Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г.В.Плеханова,
1987, т. 113

УДК 550.837

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗОНДИРОВАНИЙ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Е.Б.ИЗОТОВА, К.М.ЕРМОХИН,
А.А.ПЕТРОВ, А.Н.ФЕДОРОВ

Понятие зондирование используется в электроразведке, как правило, применительно к изучению горизонтально-слоистой среды: вертикальные электрические зондирования на постоянном токе, зондирования становлением поля, частотные зондирования. Эти зондирования проводятся при неподвижных приемниках поля за счет изменения глубины проникновения тока либо путем изменения положения питающих электродов, либо изменением частоты (времени). В условиях неоднородной среды, как только приемник поля начинает перемещаться в пространстве, к элементам зондирования добавляется „профилирование", если пользоваться терминологией, принятой в электроразведке. При работе с неподвижной питающей линией, в том числе и линий электропередач, зондирование неотделимо от профилирования.

Современный уровень развития теории и технические средства позволяют решать прямые задачи для относительно сложных моделей среды методом интегральных уравнений и продвинуться в решении проблемы автоматической интерпретации результатов зондирования на ЭВМ. Дальнейшее развитие задач интерпретации поля будет зависеть не только от разработки математического обеспечения решения прямых задач, а и от достигнутого уровня понимания результатов расчетов в совокупности с геолого-физическим представлением о разрезе.

В статье рассмотрены метод интегральных уравнений для решения структурных задач, его модификация для расчета поля неоднородных объемных тел и задача интерпретации поля. Во всех случаях используются фиктивные источники поля, ток постоянный.

В методе интегральных уравнений на границе разрыва непрерывности электрических свойств среды вводится двойной слой зарядов [1, 10]. Аналогично может быть введен простой слой зарядов [3, 4]. Эти приемы сводят решение задачи для неоднородной среды к среде однородной с распределенными в ней вторичными фиктивными источниками. В результате решения задачи определяется суммарный скалярный потенциал двойного слоя и первичного источника тока

$$U(P)=\frac{1}{4\pi\sigma}\left(\int_S \tau(M)\,\frac{\cos(\bar{r}_{PM},\,\bar{n}_M)}{r_{PM}^2}\,dS_M+\frac{I}{R_P}\right), \qquad (1)$$

где P – точка, в которой вычисляется поле; S_M – поверхность интегриро-

вания при скольжении по ней точки M; n_M – нормаль к поверхности, восстановленная в точке M; $\bar{r}_{PM}$ – вектор расстояния между P и M, направленный в точку M; R_p – расстояние от источника до точки P; σ – электропроводность среды, в которой вычисляется потенциал; τ – момент поверхностной плотности фиктивных токов; I – сила тока.

Записанный в виде (I) потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа, граничному условию о равенстве нормальных составляющих плотности тока, а подстановка его в граничное условие о равенстве потенциалов дает интегральное уравнение

$$\tau(P) + \frac{\lambda}{2\pi} \int_S r(M) \frac{\cos(\bar{r}_{PM}, \bar{n}_M)}{r^2_{PM}} dS_M = \frac{\lambda I}{2\pi R_p}, \qquad (2)$$

где $\lambda = (\sigma_{k+1} - \sigma_k)/(\sigma_{k+1} + \sigma_k)$ для нормали, направленной в сторону среды с электропроводностью σ_k. Здесь в отличие от уравнения (I) точка P лежит на поверхности раздела.

Интегрирование проводится по всем поверхностям разрыва непрерывности электропроводности σ. Для учета влияния плоской границы раздела земля – воздух, интегрирование по S следует распространить на поверхность S', полученную зеркальным отражением исходной границы S от границы земля – воздух. Кроме того, в дополнение к реальному источнику тока вводится фиктивный источник – зеркальное отображение исходного.

Для решения интегрального уравнения поверхность S разбивается на единичные квадраты, а функция τ заменяется на кусочно-постоянную. Задача, таким образом, сводится к системе линейных уравнений, решаемой численным методом.

Программы, использующие метод интегральных уравнений, применялись для оценки влияния рельефа местности и рельефа нижнего слоя двуслойной среды [4]. Задача решалась в трехмерном варианте. Для рассмотренных случаев сделан важный для интерпретации вывод о слабом влиянии боковых неоднородностей на результаты измерений по центральному профилю. Это зачастую допускает упрощение моделей при автоматической интерпретации на ЭВМ. Однако прямую задачу требуется решать с высокой точностью и для трехмерных моделей.

В дальнейшем, по-видимому, метод интегральных уравнений целесообразно применять для решения структурных задач, когда контакты пород с разной проводимостью можно заменить плоской границей раздела.

