Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г.В.Плеханова,
1987, т. 113

УДК 550.831.01

АНАЛОГИИ В АНАЛИТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ПОЛЯ ПРИТЯЖЕНИЯ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО МАТЕРИАЛЬНОГО ОТРЕЗКА, МНОГОУГОЛЬНОЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ И ОБЪЕМНЫХ МАСС МНОГОГРАННИКА

Г.Г.КРАВЦОВ

Многогранник как универсальное геометрическое тело находит в настоящее время широкое применение в разведочной геофизике при моделировании по гравитационным и магнитным аномалиям сложно устроенной геологической среды. Замечательно, что гравитационный потенциал многогранника с полиномиальной плотностью описывается элементарными функциями в конечном виде.

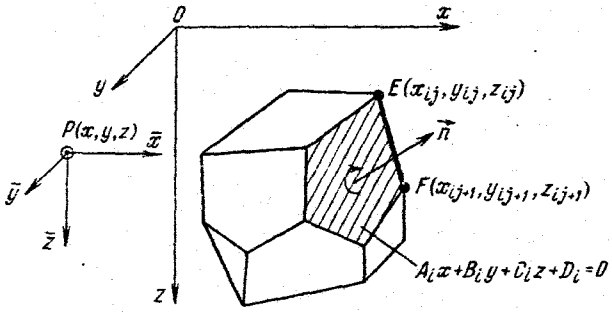
Существуют различные подходы к решению прямой задачи для многогранника общего вида. Но в работе [I] предпочтение было отдано следующему весьма эффективному из-за его малой трудоемкости и достаточной универсальности приему. Сначала непосредственным интегрированием общего интегрального соотношения ньютоновского потенциала объемных масс было найдено в явном виде выражение потенциала. Затем путем дифференцирования по координатам точки наблюдения полученной формулы находились частные производные потенциала притяжения различного порядка. Одним из преимуществ такого подхода было еще и то, что он обеспечивал получение общего решения, равно пригодного как для внешнего, так и для внутреннего пространства многогранника. Но была здесь и своя специфика, обусловленная необходимостью обращаться к дифференцированию разветвляющихся выражений, описываемых несколькими формулами. Подобные ветвления являются прямым следствием того, что поверхность многогранника описывается кусочно-аналитическим выражением для некоторой совокупности плоскостей, высекающих в пространстве его объем:

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0 \quad (i = \overline{1, n}), \qquad (I)$$

где n – общее число всех граней у многогранника.

Оказалось, что и это осложнение легко преодолевается, если совместно рассмотреть модели трех типов родственной геометрической природы: многогранник с объемной плотностью масс σ; многоугольную свободно ориентируемую в пространстве материальную пластинку (грань многогранника) с поверхностной плотностью масс σ_1; прямолинейный материальный отрезок (ребро многогранника) с линейной плотностью масс. σ_2. Параметры σ, σ_1 и σ_2 разнятся между собой формулами размерности.

Рассмотрим произвольного типа неправильный многогранник. В качестве геометрических параметров такого многогранника при решении прямой задачи



Многогранник и притягиваемая точка P в правой системе прямоугольных координат

ньютоновского потенциала выступают упорядоченные по граням совокупности координат его вершин x_{ij}, y_{ij}, z_{ij} ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m_i}$) и коэффициенты в уравнениях (I), дающие обобщенную характеристику об ориентации в пространстве его граней. Буквой m_i обозначено здесь число вершин, приходящихся на грань с порядковым номером i.

В правой системе прямоугольных координат нумерация вершин в плоскости грани по индексу j ведется относительно внешней нормали $\vec{n}$ по ходу часовой стрелки (см. рисунок).

Параметры многогранника естественно задавать относительно некоторой базовой системы координат xyz. Решение же прямой задачи удобнее искать, совместив предварительно путем параллельного переноса начало прямоугольных координат с точкой наблюдения P (x, y, z). Подобным преобразованием параметры многогранника оказываются связанными с координатами x, y и z точки наблюдения следующей функциональной зависимостью:

$$\bar{x}_{ij} = x_{ij} - x;\ \bar{y}_{ij} = y_{ij} - y;\ \bar{z}_{ij} = z_{ij} - z;$$
$$\bar{D}_i = A_i x + B_i y + C_i z + D_i . \qquad (2)$$

Только коэффициенты A_i, B_i и C_i, будучи величинами, пропорциональными направляющим косинусам внешней нормали к поверхности многогранника, остаются неизменными.

