Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г. В. Плеханова,
1986, т. 108

УДК 621.81

ОСНОВЫ РАСЧЕТА ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ ВЕРОЯТНОСТНЫМ МЕТОДОМ

Е. С. КУЗНЕЦОВ

Характеристика работоспособности элементов машин должна учитывать ресурс работоспособности при различных режимах работы детали, материала, устройства или соединения. В качестве единой характеристики работоспособности целесообразно принять кривую выработки ресурса при различных режимах работы. Такая кривая аналогична кривой выносливости, характеризующей совокупность режимов, при которых происходит выработка ресурса. Ресурс детали, работающей на выносливость, может быть выработан как при больших напряжениях и малом числе циклов, так и при малых напряжениях, но относительно большом числе циклов. Один и тот же износ детали происходит при значительных удельных давлениях и малом перемещении, а также при малых удельных давлениях и большом пути трения.

При формировании кривых выносливости на оси ординат откладываются значения нагрузки (напряжения, удельные давления и т.п.), а по оси абсцисс – параметр, в который входит скорость процесса и время. Для выносливости (усталости) материала учитывается число циклов, которое зависит от частоты нагружения (характеристики скорости процесса) и времени работы.

Кривые выносливости описываются выражениями типа

$$C = \sigma^m N. \qquad (I)$$

Если величину C принять за физический ресурс детали, то его размерность будет различной для различных деталей, так как m зависит не только от материала, но и от напряженного состояния детали.

При проектном расчете в качестве исходных данных принимаются вероятностные характеристики нагрузочных и скоростных режимов и срок службы. Определяется потребный физический ресурс C и размеры детали. В качестве исходных данных при проверочном расчете принимается физический ресурс C, а также вероятностные характеристики нагрузочных и скоростных режимов, после чего из уравнения (I) определяется время работы без перерывов (физический срок службы).

При расчетах зубчатых, фрикционных и ременных передач, а также подшипников качения, валов, пружин и других деталей используются соответствующие опытные кривые выносливости. Кривая выносливости представляет зависимость между переменным напряжением в детали и числом циклов, в которое входит параметр, характеризующий скоростной режим и время работы детали. Строятся кривые в координатах σ–N или σ–$\lg N$. Любая точка в

плоскости σ-N ниже кривой выносливости характеризуется некоторыми выработанными и остаточным ресурсами работоспособности детали. Любая точка на самой кривой соответствует полной выработке ресурса работоспособности детали. Точка $А$ на кривой выносливости (рис.I) соответствует такому положению, когда ресурс работоспособности детали вырабатывается при малом числе циклов при действии высоких напряжений. Точка $Б$ соответствует положению, когда ресурс работоспособности детали вырабатывается при большом числе циклов, так как действующие напряжения меньше, чем в первом случае. В точке $В$ доля выработанного ресурса работоспособности (или доля повреждаемости) $P_В = n_ц / N_ц$ ($n_ц$ – число отработанных циклов; $N_ц$ – число возможных циклов при данном напряжении). Величина $n_ц/N_ц$ называется цикловым отношением. Доля остаточного ресурса работоспособности может быть определена по соотношению $P_{ост} = 1 - P_В$. В смешанных условиях эксплуатации точку $В$ можно считать случайной точкой на плоскости σ-N.

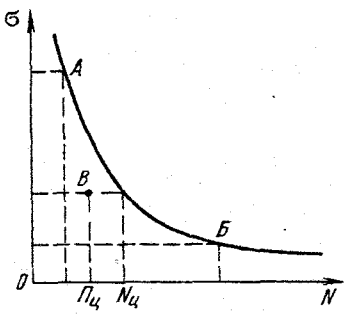


Рис.1. Кривая выносливости

Режимы нагружения, вызывающие в сечениях деталей машины напряжения, переменные во времени, являются наиболее распространенными эксплуатационными режимами работы деталей машин. Например, напряжения изгиба, возникающие в поперечных сечениях вала от усилий в зацеплении зубчатых колес, периодически изменяются по величине и знаку вследствие вращения вала. Напряжения в основании зуба зубчатого колеса меняются по величине по мере входа в зацепление и выхода из него. Переменность напряжений для многих деталей обусловлена эксплуатационными режимами самих машин.