Для тел сложной формы (например, неодносвязных, вложенных друг в друга и т.п.) задание поверхности вызывает большие технические трудности. Для решения задач этого типа более рациональна модификация метода интегральных уравнений – метод объемных фиктивных источников. Физическая интерпретация метода состоит в том, что неоднородная по сопротивлению среда представляется в виде совокупности элементарных объемов, наделенных дипольными моментами. Векторная величина моментов этих диполей определяется из условия их равновесного состояния в поле, создаваемом реальными источниками тока и окружающими диполями, т.е. плотность фиктивных диполь-

ных источников μ пропорциональна действующему полю. Коэффициент пропорциональности определяется основным уравнением постоянного тока

$$div\,\bar{j} = div\,\sigma(X)\bar{E} = 0, \qquad (3)$$

где σ – электропроводность среды, как функция положения точки $X=(x,y,z)$ в трехмерном пространстве; $\bar{E}$ – полное поле, включая поле источников в точке X; $\bar{j}$ – вектор плотности тока.

Выбирая в качестве модели среды однородное полупространство, в котором находятся включения различной формы (возможно неоднородные $\sigma \neq const$), и предполагая, что источниками поля являются точечные источники тока, находящиеся внутри или на поверхности однородного полупространства (но не внутри неоднородностей), можно получить объемные интегральные уравнения для плотности μ. Единственным граничным условием в такой постановке является условие «непротекание тока в воздух": $E_n = 0$, где E_n – нормальная составляющая электрического поля по отношению к поверхности S полупространства.

Полное поле

$$\bar{E} = \bar{E}(\bar{\mu}) + \bar{E}_0, \qquad (4)$$

где $\bar{E}(\mu)$ – поле фиктивных токов,

$$\bar{E}(\bar{\mu}(x)) = -\nabla_x \int \bar{\mu}(y)\left(\nabla_y \frac{1}{|x-y|} + \nabla_y \frac{1}{|x'-y|}\right) dV_y, \qquad (5)$$

x и y – радиусы-векторы точек в трехмерном пространстве; x' – точка, симметричная относительно поверхности раздела точки x; $|x-y|$ – расстояние между точками x и y; ∇_x и ∇_y – операция градиента по координатам точек x и y; $\bar{E}_0$ – поле реальных источников. Интегрирование ведется по полупространству.

Представление решения уравнения (3) в виде (4) и (5) дает автоматическое выполнение указанного граничного условия, а также уравнения $rot\,\bar{E} = 0$, выражающего второй закон Кирхгофа. Для того, чтобы вектор-функция μ в выражении (5) удовлетворяла (3) наложим на нее условия

$$\bar{\mu}(x) = \frac{\sigma(x)-\sigma_0}{4\pi\sigma_0}\left(-\nabla_x \int \bar{\mu}(y)\left(\nabla_y \frac{1}{|x-y|} + \nabla_y \frac{1}{|x'-y|}\right) dV_y + \bar{E}_0(x)\right), \qquad (6)$$

где σ_0 – электропроводность вмещающего полупространства.

При условии, что $div\,E_0(x) = 0$ в точках, где $\sigma(x) \neq \sigma_0$, функция $\bar{\mu}(x)$, определяемая по формуле (6), дает решение (3). Условие $div\,\bar{E}_0 = 0$ обеспечивается сделанными предположениями о расположении источника тока. Переписывая уравнение (6) в эквивалентном виде

$$\bar{\mu}(x) = \frac{2}{3}\bar{\mu}(x) + \frac{1}{3}\frac{\sigma(x)-\sigma_0}{\sigma(x)-2\sigma_0}\left(-\int_{\oint} \nabla_x\left(\bar{\mu}(y)\left(\nabla_y \frac{1}{|x-y|} + \nabla_y \frac{1}{|x'-y|}\right)\right) dV_y + \bar{E}_0(x)\right), \qquad (7)$$

где $\int_{\oint}$ означает несобственный интеграл с выколотой точкой x, получим

непосредственно пригодное к вычислениям выражение. Уравнение (7) решается методом итераций, при этом можно показать, что итеративный процесс сходится для любой функции $\overline{E}_0(x)$.

Здесь следует заметить, что на самом деле интегрирование распространяется только на области неоднородности, так как при $\sigma(x) = \sigma_0$, как видно из (6), $\overline{\mu}(x) = 0$.

Для реализации итеративного процесса решения уравнения (7) в качестве кубатурной формулы вычисления интеграла можно выбрать формулу прямоугольников на равномерной пространственной сетке. Рассмотренный способ решения уравнения (3) реализован в виде программы на языке фортран-4. На ЭВМ ЕС-1022 время работы программы 10 мин для тела, представленного 200 диполями.