Для большей наглядности будем обозначать далее потенциал каждого типа интересующих нас моделей своей буквой: W для многогранника, V для грани и U для ребра. Выполнив интегрирование общих интегральных соотношений ньютоновского потенциала для этих моделей (на рисунке i-я грань заштрихована, а j-е ребро EF на этой грани выделено более жирной линией), получим

$$W(x,y,z) = W = f\sigma \iiint\limits_{(v)} \frac{dv}{R} = \frac{1}{2} f\sigma \sum_{i=1}^{n} \mu^2 \bar{D}_i \sum_{j=1}^{m_i} \left(\frac{Q}{\sqrt{\Delta}} J - \bar{D}_i J_k \right) \Bigg|_{(1)}^{(2)}; \qquad (3)$$

$$V(x,y,z) = V = f\sigma_1 \iint\limits_{(S_i)} \frac{dS}{R} = -f\sigma_1 \mu \sum_{j=1}^{m_i} \left(\frac{Q}{\sqrt{\Delta}} J - \bar{D}_i J_k \right) \Bigg|_{(1)}^{(2)}; \qquad (4)$$

$$U(x,y,z) = U = f\sigma_2 \int\limits_{(L_{ij})} \frac{dl}{R} = f\sigma_2 J \Big|_{(1)}^{(2)}, \qquad (5)$$

где f – гравитационная постоянная; v – объем многогранника; S_i – поверхность i-й грани; L_{ij} – j-е ребро i-й грани;

$\left|{}^{(2)}_{(1)}\right|$ – пределы интегрирования $\left|\begin{matrix}\bar{x}_{ij+1},\ \bar{y}_{ij+1},\ \bar{z}_{ij+1};\\ \bar{x}_{ij},\ \bar{y}_{ij},\ \bar{z}_{ij}\end{matrix}\right.$

$$\bar{x}_{im_i+1}=\bar{x}_{i1};\quad \Delta_1=\bar{x}_{ij+1}-\bar{x}_{ij};\quad p_1=\bar{x}_{ij}\,\bar{y}_{ij+1}-\bar{x}_{ij+1}\,\bar{y}_{ij};$$

$$\bar{y}_{im_i+1}=\bar{y}_{i1};\quad \Delta_2=\bar{y}_{ij+1}-\bar{y}_{ij};\quad p_2=\bar{x}_{ij}\,\bar{z}_{ij+1}-\bar{x}_{ij+1}\bar{z}_{ij};$$

$$\bar{z}_{im_i+1}=\bar{z}_{i1};\quad \Delta_3=\bar{z}_{ij+1}-\bar{z}_{ij};\quad p_3=\bar{y}_{ij}\,\bar{z}_{ij+1}-\bar{y}_{ij+1}\,\bar{z}_{ij};$$

$$\Delta=\Delta_1^2+\Delta_2^2+\Delta_3^2;\quad \delta=p_1^2+p_2^2+p_3^2;\quad u=\Delta_1\bar{x}+\Delta_2\bar{y}+\Delta_3\bar{z};$$

$$M_1=arctg\left(\bar{x}\,Q+p_3\bar{D}_i\right)/\left(\Delta_1\bar{D}_i R\right);\quad R=\sqrt{\bar{x}^2+\bar{y}^2+\bar{z}^2};$$

$$M_2=arctg\left(\bar{y}\,Q-p_2\bar{D}_i\right)/\left(\Delta_2\bar{D}_i R\right);\quad Q=A_i\,p_3-B_i\,p_2+C_i\,p_1;$$

$$M_3=arctg\left(\bar{z}\,Q+p_1\bar{D}_i\right)/\left(\Delta_3\bar{D}_i R\right);$$

$$J:=\underline{if}\ \delta=0\ \underline{then}\ \left|lnR\right|\ \underline{else}\ ln\left|u+R\sqrt{\Delta}\right|^{*};\qquad (6)$$

$$J_k:=\underline{if}\ \bar{D}=0\ \underline{then}\ 0\ \underline{else}\ M_k\quad (k=\overline{1;3}).\qquad (7)$$

При записи функции J в выражении $\left|lnR\right|$ была допущена некоторая условность, отступающая от строгого понимания знака модуля, принятого в математике. При подстановке пределов интегрирования эту условность следует трактовать так:

$$\left|lnR\right|\Big|_{(1)}^{(2)}=\left|\left(lnR\right)\Big|_{(1)}^{(2)}\right|=\left|lnR_2/R_1\right|,$$

где $R_1=\sqrt{\bar{x}_y^2+\bar{y}_{ij}^2+\bar{z}_{ij}^2}$; $R_2=\sqrt{\bar{x}_{ij+1}^2+\bar{y}_{ij+1}^2+\bar{z}_{ij+1}^2}$.

Из сказанного следует, что

$$J\Big|_{(1)}^{(2)}:=\underline{if}\ \delta=0\ \underline{then}\ \left|\left(lnR\right)\Big|_{(1)}^{(2)}\right|\ \underline{else}\ ln\left|u+R\sqrt{\Delta}\right|\Big|_{(1)}^{(2)}.$$

В отличие от натурального логарифма, в записи которого прослеживается строгая симметрия по переменным x, y и z, своеобразие симметрии обратных тригонометрических функций находит свое проявление в том, что для них существует три различных и совершенно равноценных формы представления. Поэтому потенциалы W и V можно вычислять по любой из трех возможных формул, получаемых подстановкой в выражения (3) и (4) соответствующего J_k, получаемого из (7) при различных k. В то же время подстановка пределов интегрирования в функцию M_k порождает дополнительные ветвления,

---

* Для простоты описания разветвляющихся формул использованы элементы языка АЛГОЛ.

