Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им.Г.В.Плеханова,
1987, т. 111

УДК 550.8:550.83.01

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НАЛОЖЕННЫХ ГЕОХИМИЧЕСКИХ ОРЕОЛОВ

К.В.ТИТОВ

Работа посвящена построению математических моделей вторичных наложенных геохимических ореолов. В последнее время проявилась тенденция к сокращению фонда легкооткрываемых приповерхностных месторождений, что заставляет искать новые методы поисков рудных месторождений и признаки их, обладающие большим "дальнодействием", чем традиционно применяемые. К числу таких признаков относятся наложенные геохимические ореолы рудных тел месторождений, способные по свидетельству Б.Е.Саета [4] проникать к дневной поверхности сквозь толщу рыхлых отложений мощностью до 130 м. Целью этой статьи является, говоря языком разведочной геофизики, решение прямых задач для наложенного геохимического ореола.

За последние десятилетия опубликован ряд работ, посвященных количественному и качественному описанию наложенных вторичных ореолов, среди которых можно выделить три основополагающих [1,3,4]: в первой дана математическая модель нашего объекта, во второй предоставлен ряд моделей различных геохимических ореолов, в третьей собран обширный фактический материал, описанный качественно.

При конструировании математических моделей будем строго придерживаться методологии построения аппарата прямых задач разведочной геофизики, который достаточно хорошо развит. Таким образом, следует определить сначала какому исходному дифференциальному уравнению удовлетворяет в том или ином приближении поле солевого рассеяния, затем функцию распределения концентрации от точечного источника; и, наконец, интегрируя эту функцию, получить аналитические выражения для тех или иных фигур источников поля.

В первом приближении будем считать, что вторичный ореол обязан своим происхождением процессу, сходному с диффузией вещества сквозь толщу рыхлых отложений, иначе говоря случайному, ненаправленному процессу. Тогда рассеяние вещества в наложенном ореоле подчиняется уравнению диффузии при условии линейности сорбции вещества по разрезу:

$$div\left(D\,grad\,C\right)=\frac{dC}{dt}, \qquad (1)$$

где C – концентрация вещества; D – коэффициент диффузии-сорбции. Поставив те или иные граничные условия, можно решать это уравнение. Положим, что рудное тело в виде штока выходит на уровень древнего эрозионного

среза, на границу раздела рыхлых отложений и коренных пород. Пренебрежем рассеянием вещества в коренных породах по сравнению с рассеянием в рыхлых. Тогда источником вещества будет являться точка выхода штока на уровень древнего эрозионного среза. Предположим, что количество вещества, выделяющееся из этой точки в единицу времени, не меняется во времени. Тогда решением уравнения (I) с учетом влияния границы раздела земля – воздух будет ряд

$$C = \frac{q}{2\pi D}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{erfc}\left[\frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+[z-(2n+1)z_0]^2}}{\sqrt{4Dt}}\right]}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+[z-(2n+1)z_0]^2}} + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{erfc}\left[\frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+[z-(2n-1)z_0]^2}}{\sqrt{4Dt}}\right]}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+[z-(2n-1)z_0]^2}}\right\}, \qquad (2)$$

где q – количество вещества, выделяющееся из источника в единицу времени; x_0, y_0 и z_0 – координаты источника; x, y и z – текущие координаты.

Это решение получено методом источников с использованием метода электростатических изображений. Все члены ряда, за исключением первого, являются однократным и многократными отражениями вещества от границы рыхлых и коренных пород и от границы раздела земля – воздух. Ряд (2) является быстросходящимся и, поэтому, пренебрегая всеми его членами кроме двух первых, т.е. пренебрегая всеми фиктивными источниками – отражениями, кроме одного, характеризующего отражение от дневной поверхности и самого мощного, получим

$$C = \frac{q}{2\pi D}\left[\frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{r}{\sqrt{4Dt}}\right)}{r} + \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{r_1}{\sqrt{4Dt}}\right)}{r_1}\right], \qquad (3)$$

где $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$; $r_1=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}$.

Аналогичное выражение для линейного источника можно получить, интегрируя соотношение (3) или решая двумерное уравнение диффузии в граничных и начальных условиях, соответствующих геометрии пласта рыхлых отложений, линейного источника и постоянству количества вещества, выделяющегося из единицы длины источника в единицу времени:

$$C = \frac{q}{2\pi D}\left[E_1\left(\frac{r^2}{4Dt}\right)+E_1\left(\frac{r_1^2}{4Dt}\right)\right] = K\left[E_1\left(\frac{r^2}{4Dt}\right)+E_1\left(\frac{r_1^2}{4Dt}\right)\right], \qquad (4)$$

где $r=\sqrt{(x-x_0)^2+(z-z_0)^2}$; $r_1=\sqrt{(x-x_0)^2+(z+z_0)^2}$; $E_1(y)=\int_y^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,du$ – интегральная показательная функция первого порядка. Последнее выражение получено впервые В.С.Голубевым и А.А.Гарибянцем [I], его иллюстрирует рис.I.