Статистический анализ случаев поломок деталей машин и сооружений показывает, что приблизительно 80 % этих разрушений носит усталостный характер.

Наряду с формулой (I) для кривых выносливости используется соотношение

$$C = (\sigma_i - \sigma_{-1})^m N. \qquad (2)$$

Выражение (2) не применяется при расчете напряжений, меньших σ_{-1}. Формулы (I) и (2) используются для аппроксимации левой части кривой, т.е. до точки, соответствующей значениям σ_{-1}, N_0. Для учета всего диапазона действующих напряжений прибегают к более точной аппроксимации кривых усталости (проектный расчет):

$$\sigma_i^m N_i = \sigma_{-1}^m N_0 \left[0{,}9 + 0{,}1 \left(\frac{N_i}{N_0} \right)^{n_1} \right], \qquad (3)$$

а для определения срока службы пользуются формулой

$$\sigma_i^m N_i = \sigma_{-1}^m N_0 \left[0,9 + 0,1 \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_i} \right)^{n_2} \right] . \qquad (4)$$

В первом приближении $n_1 = 0,9$; $n_2 \cong 20$ [I].

Предлагаемая кривая по формуле (3) занимает промежуточное положение между кривыми по формулам (I) и (2) и полностью повторяет их в левой части, в правой части кривой учитывается влияние напряжений от 0 до σ_{-1} на срок службы деталей.

С помощью уравнений (3) и (4) можно решать прямые и обратные задачи. Прямая задача – определение размеров детали по заданному сроку службы, обратная – определение срока службы детали в зависимости от заданных условий эксплуатации и определение остаточного ресурса детали, проработавшей в заданных условиях определенное время.

Основой успешного расчета при случайных нагрузочных и скоростных режимах работы детали в процессе эксплуатации является учет всех уровней напряжений (от 0 до σ_{-1} и от σ_{-1} до σ_T). Для этого необходимо использовать уравнение кривой усталости (3), в котором $\sigma_i = \sigma_{Hi}$, $\sigma_{-1} = \sigma_{1H}$, а также известные из курса деталей машин детерминированные формулы для контактных напряжений на поверхности зубьев и для числа циклов [3]:

$$\sigma_{Hi} = \sqrt{\frac{K_a^3 (u+1)^3 T_1 K_{H\beta}}{u \psi_{ba} a_W^3}} = Z^{1/2} T_1^{1/2} ; \qquad (5)$$
$$N_{ц\,i} = 60 n L_h ,$$

где Z – обобщенный конструктивный параметр,

$$Z = K_a^3 (u+1)^3 K_{H\beta} / (u \psi_{ba} a_W^3) .$$

Обозначим

$$C = \sigma_{-1H}^m N_0 = \sigma_{-1H}^6 \cdot 10^7 ; \qquad (6)$$

где σ_{Hi} – уровень контактных напряжений; $N_{ц\,i}$ – число циклов нагружения зуба, соответствующее на кривой выносливости напряжению σ_{Hi} ; m, n_1 – показатели степени для процесса усталостного выкрашивания зуба, $m = 6$, $n_1 = 0,9$; σ_{1H} – характеристика выносливости материала при контактных напряжениях, соответствующая базовому числу циклов $N_0 = 10^7$; u – передаточное число; $\psi_{ba} = b_W / a_W$ – отношение ширины колеса b_W к межосевому расстоянию передачи a_W ; n – число оборотов шестерни (случайная величина); T_1 – крутящий момент на шестерне (случайная величина); L_h – срок службы передачи (задается с характеристикой рассеивания); $K_{H\beta}$ – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения нагрузки по ширине зубчатого венца при расчете на контактную выносливость.