учитывающие ситуации, когда грань оказывается параллельной одной из координатных осей. В итоге число внешне различных, но по конечному результату вычисляемой по индексу j циклической суммы совершенно равноценных представлений функции J_k удваивается:

$$J_k\Big|_{(1)}^{(2)} := \underline{\text{if}}\ \bar{D}_i = 0\ \underline{\text{then}}\ 0\ \underline{\text{else}}\ M_{kr}\Big|_{(1)}^{(2)} \quad (k=\overline{1;3},\ r=1;2),$$

где $N_1 = -\operatorname{arctg}(\bar{x}p_2 + \bar{y}p_3)/(p_1 R)$;

$N_2 = \operatorname{arctg}(\bar{x}p_1 - \bar{z}p_3)/(p_2 R)$; $N_3 = \operatorname{arctg}(\bar{y}p_1 + \bar{z}p_2)/(p_3 R)$;

$M_{1,1}\Big|_{(1)}^{(2)} := \underline{\text{if}}\ C_i = 0\ \underline{\text{then}}\ \psi_1\ \underline{\text{else}}\ \varphi_1$; $M_{1,2}\Big|_{(1)}^{(2)} := \underline{\text{if}}\ B_i = 0\ \underline{\text{then}}\ \psi_2\ \underline{\text{else}}\ \varphi_1$;

$M_{2,1}\Big|_{(1)}^{(2)} := \underline{\text{if}}\ C_i = 0\ \underline{\text{then}}\ \psi_1\ \underline{\text{else}}\ \varphi_2$; $M_{2,2}\Big|_{(1)}^{(2)} := \underline{\text{if}}\ A_i = 0\ \underline{\text{then}}\ \psi_3\ \underline{\text{else}}\ \varphi_2$;

$M_{3,1}\Big|_{(1)}^{(2)} := \underline{\text{if}}\ B_i = 0\ \underline{\text{then}}\ \psi_2\ \underline{\text{else}}\ \varphi_3$; $M_{3,2}\Big|_{(1)}^{(2)} := \underline{\text{if}}\ A_i = 0\ \underline{\text{then}}\ \psi_3\ \underline{\text{else}}\ \varphi_3$;

$$\varphi_k := \underline{\text{if}}\ \Delta_k = 0\ \underline{\text{then}}\ 0\ \underline{\text{else}}\ M_k\Big|_{(1)}^{(2)} \quad (k=\overline{1;3});$$

$$\psi_k := \underline{\text{if}}\ p_k = 0\ \underline{\text{then}}\ 0\ \underline{\text{else}}\ N_k\Big|_{(1)}^{(2)} \quad (k=\overline{1;3}).$$

Теперь появилась возможность легко раскрывать неопределенность, возникающую при вычислении функции M_k, когда грань многогранника оказывается строго перпендикулярной одной из координатных осей:

$M_{1,1}\Big|_{(1)}^{(2)} := \underline{\text{if}}\ B_i = 0 \wedge C_i = 0\ \underline{\text{then}}\ \psi_1\ \underline{\text{else}}\ \varphi_1$; $M_{1,2}\Big|_{(1)}^{(2)} := \underline{\text{if}}\ B_i = 0 \wedge C_i = 0\ \underline{\text{then}}\ \psi_2\ \underline{\text{else}}$

$M_{2,1}\Big|_{(1)}^{(2)} := \underline{\text{if}}\ A_i = 0 \wedge C_i = 0\ \underline{\text{then}}\ \psi_1\ \underline{\text{else}}\ \varphi_2$; $M_{2,2}\Big|_{(1)}^{(2)} := \underline{\text{if}}\ A_i = 0 \wedge C_i = 0\ \underline{\text{then}}\ \psi_3\ \underline{\text{else}}\ \varphi_2$

$M_{3,1}\Big|_{(1)}^{(2)} := \underline{\text{if}}\ A_i = 0 \wedge B_i = 0\ \underline{\text{then}}\ \psi_2\ \underline{\text{else}}\ \varphi_3$; $M_{3,2}\Big|_{(1)}^{(2)} := \underline{\text{if}}\ A_i = 0 \wedge B_i = 0\ \underline{\text{then}}\ \psi_3\ \underline{\text{else}}\ \varphi_3$

Своеобразную роль играет в результативных формулах (3) и (4) нормирующий множитель $\mu = \mu_i$ к коэффициентам уравнения плоскости (I). Параметром μ как бы метится внешняя, наружная сторона пластинки-грани. Ведь для свободно ориентируемой в пространстве многоугольной пластинки за внешнюю сторону, куда направлена нормаль $\bar{n}$, можно принять любую. А от того, на чем мы остановим свой выбор, будет зависеть направление обхода угловых точек пластинки. Естественно, что у замкнутой поверхности многогранника таких альтернатив нет. Внешняя нормаль может быть направлена только в одном направлении по отношению к поверхности многогранника.

