Записки Ленинградского ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции
и ордена Трудового Красного Знамени горного института им. Г.В.Плеханова.
1988. Т. 116

УДК 622.243

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТОТ ВРАЩЕНИЯ БУРОВОГО СНАРЯДА НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Л.К.ГОРШКОВ, А.К.АРНО, А.Н.ШЕРСТНЕВ

Из практики бурения скважин (как разведочных, так и специального назначения) при проведении горно-строительных работ известно, что значительная доля аварий на скважинах приходится на обрывы колонн бурильных труб. Установлено также, что чаще всего обрывы наблюдаются при работе буровых станков на II–III передачах, т.е. при частотах вращения 150–300 об./мин (15–30 рад/с). Есть предположение, что эти частоты соответствуют частотам собственных колебаний колонны (продольных и крутильных). Совпадение частот собственных и вынужденных колебаний способствует возникновению резонанса или близких к нему ситуаций, что и является причиной обрывов бурильных труб.

Целью настоящей работы является определение частот собственных колебаний колонны при бурении скважин с тем, чтобы можно было задавать частоту вынужденных колебаний (частоту вращения бурового снаряда) в диапазонах, отличающихся от частот собственных колебаний.

Колонна бурильных труб с породоразрушающим инструментом как система с распределенной инерцией испытывает одновременно продольные и крутильные колебания. Поэтому расчет частот собственных колебаний колонны следует производить с учетом не только прочностных характеристик труб, но и формы колебаний. Для длинных колонн, представляемых как бесконечные стержни, рационально рассматривать колебания в форме «бегущей волны", т.е. нет необходимости учитывать отражение волны от конца стержней («стоячая волна"). При этом возникновение «бегущей волны" обусловливается упругими свойствами материала труб. Рассмотрим продольные колебания колонны бурильных труб.

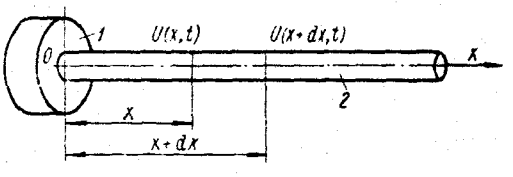


Рис.1. Расчетная схема для исследования собственных продольных колебаний бурильной колонны
1 – шпиндель станка; 2 – колонна бурильных труб

Выделим в колонне поперечное сечение, которое в недеформированном состоянии имеет координату x (рис.1). В текущий момент времени t это сечение смещается от исходного положения (от оси) на некоторую величину

$U = U(x,t)$. Рассмотрим движение элемента колонны dx. Законы колебаний его концов

$$U(x,t); \quad U(x+dx,t).$$

Текущая относительная деформация элемента dx

$$\varepsilon = \frac{U(x+dx,t) - U(x,t)}{dx}. \tag{1}$$

Разложим ε в ряд Тейлора и сохраним только первое слагаемое:

$$\varepsilon = \frac{U + \frac{dU}{dx}dx + \ldots - U}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x}. \tag{2}$$

Нормальные напряжения в поперечном сечении, согласно закону Гука,

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\partial U}{\partial x}, \tag{3}$$

где E – модуль Юнга (модуль упругости первого рода).

Суммарная продольная сила

$$N = F\sigma = EF\frac{\partial U}{\partial x}, \tag{4}$$

где F – площадь поперечного сечения колонны; EF – жесткость колонны на растяжение-сжатие.

Уравнение движения элемента dx (рис.2)

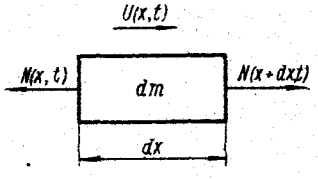


Рис.2. Расчетная схема для исследования движения элемента бурильной колонны dx

$$dm\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = N(x+dx,t) - N(x,t), \tag{5}$$

где dm – масса элемента колонны длиной dx; $N(x+dx,t)$, $N(x,t)$ – продольные силы на концах элемента dx.

Элементарная масса колонны

$$dm = \rho F dx, \tag{6}$$

где ρ – объемная плотность материала труб.

