $(c_1 v_{i+1} T_{a\,i+1} + c_2 v_{i+1}^3)$ также можно с достаточной степенью точности рассматривать в линейном приближении:

$$c_1 v_{i+1} T_{ai+1} + c_2 v_{i+1}^3 \cong c_1 v_i T_{ai} + c_2 v_i^3 + c_1 v_i \Delta T_{ai} + (c_1 T_i + 3 c_2 v_i^2)\Delta v_i . \qquad (27)$$

В предположениях I-3 поставленная задача сведена к решению на каждом шаге простой линейной задачи - найти значения переменных ΔT_i, Δv_i, доставляющих минимум линейной форме

$$\Phi_i \equiv (a_i \Delta T_{ai} + b_i \Delta v_i) \longrightarrow min \qquad (28)$$

при условиях

$$P_i \Delta T_{ai} + q_i \Delta v_i = Z_i . \qquad (29)$$

При этом введены следующие обозначения:

$$a_i = c_i v_i ; \quad b_i = c_1 T_i + 3 c_2 v_i^2 ; \quad P_i = \frac{\partial f}{\partial T_a}\Big|_i ; \quad q_i = \frac{\partial f}{\partial v}\Big|_i ;$$

$$Z_i = 2\left(\Delta w_0(i) + w(\theta_i) - F_i - \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_i \Delta t\right).$$

Знак $\Big|_i$ при частных производных функции f означает, что они вычисляются при значениях аргументов (26).

Для определения оптимальных поправок к управляющим воздействиям вычислим вначале максимально и минимально возможные их величины

$$\begin{aligned} \Delta v_{imax} &= v_{\overline{M}} - v_i ; \quad & \Delta T_{imax} &= T_{\overline{M}} - T_i ; \\ \Delta v_{imin} &= v_{\underline{m}} - v_i ; \quad & \Delta T_{imin} &= T_{\underline{m}} - T_i , \end{aligned} \qquad (30)$$

где $v_{\overline{M}}$, $v_{\underline{m}}$, $T_{\overline{M}}$, $T_{\underline{m}}$, - технологические ограничения, максимальное и минимальное значения скорости и температуры сушильного агента.

Теперь по результатам (30) найдем два значения $\Delta T_{i\pm}$ и два значения $v_{i\pm}$, удовлетворяющие уравнению прямой (28),

$$\Delta T_{i+} = (Z_i - q_i \Delta v_{imin})/P_i ; \quad \Delta T_{i-} = (Z_i - q_i \Delta v_{imax})/P_i ;$$

$$\Delta v_{i+} = (Z_i - P_i \Delta T_{imin})/q_i ; \quad \Delta v_{i-} = (Z_i - P_i \Delta T_{imax})/q_i . \qquad (31)$$

Полученные по формулам (31) поправки следует сравнить с ограничениями, т.е. величинами (30), и выбрать те две пары координат, которые удовлетворяют ограничениям. Это могут быть две пары точек из четырех следующих пар: $\{\Delta T_{i+}, \Delta v_{imin}\}$, $\{\Delta T_{i-}, \Delta v_{imax}\}$, $\{\Delta v_{i+}, \Delta T_{imin}\}$, $\{\Delta v_{i-}, \Delta T_{imax}\}$.

Найденные таким способом координаты двух точек необходимо подставить в формулу (28) в качестве текущих значений ΔT_i, Δv_i; оптимальным управлением является та пара величин ΔT_{i0}, Δv_{i0}, которая обеспечит наименьшее из значений Φ_{il}, $l = 1,2$.