При вычислении потенциала W достаточно знать лишь абсолютную величину нормирующего множителя, определяемую выражением $\mu^2 = 1/(A_i^2 + B_i^2 + C_i^2)$. Но для потенциала V этого уже недостаточно. Надо знать и алгебраический знак μ, определяемый по тому из соотношений, в котором коэффициент из уравнения (I) не равен нулю [2]:

$$\mu A_i = S_{yz}/S_i\ ;\ \mu B_i = S_{xz}/S_i\ ;\ \mu C_i = S_{xy}/S_i\ .$$

где

$$S_i = \sqrt{S_{yz}^2 + S_{xz}^2 + S_{xy}^2}\ ;\ S_{yz} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m_i} p_3\ ;\ S_{xz} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m_i} p_2\ ;\ S_{xy} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m_i} p_1 .$$

Следует иметь в виду и то, что если нормировка всех коэффициентов в равенствах (I) выполнена по приведенным выше правилам до подстановки их в формулы (3) и (4), то параметр μ в формулах можно опустить, так как после нормировки он станет равен +I.

При всем многообразии ветвлений трансцендентных выражений, которые приходится учитывать при проведении численных расчетов по формулам (3)-(5), при решении проблемы дифференцирования потенциала W и V оказалось достаточным найти частные производные для наиболее общего представления функций J и J_k, отвечающего в формулах (6) и (7) условиям $\delta \neq 0$ и $\bar{D}_i \neq 0$ соответственно. Техника аналитического дифференцирования этих функций по координатам точки наблюдения x, y и z базируется на устанавливаемой группой формул (2) функциональной связи геометрических параметров и переменных $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$ с переменными, по которым ведется дифференцирование. Выполнив дифференцирование интересующих нас функций и проведя необходимые преобразования и упрощения, получим:

$$J_x = (J)'_x = T_1 + J_4\sqrt{\Delta} = T_1 + (a_1\hat{I} - \Delta_1 I_1)/\sqrt{\Delta}\ ;$$

$$J_y = (J)'_y = T_2 + J_5\sqrt{\Delta} = T_2 + (a_2\hat{I} - \Delta_2 I_1)/\sqrt{\Delta}\ ;$$

$$J_z = (J)'_z = T_3 + J_6\sqrt{\Delta} = T_3 + (a_3\hat{I} - \Delta_3 I_1)/\sqrt{\Delta}\ ;$$

$$J_{kx} = (J_k)'_x = E_k + QJ_4/\bar{D}_i = \bar{E}_k - p_3\hat{I} \quad (k=\overline{1;3});$$

$$J_{ky} = (J_k)'_y = F_k + QJ_5/\bar{D}_i = \bar{F}_k + p_2\hat{I} \quad (k=\overline{1;3});$$

$$J_{kz} = (J_k)'_z = G_k + QJ_6/\bar{D}_i = \bar{G}_k - p_1\hat{I} \quad (k=\overline{1;3}),$$

где $\hat{I} = u/(\delta R)$; $I_1 = 1/R$;

$$J_4 = (\bar{y}p_1 + \bar{z}p_2)/(\delta R);\ J_5 = (\bar{z}p_3 - \bar{x}p_1)/(\delta R);\ J_6 = -(xp_2 + \bar{y}p_3)/(\delta R);$$

$$a_1 = \Delta_2 p_1 + \Delta_3 p_2\ ;\quad a_2 = \Delta_3 p_3 - \Delta_1 p_1\ ;\quad a_3 = -(\Delta_1 p_2 + \Delta_2 p_3).$$

В найденных двух вариантах формул частных производных присутствуют выражения, для которых достаточно указать лишь главную особенность, свойственную им при любых значениях, пробегаемых $k = \overline{1;3}$,

$$T_k\Big|_{(1)}^{(2)} = 0;$$

$$\sum_{j=1}^{m_i} E_k\Big|_{(1)}^{(2)} = \sum_{j=1}^{m_i} F_k\Big|_{(1)}^{(2)} = \sum_{j=1}^{m_i} G_k\Big|_{(1)}^{(2)} = \sum_{j=1}^{m_i} \bar{E}_k\Big|_{(1)}^{(2)} = \sum_{j=1}^{m_i} \bar{F}_k\Big|_{(1)}^{(2)} = \sum_{j=1}^{m_i} \bar{G}_k\Big|_{(1)}^{(2)} = 0.$$

Поэтому далее без ограничения общности можно полагать

$$J_x = J_4\sqrt{\Delta} = (a_1\hat{I} - \Delta_1 I_1)/\sqrt{\Delta};\quad J_{kx} = Q J_4/\bar{D}_i = -p_3\hat{I}\quad (k=\overline{1;3});$$

$$J_y = J_5\sqrt{\Delta} = (a_2\hat{I} - \Delta_2 I_1)/\sqrt{\Delta};\quad J_{ky} = QJ_5/\bar{D}_i = p_2\hat{I}\quad (k=\overline{1;3});$$

$$J_z = J_6\sqrt{\Delta} = (a_3\hat{I} - \Delta_3 I_1)/\sqrt{\Delta};\quad J_{kz} = QJ_6/\bar{D}_i = -p_1\hat{I}\quad (k=\overline{1;3}).$$