Разложим правую часть выражения (5) в ряд Тейлора:

$$N(x+dx,t) - N(x,t) = N + \frac{\partial N}{\partial x}dx + \ldots - N = \frac{\partial N}{\partial x}dx,$$

тогда

$$\rho F\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}dx = \frac{\partial N}{\partial x}dx$$

или с учетом (4)

$$\rho F\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = EF\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \tag{7}$$

Сократив (7) на F, получим

$$E\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}. \qquad (8)$$

Уравнение (8) есть уравнение продольных упругих колебаний колонны бурильных труб, которое после подстановки $a=\sqrt{E/\rho}$ преобразуется в волновое уравнение

$$a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \qquad (9)$$

где a – скорость продольной упругой волны.

Решение уравнения (9) представляется в виде интеграла Даламбера:

$$U=f_1\left(t-\frac{x}{a}\right)+f_2\left(t+\frac{x}{a}\right), \qquad (10)$$

где f_1, f_2 – произвольные функции своих аргументов.

Решение (10) рационально искать в форме гармонической бегущей волны:

$$U=U(x)\sin\omega\left(t-\frac{x}{a}\right), \qquad (11)$$

где $U(x)$ – искомая форма бегущей волны; ω – некоторая заранее неизвестная частота колебаний.

Граничные условия для решения уравнения (11): при $x=0$

$$U(x,t)=0; \qquad (12)$$

при $x=l$

$$m\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=-N$$

или

$$m\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+EF\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=l}=0, \qquad (13)$$

где l – длина колонны бурильных труб; m – условная масса, как бы сосредоточенная на конце колонны и определяемая осевой нагрузкой.

Условная масса

$$m=C/g, \qquad (14)$$

где C – осевая нагрузка на породоразрушающий инструмент; g – ускорение свободного падения.

Подставим решение (11) в волновое уравнение (9) и продифференцируем его:

$$a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\sin\omega\left(t-\frac{x}{a}\right)=-U\omega^2\sin\omega\left(t-\frac{x}{a}\right). \qquad (15)$$

Сократив (I5) на $\sin\omega\left(t-\frac{x}{a}\right)$, после преобразований получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\left(\frac{\omega}{a}\right)^2 U=0. \qquad (I6)$$

Поскольку уравнение (I6) есть однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, характеристические показатели которого мнимые и сопряженные, решение такого уравнения представляется в виде

$$U=C_1\sin\frac{\omega x}{a}+C_2\cos\frac{\omega x}{a},$$

где C_1 и C_2 - постоянные интегрирования, для нахождения которых используем граничные условия (I2) и (I3).

Из (I2) имеем

$$U\big|_{x=0}=0=C_2.$$

Запишем граничное условие (I3):

$$-m\omega^2 U\sin\omega\left(t-\frac{x}{a}\right)\Big|_{x=l}+EF\frac{\partial U}{\partial x}\sin\omega\left(t-\frac{x}{a}\right)\Big|_{x=l}=0.$$

Сократив последнее выражение на $\sin\omega\left(t-\frac{x}{a}\right)$ и подставив в него $U=$ $=C_1\sin\frac{\omega x}{a}$, получим

$$-m\omega^2 C_1\sin\frac{\omega x}{a}\Big|_{x=l}+EFC_1\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega x}{a}\Big|_{x=l}=0,$$

откуда имеем частотное уравнение

$$\operatorname{ctg}\frac{\omega l}{a}=\frac{ma}{EF}\omega. \qquad (I7)$$

Трансцендентное уравнение (I7) имеет бесконечное множество положительных решений: $0<\omega_1<\omega_2<\ldots$ Они образуют "частотный спектр", где наименьшая частота ω_1 есть частота основного тона.

Для условий работы бурильной колонны в скважине частоту ω_1 следует считать решением задачи, т.е. задавать режим бурения таким образом, чтобы частота вращения бурового снаряда не соответствовала частоте основного тона ω_1:

$$n\lesssim 30\,\omega_1/\pi, \qquad (I8)$$

где n - частота вращения бурового снаряда, об./мин.

С учетом (I4) выражение (I7) можно переписать так:

$$\operatorname{ctg}\frac{\omega l}{a}=\frac{aC}{gEF}\omega. \qquad (I9)$$

Решать уравнение (I9) целесообразно графически, тогда корнем уравнения будет проекция на ось абсцисс точки пересечения графиков

$$U = \operatorname{ctg}\frac{\omega l}{a}; \quad U' = \frac{m a}{EF}\omega$$

как функций ω.