Обе части формулы (5) умножим на $N_{ц\,i}$, тогда

$$\sigma_{-1H}^6 \cdot 10^7 \left[0,9 + 0,1 \left(N_{ц\,i} / N_0 \right)^{0,9} \right] = Z^3 T_1^3 N_{ц\,i} , \qquad (7)$$

отсюда

$$Z = \left[\frac{K_1 \sigma_{-1H}^{6}}{n L_h T_1^{3}} + \frac{K_2 \sigma_{-1H}^{6}}{n^{0,1} L_h^{0,1} T_1^{3}} \right]^{1/3}, \qquad (8)$$

где $K_1 = \frac{0,9 \cdot 10^7}{60} = 1,5 \cdot 10^5$; $K_2 = \frac{0,1 \cdot 10^7 \cdot 60^{0,9}}{10^{6,3} \cdot 60} \simeq 0,33$.

Будем считать величины n, L_h, T_1, σ_{-1H} случайными, характеризующими совокупность нагрузочных и скоростных режимов работы передачи, срок службы передачи, выносливость поверхности зуба с некоторой величиной рассеивания.

Пользуясь методом преобразования числовых характеристик [1,2], найдем математическое ожидание и дисперсию обобщенного конструктивного параметра Z :

$$m_Z = \left(\frac{K_1 m_{\sigma_{-1H}}^{6}}{m_n m_{L_h} m_T} + \frac{K_2 m_{\sigma_{-1H}}^{6}}{m_n^{0,1} m_{L_h}^{0,1} m_{T_1}^{3}} \right)^{1/3} ; \qquad (9)$$

$$D_Z = D_T \left(\frac{\partial Z}{\partial T} \right)_m^2 + D_n \left(\frac{\partial Z}{\partial n} \right)_m^2 + D_{L_h} \left(\frac{\partial Z}{\partial L_h} \right)_m^2 + D_{\sigma_{-1H}} \left(\frac{\partial Z}{\partial \sigma_{-1H}} \right)_m^2 ; \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} D_Z = {} & m_{\sigma_{-1H}}^{12} D_T A_0^2 \left(-3K_1 m_n^{-1} m_{L_h}^{-1} m_T^{4} - 3K_2 m_n^{-0,1} m_{L_h}^{-0,1} m_T^{4} \right)^2 + \\ & + m_{\sigma_{-1H}}^{12} D_n A_0^2 \left(-K_1 m_n^{-2} m_{L_h}^{-1} m_T^{-3} - 0,1K_2 m_n^{-1,1} m_{L_h}^{-0,1} m_T^{-3} \right)^2 + \\ & + m_{\sigma_{-1H}}^{12} D_{L_h} A_0^2 \left(-K_1 m_n^{-1} m_{L_h}^{-2} m_T^{-3} - 0,1K_2 m_n^{-0,1} m_{L_h}^{-1,1} m_T^{-3} \right)^2 + \\ & + D_{\sigma_{-1H}} A_0^2 \left(6K_1 m_n^{-1} m_{L_h}^{-1} m_T^{-3} m_{\sigma_{-1H}}^{5} + 6K_2 m_n^{-0,1} m_{L_h}^{-0,1} m_T^{-3} m_{\sigma_{-1H}}^{5} \right)^2 , \end{aligned} \qquad (11)$$

где $A_0 = 1/3 \left(K_1 m_n^{-1} m_{L_h}^{-1} m_T^{-3} m_{\sigma_{-1H}}^{6} + K_2 m_n^{-0,1} m_{L_h}^{-0,1} m_T^{-3} m_{\sigma_{-1H}}^{6} \right)^{-2/3}$.

Расчетное значение конструктивного параметра с учетом его вероятностного характера

$$Z_{расч} = m_Z + 2\sigma_Z , \quad \sigma_Z = \sqrt{D_Z} .$$

Затем определяется межосевое расстояние и другие размеры передачи:

$$a_w = K_a \left(u + 1 \right) \sqrt[3]{\frac{K_{H\beta}}{u \Psi_{ba} Z_{расч}}} . \qquad (12)$$

Выполним вероятностный проектный расчет закрытой цилиндрической зубчатой передачи горного комбайна КШ-1КГ, если известно, что минимальный срок службы комбайна должен быть не менее 3000 ч, а максимальный 4500 ч.