Оба варианта записи частных производных трансцендентных функций J и J_k в равной степени оказываются полезными, хотя целевое использование у них разное. Группа формул, в записи которых присутствуют функции J_4, J_5 и J_6, позволяет буквально одним росчерком записать все те частные производные потенциала W и V, которые, как и сами потенциалы, выражаются через трансцендентные функции J и J_k ($k = \overline{1;3}$):

$$W_x = f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2 A_i\sum_{j=1}^{m_i}\left(\frac{Q}{\sqrt{\Delta}}J - \bar{D}_i J_k\right)\Big|_{(1)}^{(2)} = f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2\bar{D}_i\sum_{j=1}^{m_i}\left(\frac{t_1}{\sqrt{\Delta}}J - A_i J_k\right)\Big|_{(1)}^{(2)};$$

$$W_y = f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2 B_i\sum_{j=1}^{m_i}\left(\frac{Q}{\sqrt{\Delta}}J - \bar{D}_i J_k\right)\Big|_{(1)}^{(2)} = f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2\bar{D}_i\sum_{j=1}^{m_i}\left(\frac{t_2}{\sqrt{\Delta}}J - B_i J_k\right)\Big|_{(1)}^{(2)};$$

$$W_z = f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2 C_i\sum_{j=1}^{m_i}\left(\frac{Q}{\sqrt{\Delta}}J - \bar{D}_i J_k\right)\Big|_{(1)}^{(2)} = f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2\bar{D}_i\sum_{j=1}^{m_i}\left(\frac{t_3}{\sqrt{\Delta}}J - C_i J_k\right)\Big|_{(1)}^{(2)};$$

$$V_x = -f\sigma_1\mu\sum_{j=1}^{m_i}\left(\frac{t_1}{\sqrt{\Delta}}J - A_i J_k\right)\Big|_{(1)}^{(2)};\quad W_{xx} = f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2 A_i\sum_{j=1}^{m_i}\left(\frac{t_1}{\sqrt{\Delta}}J - A_i J_k\right)\Big|_{(1)}^{(2)};$$

$$V_y = -f\sigma_1\mu\sum_{j=1}^{m_i}\left(\frac{t_2}{\sqrt{\Delta}}J - B_i J_k\right)\Big|_{(1)}^{(2)};\quad W_{yy} = f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2 B_i\sum_{j=1}^{m_i}\left(\frac{t_2}{\sqrt{\Delta}}J - B_i J_k\right)\Big|_{(1)}^{(2)};$$

$$V_z = -f\sigma_1\mu\sum_{j=1}^{m_i}\left(\frac{t_3}{\sqrt{\Delta}}J - C_i J_k\right)\Big|_{(1)}^{(2)};\quad W_{zz} = f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2 C_i\sum_{j=1}^{m_i}\left(\frac{t_3}{\sqrt{\Delta}}J - C_i J_k\right)\Big|_{(1)}^{(2)};$$

$$W_{xy} = f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2 A_i\sum_{j=1}^{m_i}\left(\frac{t_2}{\sqrt{\Delta}}J - B_i J_k\right)\Big|_{(1)}^{(2)} = f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2 B_i\sum_{j=1}^{m_i}\left(\frac{t_1}{\sqrt{\Delta}}J - A_i J_k\right)\Big|_{(1)}^{(2)};$$

$$W_{xz} = f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2 A_i\sum_{j=1}^{m_i}\left(\frac{t_3}{\sqrt{\Delta}}J - C_i J_k\right)\Big|_{(1)}^{(2)} = f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2 C_i\sum_{j=1}^{m_i}\left(\frac{t_1}{\sqrt{\Delta}}J - A_i J_k\right)\Big|_{(1)}^{(2)};$$

$$W_{yz} = f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2 B_i\sum_{j=1}^{m_i}\left(\frac{t_3}{\sqrt{\Delta}}J - C_i J_k\right)\Big|_{(1)}^{(2)} = f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2 C_i\sum_{j=1}^{m_i}\left(\frac{t_2}{\sqrt{\Delta}}J - B_i J_k\right)\Big|_{(1)}^{(2)};$$

где $t_1 = \Delta_3 B_i - \Delta_2 C_i$; $t_2 = \Delta_1 C_i - \Delta_3 A_i$; $t_3 = \Delta_2 A_i - \Delta_1 B_i$.

Двойное представление первых производных потенциала W легко усматривается, если воспользоваться следующими тремя тождествами:

$$QA_i = t_1\bar{D}_i + p_3/\mu^2;\quad QB_i = t_2\bar{D}_i - p_2/\mu^2;\quad QC_i = t_3\bar{D}_i + p_1/\mu^2.$$

Двойные формулы смешанных частных производных найдены по общему правилу независимости результата от порядка выбора переменных дифференцирования.