Решение объемных уравнений на ЭВМ не уступает по своим возможностям способу решения интегральных уравнений на поверхностях раздела. Количество узлов интегрирования, необходимое для решения уравнения (7), в пределах возможностей современных ЭВМ различается незначительно. Так, например, для разбиения поверхности куба с размерами 5 х 5 х 5 условных единиц на квадраты со стороной 1 требуется 5·5·6 = 150 узлов, а для объемного разбиения на кубические ячейки 5·5·5 = 125 узлов. При размере 6 х 6 х 6 число узлов выравнивается. Однако, если учесть, что универсальная программа разбиения поверхности может успешно работать лишь при треугольной форме элементов разбиения, число элементов, при котором происходит выравнивание возможностей обоих методов превосходит 1500, т.е. находится за пределами возможностей современных ЭВМ.

Существенным преимуществом метода является то, что в уравнение (7) не входит $\nabla_x \sigma(x)$, что делает его нечувствительным к количеству различных тел в полупространстве.

В теории интерпретации данных метода вызванной поляризации [6] предлагается сравнивать аномальные измеренные поля с полями диполей и приписывать диполям аномальные свойства среды, при этом величины дипольных моментов могут быть использованы при оценке прогнозных ресурсов [7]. Действительно, вся информация о характеристиках среды, как видно из уравнения (7), „перекачивается" в плотность фиктивных источников. Отсюда естественным образом вытекает потребность автоматизировать процесс аппроксимации измеряемого поля полем, создаваемым системой диполей. В работе [5] аномальное поле последовательно подбирается одним, двумя и т.д. диполями. Такой способ позволяет на каждом шаге определять энергетические главные диполи, характеризующие поля в целом. Удовлетворительные результаты здесь получались лишь в тривиальных случаях, когда поля различных объектов хорошо разделялись в суммарном поле и каждое из них описывалось одним диполем. Ниже рассматривается способ аппроксимации аномальных полей одновременно несколькими диполями, количество которых определяется в ходе вычислений. Предлагаемый способ дает устойчивую аппроксимацию и обладает повышенной разрешающей способностью.

В дальнейшем рассматривается интерпретация аномального электрического потенциала $U^{ан}$, но все рассуждения и выводы останутся в силе и при интерпретации любого компонента аномального поля.

Представим аномальный потенциал, измеренный в m точках на плоской дневной поверхности как сумму потенциалов, создаваемых n диполями, находящимися в нижнем полупространстве (в двухмерном случае – в нижней полуплоскости):

$$U_i^{ан} \simeq 2\sum_{j=1}^{n} \frac{(\bar{P}_j, \bar{R}_i - \bar{R}_j)}{|\bar{R}_i - \bar{R}_j|^k}, \qquad (8)$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$; $\bar{P}_j$ – момент j-го диполя; $\bar{R}_i$ – радиус-вектор i-й точки наблюдения; $\bar{R}_j$ – радиус-вектор точки, в которой находится j-й диполь; $k = 2$ – в двухмерном случае, $k = 3$ – в трехмерном.

Нашей целью является нахождение таких диполей, которые при наименьшем их числе обеспечат заданную точность аппроксимации исходных данных. В такой постановке задача относится к широкому классу некорректных задач [9].

Запишем выражение (8) в матричной форме $\bar{U} = A\bar{P}$, где $\bar{U}$ – вектор исходных данных; $\bar{P}$ – вектор искомых параметров, в качестве которых при фиксированном положении диполей, выступают компоненты их моментов. В зависимости от соотношения между количеством исходных данных и количеством искомых параметров точного решения этой системы может либо не существовать, либо решений может быть бесконечно много. Удобным и универсальным методом приближенного решения таких систем является метод псевдообращения [II], который, с одной стороны, минимизирует невязку, а с другой стороны, дает решение, обладающее минимальной нормой. В методе псевдообращения используется сингулярное разложение матрицы A, с помощью которого строится оператор H, обратный A. Решение системы получается в виде $\bar{P} = H\bar{U}$.

Устойчивость метода и, следовательно, величина невязки зависят от соотношения между наибольшим и наименьшим сингулярными числами. Если в спектре сингулярных чисел λ_j встречаются малые значения, то решение становится неустойчивым. Во избежание этого, оператор H искусственно «загрубляется». Один из наиболее естественных способов загрубления состоит в отбрасывании малых сингулярных чисел матрицы A. Малые значения λ_j округляются до нуля, тем самым понижается ранг матрицы A. Пороговое значение определяется допустимой дисперсией решения и качеством исходных данных.

Аппроксимация аномальных электрических полей осуществляется следующим образом. Все исследуемое пространство покрывается равномерной объемной сеткой с равноотстоящими узлами и с шагом, равным расстоянию между точками наблюдения по профилю. В узлах сетки размещаются дипольные источники.