Общее передаточное число редуктора режущей части (рис.2) до раздаточного вала IУ i_0 = 3,23·3,15·2,69 = 27,37. Тогда частота вращения этого вала $n_{IV} = n_I / i_0$ = 1470/27,37 = 53,65 мин$^{-1}$ (где n_I – частота вращения вала двигателя и вала I).

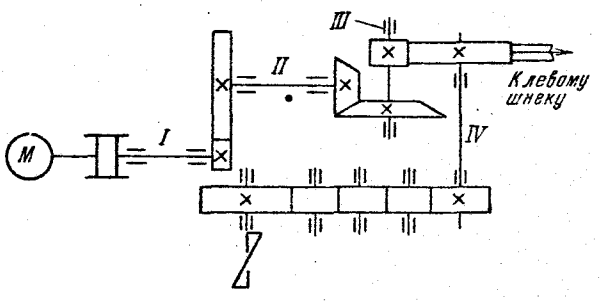


Рис.2. Кинематическая схема режущей части комбайна КШ-1КГ

Так как длительная мощность двигателя равна 60 кВт, а часовая – 105 кВт, то минимальный и максимальный вращающие моменты равны

$$T_{I\,min} = \frac{10^3 N_{1min}}{\omega_1} = \frac{10^3 \cdot 60}{153} = 390 \text{ Н·м};$$

$$T_{I\,max} = \frac{10^3 \cdot 105}{153} = 690 \text{ Н·м},$$

где ω_1 – угловая скорость вала двигателя, $\omega_1 = \pi n_1 / 30 = (\pi \cdot 1470)/30 = 153$ с$^{-1}$.

Минимальный и максимальный моменты на валу IУ:

$$T'_{IV\,min} = T_{I\,min} i_0 \eta = 390 \cdot 27{,}37 \cdot 0{,}97^3 = 9700 \text{ Н·м};$$

$$T'_{IV\,max} = T_{I\,max} i_0 \eta = 690 \cdot 27{,}37 \cdot 0{,}97^3 = 17200 \text{ Н·м}.$$

На валу IУ поток мощности раздваивается, следовательно, $T_{IV\,min}$ = 4850 Н·м, $T_{IV\,max}$ = 8600 Н·м. С учетом зубчатой передачи от вала IУ к шнеку i_{IV} = 1,64, будем иметь на валу шнека

$$T_{шн.\,min} = 4850 \cdot 1{,}64 \cdot 0{,}97 = 7740 \text{ Н·м};$$

$$T_{шн.\,max} = 8600 \cdot 1{,}64 \cdot 0{,}97 = 13700 \text{ Н·м}.$$

Определим числовые характеристики переменных параметров:

средние квадратические отклонения момента, частоты вращения и времени работы (срока службы) для вала IУ, найденные по правилу "трех сигм"

$$\sigma_T = 625 \text{ Н·м}; \quad \sigma_n = 0{,}83 \text{ мин}^{-1}; \quad \sigma_{L_h} = 250 \text{ ч};$$

дисперсии

$$D_T = \sigma_T^2 = 390000; \quad D_n = \sigma_n^2 = 0{,}69; \quad D_{L_h} = \sigma_{L_h}^2 = 62500;$$

математические ожидания

$$m_T = T_{IV\,min} + 3\sigma_T = 4850 + 3 \cdot 625 = 6725 \text{ Н·м};$$
$$m_n = n_{IV\,min} + 3\sigma_n = 50 + 3 \cdot 0{,}83 = 52{,}5 \text{ мин}^{-1};$$
$$m_{L_h} = L_{h\,min} + 3\sigma_{L_h} = 3000 + 3 \cdot 250 = 3750 \text{ ч}.$$

Шестерня передачи изготовлена из цементуемой стали I8ХГТ, имеет твердость поверхностей зубьев HRC 55÷63, тогда пределы контактной выносливости

$$\sigma^{min}_{H lim b} = 23 HRC_{min} = 23 \cdot 55 = 1265 \text{ МПа};$$
$$\sigma^{max}_{H lim b} = 23 HRC_{max} = 23 \cdot 63 = 1450 \text{ МПа}.$$