Завидная легкость перехода к частным производным, сохраняющим трансцендентность, объясняется тем, что ветвления функций J и J_k ($k = \overline{1, 3}$) приходятся как раз на те точки пространства (условие $\delta = 0$ относится к линии, на которой располагается ребро, а условие $\bar{D}_i = 0$ – к плоскости, которой принадлежит грань многогранника), в которых стоящие перед ними коэффициенты в выражениях, подвергающихся дифференцированию, обращаются в нуль. В связи с этим отметим еще и то, что функции J в положениях притягиваемой точки на ребрах многогранника свойственна как следствие расходящегося несобственного интеграла (5) логарифмическая особенность. Следовательно на скелете многогранника, образуемом его ребрами, функция J не определена, а значит, и вычислена быть не может. Но в формулах потенциала W, его первых производных и потенциала V логарифмическая особенность нейтрализуется обращением в нуль стоящих перед функцией J коэффициентов. Это обязательно надо учитывать, руководствуясь при вычислениях указанных составляющих поля, например, правилом

$$J - \bar{J} := \underline{if}\ \delta = 0\ \underline{then}\ 0\ \underline{else}\ \ln\left|u + R\sqrt{\Delta}\right|. \qquad (8)$$

Сказанное не относится ко вторым производным потенциала W, первым производным потенциала V и к потенциалу U. Поэтому вычисленные с учетом правила (6) значения этих составляющих поля на ребрах многогранника лишены какого-либо смысла, а в его вершинах неизбежно возникает ситуация вычисления натурального логарифма $\ln R$, когда $R = 0$, что при вычислениях в автоматическом режиме на ЭВМ нуждается в обязательном досмотре, например, таком:

$$J - \hat{J} := \underline{if}\ \delta \neq 0\ \underline{then}\ \ln\left|u + R\sqrt{\Delta}\right|\ \underline{else}\ \underline{if}\ R = 0\ \underline{then}\ 0\ \underline{else}\ \left|\ln R\right|. \qquad (9)$$

Возможны и иные способы представления функции J, позволяющие устранить избыточные ветвления в выражении (9) приблизив его по структуре к выражению (8). Например, как и в работе [3], конструкция $J\Big|_{(1)}^{(2)}$ в общем случае $\delta \neq 0$ после раскрытия пределов интегрирования преобразуется элементарно просто

$$\tilde{J} = \ln\left|u + R\sqrt{\Delta}\right|\Big|_{(1)}^{(2)} = \ln\left|\left(R_1 + R_2 + \sqrt{\Delta}\right)/\left(R_1 + R_2 - \sqrt{\Delta}\right)\right|,$$

что позволяет с учетом раскрытия пределов интегрирования записать иначе логику вычисления выражения (9) [сравним с правилом (8)]:

$$J\Big|_{(1)}^{(2)} := \underline{if}\ R_1 + R_2 - \sqrt{\Delta} = 0\ \underline{then}\ 0\ \underline{else}\ \tilde{J}.$$

Другая группа формул частных производных от J и J_k ($k = \overline{1; 3}$), записанная с помощью функций $\hat{I}$ и I_1, дает возможность перейти к рас-

смотрению частных производных потенциала W, V и U, у которых на смену трансцендентным функциям приходят алгебраические. Но если до сих пор приходилось оперировать функциями, строгое определение для которых давалось выражениями (6) и (7), то здесь впервые возникло положение, когда правила вычисления для функции I_1 вполне очевидны:

$$I_1 := \underline{\text{if}}\ R=0\ \underline{\text{then}}\ 0\ \underline{\text{else}}\ 1/R, \qquad (10)$$

и не зависят от значений δ, а для функции $\hat{I}$ в положениях притягиваемой точки на линиях, продолжающих ребра многогранника, налицо особенность: деление на нуль ($\delta = 0$), причем из характеристических свойств ньютоновского потенциала вполне устранимая. Вот здесь-то и оказалось весьма плодотворным совместное рассмотрение трех типов родственных моделей, ибо на элементарной модели материального отрезка, где отпадает необходимость оперировать кратными интегралами, проще всего именно интегрированием выяснять характер ветвлений алгебраических функций. Исследования показали, что функция $\hat{I}$ порождена интегралом:

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int_{(L_{ij})} \frac{dl}{R^3} = I \Big|_{(1)}^{(2)}, \qquad (11)$$

из которого следует

$$I := \underline{\text{if}}\ \delta = 0\ \underline{\text{then}}\ (R_1 - R_2)/(2\Delta R^2)\ \underline{\text{else}}\ u/(\delta R). \qquad (12)$$