Для учета крутильных колебаний должно быть решено волновое уравнение, аналогичное (9):

$$a_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \tag{20}$$

где $a_1 = \sqrt{G/\rho}$ – скорость распространения поперечной волны; G – модуль упругости второго рода, $G = E/2(1+\mu)$[x]; μ – коэффициент Пуассона для материала труб; φ – деформация сдвига.

Начальные условия для решения уравнения (20): при $x = 0$

$$\varphi(x, t) = 0; \tag{21}$$

при $x = l$

$$I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0, \tag{22}$$

где I – момент инерции колонны труб с условной массой $m = C/g$ относительно ее продольной оси, $I = C(D^2 + d^2)/8g$; J_p – полярный момент сечения, $J_p = 0{,}1(D^4 - d^4)$; D, d – соответственно наружный и внутренний диаметры бурильных труб.

Аналогично (II) решение уравнения (20) будем искать в виде

$$\varphi = \varphi(x)\sin\omega\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

Тогда, используя граничные условия (2I) и (22), после соответствующих преобразований получим

$$\operatorname{ctg}\frac{\omega' l}{a_1} = \frac{2{,}5\, a_1 C(1+\mu)}{gE(D^2 - d^2)}\omega', \tag{23}$$

где ω' – значение частоты собственных крутильных колебаний колонны.

Решение уравнения (23) относительно ω' (первого значения, т.е. частоты основного тона ω_1') следует рассматривать совместно с решением ω_1 из уравнения (I7), так как согласно выражению (I8) с этими частотами не должны совпадать (резонировать) частоты вынужденных колебаний (заданные частоты вращения колонны).

П р и м е р. Пусть требуется определить собственные частоты колебаний (продольных и крутильных) бурильной колонны диаметром 50 мм (D =

---

[x] Технология и техника разведочного бурения / Ф.А.Шамшев, С.Н.Тараканов, Б.Б.Кудряшов и др. М. : Недра, 1983. 565 с.

= 0,050 м; d = 0,038 м; $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $G = 8 \cdot 10^{10}$ Па; μ = 0,25) при бурении скважины до глубины l = 150 м с осевой нагрузкой $C = 1 \cdot 10^4$ Н.

Результаты расчета

$$U = \operatorname{ctg}\frac{\omega l}{a}; \quad U' = \frac{aC\omega}{gEF}; \quad \varphi = \operatorname{ctg}\frac{\omega' l}{a_1}; \quad \varphi' = \frac{2{,}5 a_1 C(1+\mu)}{gE(D^2 - d^2)}\omega'$$

предоставим графически (рис.3), откуда следует, что $\omega_1 = 29$ с$^{-1}$; $\omega_1' =$ = 19 с$^{-1}$. Этим значениям собственных частот соответствуют частоты вращения $n_1 = 277$ об./мин и $n_1' =$ = 182 об./мин.

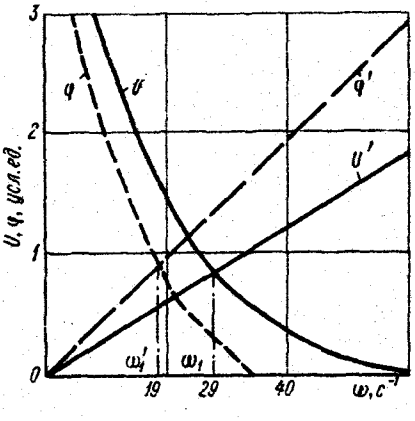


Рис.3. Графическое решение задачи определения собственных продольных и крутильных колебаний бурильной колонны

Таким образом, если заданные частоты вращения бурового снаряда будут близки к приведенным собственным частотам в диапазоне около ±10 % от расчетных значений ($n_1' =$ = 165–200 об./мин; $n_1 =$ = 260–305 об./мин), то возможны резонансные явления, которые могут вызвать обрывы труб. На опасность этого явления указывают значения некоторых частот вращения шпинделя современных буровых станков, об./мин: УКБ-2-155 – 305; УКБ-3 – 200; СКБ-4 – 155,279; СКБ-5 – 257; ЗИФ-650м – 188, 254; ЗИФ-1200 МР – 288; СБГ-1М – 199,306[x].

[x] Справочное руководство мастера геолого-разведочного бурения / Г.А.Блинов, В.И.Васильев, Ю.В.Бакланов и др. Л. : Недра, 1983. 400 с.