Эквивалентные числа циклов перемены напряжений

$$N_{HE\,min} = 60 n_{min} L_{h\,min} = 60 \cdot 50 \cdot 3000 = 9 \cdot 10^6 \text{ циклов};$$
$$N_{HE\,max} = 60 n_{max} L_{h\,max} = 60 \cdot 55 \cdot 4500 = 15 \cdot 10^6 \text{ циклов}.$$

Коэффициент долговечности

$$K_{HL\,min} = \sqrt[6]{N_{HO\,min}/N_{HE\,max}} = \sqrt[6]{110 \cdot 10^6/15 \cdot 10^6} = 1{,}395;$$
$$K_{HL\,max} = \sqrt[6]{N_{HO\,max}/N_{HE\,min}} = \sqrt[6]{120 \cdot 10^6/9 \cdot 10^6} = 1{,}540.$$

Пределы контактной выносливости, соответствующие фактическому числу циклов:

$$\sigma_{-1H\,min} = \sigma^{min}_{H lim b} K_{HL\,min} = 1265 \cdot 1{,}395 = 1760 \text{ МПа};$$
$$\sigma_{-1H\,max} = \sigma^{max}_{H lim b} K_{HL\,max} = 1450 \cdot 1{,}54 = 2230 \text{ МПа}.$$

Среднее квадратическое отклонение, дисперсия и математическое ожидание предела контактной выносливости:

$$S_{\sigma_{-1H}} = \frac{\sigma_{-1H\,max} - \sigma_{-1H\,min}}{6} = \frac{2230 - 1760}{6} = 78 \text{ МПа};$$

$$D_{\sigma_{-1H}} = S^2_{\sigma_{-1H}} = 78^2 = 6135 \text{ (МПа)}^2;$$

$$m_{\sigma_{-1H}} = \sigma_{-1H\,min} + 3S_{\sigma_{-1H}} = 1760 + 3 \cdot 78 = 1995 \text{ МПа}.$$

По формуле (9) находим математическое ожидание обобщенного конструктивного параметра $m_Z = 0{,}57$.

Дисперсия по формуле (10):

$$D_Z = 0{,}55 \cdot 10^{-2}.$$

Расчетное значение конструктивного параметра:

$$Z_{расч} = 0{,}57 + 2\sqrt{0{,}55 \cdot 10^{-2}} = 0{,}72.$$

Межосевое расстояние и начальные диаметры зубчатых колес при i = I,67 по формуле (I2):

$$a_W = \text{I80 мм},$$

$$d_{W1} = 2a_W(i+1) = 2\cdot\text{I80(I,67 + I)} = \text{I34,83I5 мм},$$

$$d_{W2} = d_{W1}\,i = \text{I34,83I5}\cdot\text{I,67} = \text{225,I685 мм}, \quad b = \text{72 мм}.$$

Определим межосевое расстояние детерминированным способом при допускаемых контактных напряжениях:

$$[\sigma_H]\,max = \sigma_{-1H\,max}/S_H = \text{2230/I,2} = \text{I855 МПа},$$

$$[\sigma_H]\,min = \sigma_{-1H\,min}/S_H = \text{I760/I,2} = \text{I465 МПа},$$

$$a_{W\,min} = \text{I78 мм}, \quad a_{W\,max} = \text{253 мм}.$$

Таким образом, $a_{W\,max} > a_W > a_{W\,min}$, т.е. 253 > I80 > I78. Найденное вероятностным методом межосевое расстояние передачи a_W находится между минимальным и максимальным расстояниями, определенными детерминированным методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров В.И. Прогнозирование надежности и долговечности лесозаготовительного оборудования. М., Лесная промышленность, 1976.

2. Коваленко И.Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. М., Высшая школа, 1982.

3. Кудрявцев В.Н. Детали машин. Л., Машиностроение, 1980.