Таким образом, исследование всего лишь одного интеграла (11) позволяет продолжить дифференцирование всех трех потенциалов и сразу же записать, опираясь на производные от трансцендентных функций, результаты дифференцирования:

$$W_{xxx} = f\sigma \sum_{i=1}^{n} \mu^2 A_i \sum_{j=1}^{m_i} M \Big|_{(1)}^{(2)}; \quad U_x = f\frac{\sigma_2}{\sqrt{\Delta}} (a_1 I - \Delta_1 I_1) \Big|_{(1)}^{(2)};$$

$$W_{yyy} = f\sigma \sum_{i=1}^{n} \mu^2 B_i \sum_{j=1}^{m_i} N \Big|_{(1)}^{(2)}; \quad U_y = f\frac{\sigma_2}{\sqrt{\Delta}} (a_2 I - \Delta_2 I_1) \Big|_{(1)}^{(2)};$$

$$W_{zzz} = f\sigma \sum_{i=1}^{n} \mu^2 C_i \sum_{j=1}^{m_i} P \Big|_{(1)}^{(2)}; \quad U_z = f\frac{\sigma_2}{\sqrt{\Delta}} (a_3 I - \Delta_3 I_1) \Big|_{(1)}^{(2)};$$

$$W_{xxy} = f\sigma \sum_{i=1}^{n} \mu^2 B_i \sum_{j=1}^{m_i} M \Big|_{(1)}^{(2)} = f\sigma \sum_{i=1}^{n} \mu^2 A_i \sum_{j=1}^{m_i} N_k \Big|_{(1)}^{(2)} \quad (k=1;2);$$

$$W_{xxz} = f\sigma \sum_{i=1}^{n} \mu^2 C_i \sum_{j=1}^{m_i} M \Big|_{(1)}^{(2)} = f\sigma \sum_{i=1}^{n} \mu^2 A_i \sum_{j=1}^{m_i} M_k \Big|_{(1)}^{(2)} \quad (k=1;2);$$

$$W_{xyy} = f\sigma \sum_{i=1}^{n} \mu^2 A_i \sum_{j=1}^{m_i} N \Big|_{(1)}^{(2)} = f\sigma \sum_{i=1}^{n} \mu^2 B_i \sum_{j=1}^{m_i} N_k \Big|_{(1)}^{(2)} \quad (k=1;2);$$

$$W_{yyz}=f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2 C_i\sum_{j=1}^{m_i}N\Big|_{(1)}^{(2)}=f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2 B_i\sum_{j=1}^{m_i}P_k\Big|_{(1)}^{(2)}\quad(k=1;2);$$

$$W_{xzz}=f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2 A_i\sum_{j=1}^{m_i}P\Big|_{(1)}^{(2)}=f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2 C_i\sum_{j=1}^{m_i}M_k\Big|_{(1)}^{(2)}\quad(k=1;2);$$

$$W_{yzz}=f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2 B_i\sum_{j=1}^{m_i}P\Big|_{(1)}^{(2)}=f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2 C_i\sum_{j=1}^{m_i}P_k\Big|_{(1)}^{(2)}\quad(k=1;2);$$

$$W_{xyz}=f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2 A_i\sum_{j=1}^{m_i}P_k\Big|_{(1)}^{(2)}=f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2 B_i\sum_{j=1}^{m_i}M_k\Big|_{(1)}^{(2)}=f\sigma\sum_{i=1}^{n}\mu^2 C_i\sum_{j=1}^{m_i}N_k\Big|_{(1)}^{(2)}(k=1;2);$$

$$V_{xx}=-f\sigma_1\mu\sum_{j=1}^{m_i}M\Big|_{(1)}^{(2)};\quad V_{xy}=-f\sigma_1\mu\sum_{j=1}^{m_i}N_k\Big|_{(1)}^{(2)}\quad(k=1;2);$$

$$V_{yy}=-f\sigma_1\mu\sum_{j=1}^{m_i}N\Big|_{(1)}^{(2)};\quad V_{xz}=-f\sigma_1\mu\sum_{j=1}^{m_i}M_k\Big|_{(1)}^{(2)}\quad(k=1;2);$$

$$V_{zz}=-f\sigma_1\mu\sum_{j=1}^{m_i}P\Big|_{(1)}^{(2)};\quad V_{yz}=-f\sigma_1\mu\sum_{j=1}^{m_i}P_k\Big|_{(1)}^{(2)}\quad(k=1;2),$$

где

$$M=(A_i p_3+a_1 b_1)I-\Delta_1 b_1 I_1;\quad M_1=(C_i p_3+a_1 b_3)I-\Delta_1 b_3 I_1;$$

$$N=(-B_i p_2+a_2 b_2)I-\Delta_2 b_2 I_1;\quad N_1=(B_i p_3+a_1 b_2)I-\Delta_1 b_2 I_1;$$

$$P=(C_i p_1+a_3 b_3)I-\Delta_3 b_3 I_1;\quad P_1=(-C_i p_2+a_2 b_3)I-\Delta_2 b_3 I_1;$$

$$M_2=(A_i p_1+a_3 b_1)I-\Delta_3 b_1 I_1;\quad N_2=(-A_i p_2+a_2 b_1)I-\Delta_2 b_1 I_1;$$

$$P_2=(B_i p_1+a_3 b_2)I-\Delta_3 b_2 I_1;\quad b_k=t_k/\Delta\quad(k=\overline{1;3}).$$

Хотя в полученных формулах производных логарифмическая особенность функции J и перешла в особенность алгебраическую у функций I и I_1, но проявление ее у функции I полностью нейтрализуется обращением в нуль коэффициентов, стоящих перед этой функцией. Поэтому вместо общего правила (I2) при вычислениях можно руководствоваться более простым правилом:

$$I=\overline{I}:=\underline{\text{if}}\ \delta=0\ \underline{\text{then}}\ 0\ \underline{\text{else}}\ u/(\delta R).$$