При поиске моментов диполей необходимо учитывать, что при формальном составлении указанной системы исходное поле при приближенном решении

аппроксимируется в основном диполями, находящимися вблизи дневной поверхности. Для того, чтобы все диполи равноправно участвовали в аппроксимации исходных данных, необходимо искать их моменты с некоторыми весами.

Выбор весов осуществляется экспериментально на модельных примерах. Так в двухмерном случае в качестве весов использовались величины $\sqrt{h_j}$, где h_j - глубина точки, в которой находится j-й диполь. При введении весов система преобразуется следующим образом: $A'\bar{P}' = \bar{U}$, где $A' = AW$ $\bar{P}' = W^{-1}\bar{P}$; W - матрица весов. Решение этой системы дает распределение дипольных моментов по узлам сетки. В узлах, близких к реальным источникам аномального поля, распределение дипольных моментов имеет локальные максимумы. Области вблизи локальных максимумов будем называть в дальнейшем аномальными зонами. Внутри аномальных зон, выделенных на первом шаге, вновь расставляются диполи и определяются значения их моментов и т.д. Контуры аномальных зон последовательно стягиваются. В центре каждой последней зоны помещается только один диполь. Поскольку положение двух диполей, находящихся на глубине h, можно определить по внешнему полю при расстоянии между ними не менее $1{,}3\,h$ [2], то линейные размеры последней выделяемой аномальной зоны нецелесообразно брать менее h.

При необходимости положение диполей в пределах аномальных зон может быть уточнено методом последовательных приближений.

Предложенный способ аппроксимации аномальных стационарных электрических полей был опробован на двумерных синтетических примерах. Погрешность аппроксимации не превышала 2 %, качество подбора диполей вполне удовлетворительное. Уточнений положения диполей (при четырех диполях и менее) методом последовательных приближений не потребовалось.

Интересно отметить, что пластина длиной 25 м, расположенная на глубине 20 м, аномальный потенциал которой вычислен методом фиктивных источников, проявляется двумя диполями, приуроченными к ее концам. Во всех рассмотренных примерах время счета на ЭВМ ЕС-1033 составляет 2-3 мин.

В грави- и магниторазведке разработаны способы решения обратных задач, состоящие из двух этапов [12]. На первом этапе без априорных геологических данных определяется положение источников аномального поля. На втором этапе по известному положению источников строится эквивалентное семейство решений. Конкретные объекты из него должны выбираться с учетом имеющейся геологической информации. В работе [8] показана возможность использования двухэтапных способов интерпретации в электроразведке постоянным током.

Предложенный метод аппроксимации стационарных электрических полей может быть использован на первом этапе построения эквивалентных семейств решений. Совокупный анализ решений обратных задач и расчета поля по методу фиктивных источников позволит перейти в дальнейшем к построению геоэлектрических разрезов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воскобойников Г.М. О вычислении стационарных электромагнитных полей в некоторых кусочно-однородных средах. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1973, № 9, с. 63–70.

2. Гольцман Ф.М., Калинина Т.Б. Статистическая интерпретация магнитных и гравитационных аномалий. Л., Недра, 1983. 248 с.

3. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод расчета поля постоянного тока в неоднородных проводящих средах. – В кн.: Вычислительные методы и программирование. М., изд. ВЦ МГУ, 1973, с. 175–186.

4. Изотова Е.Б., Зверева Н.В. Расчет поля постоянного тока в неоднородных средах. М., 1978 / Деп. в ВИНИТИ, 1978, № 2222-78.

5. Изотова Е.Б., Никитина Л.А., Ермохин К.М. Способ интерпретации площадных съемок стационарных электрических полей. – В кн.: Методы разведочной геофизики. Теория и практика интерпретации в рудной геофизике. Сб. науч. трудов. Л., изд. НПО „Рудгеофизика", 1981, с. 9–17.

6. Комаров В.А. Электроразведка методом вызванной поляризации. Л., Недра, 1980. 391 с.

7. Комаров В.А., Хлопонина Л.С., Рокитянский А.И. О перспективах интегрального способа интерпретации данных метода вызванной поляризации. – В кн.: Методы разведочной геофизики. Сб. науч. трудов. Л., изд. НПО „Рудгеофизика", 1983, с. 12–26.

8. Мартышко П.С. О решении обратной задачи электроразведки на постоянном токе для произвольных классов потенциалов. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1986, № 1, с. 87–92.

9. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1979. 285 с.

10. Тозони О.В., Маергоиз И.Д. Расчет трехмерных электромагнитных полей. Киев, Техника, 1974. 352 с.

11. Форсайт Дж., Малькольм И., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М., Мир, 1980. 279 с.

12. Цирульский А.В., Пруткин И.Л. О решении обратной задачи гравиметрии для произвольных классов двухмерных и трехмерных потенциалов. – Изв. АН СССР, Физика Земли, 1981, № 11, с. 45–61.