Исследуем параметры, входящие в выражения (3) и (4). Заметим, что время t входит в эти выражения всюду в произведении с коэффициентом диффузии. Исходя из этого, воспользуемся подстановкой, использованной А.П.Солововым [5] при построении теории вторичного остаточного литохимического ореола: $\sigma=\sqrt{2Dt}$. Параметр σ имеет размерность длины и, следовательно, является неким характеристическим размером ореола. Однако его

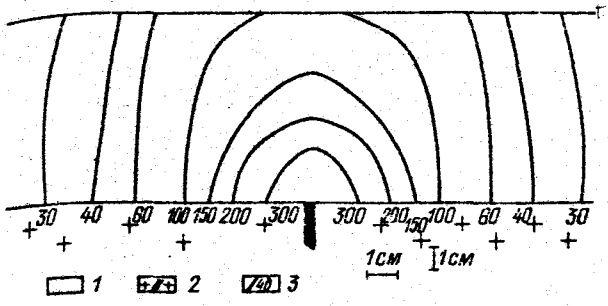


Рис.1. Разрез концентрации наложенного ореола рудного тела в форме жилы бесконечного простирания
1 - аллохтонные образования; 2 - коренные породы и рудное тело; 3 - изоконцентраты в условных единицах

определение не так просто, как в случае механического ореола (полуширина ореола на уровне определенной концентрации). Здесь для определения параметра σ мы вынуждены обращаться к решению, например, следующего трансцендентного уравнения

$$2E_1\left(\frac{z_0^2}{2\sigma^2}\right) = E_1\left(\frac{x_{0,5}^2 + z_0^2}{2\sigma^2}\right), \quad (5)$$

где $x_{0,5}$ - полуширина ореола на уровне половины максимальной концентрации.

Результаты численного решения уравнения (5) представлены на рис.2.

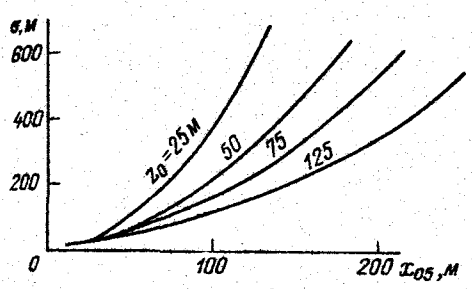


Рис.2. Номограммы зависимости параметра σ от полуширины ореола $x_{0,5}$ на уровне половины максимальной концентрации при различной глубине залегания рудного тела z_0

Если имеются эталонные объекты, можно определить параметры σ и K, что позволит в дальнейшем строить физико-геологические модели объектов поисков и количественно оценивать параметры экзаменуемых объектов. Так, зная параметр σ, можно прогнозировать глубину залегания исследуемого объекта.

Рассмотрим теперь менее грубое приближение к объекту исследования. Очевидно, что количество вещества, выделяющееся из источника, не постоянно во времени. Для определения зависимости этого количества от времени решим несложную задачу. Положим, что количество вещества, выделяющееся из источника или с единицы его длины (в зависимости от размерности задачи) в единицу времени - "мощность" источника - пропорционально запасам вещества Q в этом источнике в текущий момент времени с неким коэффициентом пропорциональности λ. Рассматриваемая система замкнута. Тогда справедливо дифференциальное уравнение, аналогичное, например, уравнению радиоактивного распада, $dQ = -\lambda Q dt$, интегрируя которое при условиях $Q(t=0) = Q_0$, получим, что "мощность" источника убывает во времени по экспоненциальному закону

$$q = -\frac{dQ}{dt} = Q_0 \lambda e^{-\lambda t},$$

где знак минус свидетельствует, что количество вещества в источнике уменьшается. С учетом последней задачи запишем уравнение для точечного источника:

$$C(x,y,z,t)=\frac{\lambda Q_0}{8(\pi D)^{3/2}}\int_0^t e^{-\lambda t}\,\frac{r^2}{4D(t-t')}\,\frac{dt''}{(t-t')^{3/2}},$$

которое после интегрирования примет вид

$$C=\frac{Q_0\lambda}{4\pi D r}\,e^{\frac{r^2}{4Dt}}\left\{\mathrm{Re}\left[W\left(\sqrt{\lambda\tau}+i\,\frac{r}{2\sqrt{Dt}}\right)\right]\right\},$$

где W – интеграл вероятности от функции комплексного переменного, $W(z)=e^{-z^2}\,erfc(-iz)$.