При повторном дифференцировании найденных производных потенциала проблем с функцией I_1 не возникает, так как она, согласно (I0), ветвлений по δ не имеет:

$$I_3=(I_1)'_x=\bar{x}/R^3;\quad I_4=(I_1)'_y=\bar{y}/R^3;\quad I_5=(I_1)'_z=\bar{z}/R^3.$$

А вот ветвления частных производных функции I:

$$I_x=(I)'_x=(a_1I_2-\Delta_1/R^3)/\Delta;\quad I_y=(I)'_y=(a_2I_2-\Delta_2/R^3)/\Delta;$$
$$I_z=(I)'_z=(a_3I_2-\Delta_3/R^3)/\Delta,$$

целиком обязаны, в чем нетрудно убедиться, дифференцированием под знаком интеграла выражения (II), интегралу

$$U_2=\frac{3}{\sqrt{\Delta}}\int\limits_{(L_{ij})}\frac{dl}{R^5}=I_2\Big|_{(1)}^{(2)}. \qquad (13)$$

Из последнего устанавливаем, что

$$I_2:=\underline{if}\ \delta=0\ \underline{then}\ 3(R_1-R_2)/(4\Delta R^4)\ \underline{else}\ (2\Delta/\delta+R^{-2})\,u/(\delta R), \qquad (14)$$

а этого вполне достаточно, чтобы сделать на пути дифференцирования потенциалов W, V и U очередной шаг. Проиллюстрируем сказанное примером получения производных второго порядка потенциала U:

$$U_{xy}=b(a_1I_y+\Delta_1\Delta_2I-\Delta_1I_4)\Big|_{(1)}^{(2)}=b(a_2I_x+\Delta_1\Delta_2I-\Delta_2I_3)\Big|_{(1)}^{(2)};$$
$$U_{xz}=b(a_1I_z+\Delta_1\Delta_3I-\Delta_1I_5)\Big|_{(1)}^{(2)}=b(a_3I_x+\Delta_1\Delta_3I-\Delta_3I_3)\Big|_{(1)}^{(2)};$$
$$U_{yz}=b(a_2I_z+\Delta_2\Delta_3I-\Delta_2I_5)\Big|_{(1)}^{(2)}=b(a_3I_y+\Delta_2\Delta_3I-\Delta_3I_4)\Big|_{(1)}^{(2)};$$
$$U_{xx}=b\left[a_1I_x-(\Delta_2^2+\Delta_3^2)I-\Delta_1I_3\right]\Big|_{(1)}^{(2)};\quad U_{yy}=b\left[a_2I_y-(\Delta_1^2+\Delta_3^2)I-\Delta_2I_4\right]\Big|$$
$$U_{zz}=b(a_3I_z-(\Delta_1^2+\Delta_2^2)I-\Delta_3I_5\,]\Big|_{(1)}^{(2)};\quad b=f\sigma_2/\Delta.$$

Здесь алгебраическая особенность функции I_2 по условию $\delta=0$ также полностью нейтрализуется обращением в нуль стоящих перед ней коэффициентов. Следовательно, правило (I4) при вычислениях можно упростить:

$$I_2=\bar{I}_2:=\underline{if}\ \delta=0\ \underline{then}\ 0\ \underline{else}\ (2\Delta/\delta+R^{-2})\,u/(\delta R).$$

Последнее правило в равной степени может быть распространено и на выражения I_x, I_y и I_z, в которых функция I_2 задействована. А вот функцию I здесь уже приходится вычислять, руководствуясь в полной мере правилом (I2). Разумеется, все затруднения, возникающие при вычислениях функций I, I_3, I_4 и I_5, следует обходить по аналогии с правилом (I0).

Таким образом, решение прямой задачи ньютоновского потенциала для выбранного класса моделей благодаря широкому применению операции дифференцирования свелось, по существу, к рассмотрению трех интегралов (3)-(5) и цепочки интегралов (II), (I3) и т.д.:

$$U_q = c_q \int_{(L_{jj})} \frac{dl}{R^{2q+1}}, \quad q = 1, 2, 3, \ldots$$

И этого вполне достаточно, чтобы кратчайшим путем и с минимальными затратами труда получать выражения частных производных потенциала W, V и U буквально любого порядка. Сказанное легко может быть распространено и на случай полиномиальной плотности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кравцов Г.Г. Поле притяжения многогранников переменной плотности. – Зап. ЛГИ, 1978, т. 76, вып. 1, с. 8–17.

2. Кравцов Г.Г. Поле притяжения масс простого слоя переменной плотности многоугольной свободно ориентированной пластинки. – Зап. ЛГИ, 1984, т. 101, с. 53–61.

3. Страхов В.Н. О проблеме решения прямых задач гравиметрии и магнитометрии для материального стержня с полиномиальной плотностью. – Геофизический журнал, 1985, т. 7, № 1, с. 3–9.