Рассмотрим еще одно более близкое реальности описание. Известно [4], что наложенные ореолы имеют в разрезе столбообразную форму, что позволяет сделать вывод о выделенности в пространстве вертикального направления по сравнению с другими. Физически этот факт можно интерпретировать двояко: или считать, что вертикальная направленность ореолов связана с наличием фильтрации вещества в вертикальном направлении под действием некой силы или поля или что среда, в которой происходит рассеяние, – анизотропна (коэффициент диффузии в вертикальном направлении существенно больше, чем в горизонтальном). Промоделируем последнее предположение. Для анизотропной среды, в которой происходит диффузия, справедливо дифференциальное уравнение [2]

$$D_x\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}+D_y\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}+D_z\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}=\frac{\partial C}{\partial t},$$

решив которое при тех же начальных и граничных условиях, что и в предыдущих случаях и при постоянной "мощности" источника, получим для штока и жилы соответственно [2]

$$C=\frac{Q}{2\pi(D)^{3/2}}\left\{\frac{erfc\left[\sqrt{\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_{xy}^2}+\frac{(y-y_0)^2}{2\sigma_{xy}^2}+\frac{(z-z_0)^2}{2\sigma_z^2}}\right]}{\sqrt{\frac{(x-x_0)^2}{2D_{xy}}+\frac{(y-y_0)^2}{2D_{xy}}+\frac{(z-z_0)^2}{2D_z}}}+\frac{erfc\left[\sqrt{\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_{xy}^2}+\frac{(y-y_0)^2}{2\sigma_{xy}^2}+\frac{(z+z_0)^2}{2\sigma_z^2}}\right]}{\sqrt{\frac{(x-x_0)^2}{2D_{xy}}+\frac{(y-y_0)^2}{2D_{xy}}+\frac{(z+z_0)^2}{2D_z}}}\right\};$$

$$C=\frac{Q}{2\pi D}\left\{E_1\left[\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(z-z_0)^2}{2\sigma_z^2}\right]+E_1\left[\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_x^2}+\frac{(z+z_0)^2}{2\sigma_z^2}\right]\right\},$$

где $\sigma_{xy}=\sqrt{2D_{xy}t}$, $\sigma_z=\sqrt{2D_z t}$. Результаты расчета приведены на рис.3.

В заключение продемонстрируем возможности моделей на конкретном примере. На рис.4 представлена кривая распределения концентрации [4] по профилю № 67 Красноярского полиметаллического месторождения. По известным глубине залегания эталонного объекта и $x_{0,5}$ и по номограмме (см. рис.2) получим значение σ. Далее для исследуемого объекта, расположенного в исходной геологической обстановке, предполагая $\sigma=const$, произведем обратную операцию определения по заданным σ и $x_{0,5}$ глубины залегания объекта z_0.

По коэффициентам σ и K построена расчетная кривая распределения

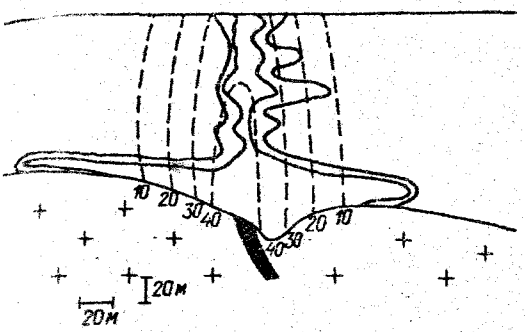


Рис.3. Расчетный (пунктирные линии) и экспериментальный (сплошные линии) [4] ореол преимущественно вертикальной миграции (условные обозначения см. на рис.1)

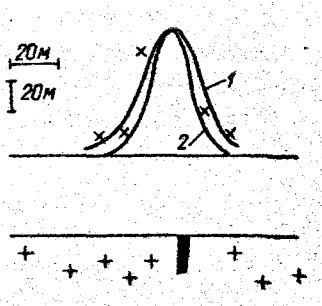


Рис.4. Пример интерпретации наложенного геохимического ореола
1 и 2 – экспериментальная и расчетная кривые (условные обозначения см. на рис.1)

концентрации, удовлетворительно совпадающая с экспериментальной. Теперь в исходной геологической ситуации, например, на флангах рудного поля месторождения, к которому принадлежит эталонное рудное тело, можно оценить глубину залегания верхней кромки рудного тела и построить физико-геологическую модель искомого объекта не только по геофизическим полям, но и по полю рассеяния.

Характерна вытянутость изоконцентрат расчетных разрезов в вертикальном направлении. Это явление заметно даже в том случае, когда среда, в которой происходит рассеяние, принимается изотропной и, естественно, еще более проявлено при диффузии в анизотропной среде. Этот факт хорошо согласуется с известными экспериментальными данными (см. рис.3). Вертикальная вытянутость ореола, обязанного своим происхождением изотропной диффузии, объясняется влиянием "отражающей" вещество границы раздела земля – воздух.

Автор полагает, что используя ЭВМ, можно, как и при интерпретации геофизических полей, осуществлять подбор решения, опираясь на построенные математические модели, и таким образом, определять параметры рудных тел по наложенным геохимическим ореолам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев В.С., Гарибянц А.А. Гетерогенные процессы геохимической миграции. М., Наука, 1969. 192 с.

2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М., Наука, 1964. 487 с.

3. Поликарпочкин В.В. Вторичные ореолы и потоки рассеяния, Новосибирск, Наука, 1976. 406 с.

4. Сает Ю.Е. Вторичные геохимические ореолы при поисках рудных месторождений. М., Наука, 1982. 168 с.

5. Солевов А.П. Геохимические методы поисков месторождений полезных ископаемых. М., Недра, 1985. 294 с.