Горные стационарные установки и машины.
Записки Ленинградского горного института. Л., 1988. Т.117

УДК 539.31+517.944+622.234.5

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

К.Г.АСАТУР

Импульсивное нагружение поверхности упругого полупространства «куполообразно" распределенным давлением, встречающимся при определении напряжений в контактной задаче при гидроразрушении массивов, рассматривалось в работах [1], [2] на основе решения уравнений по методу разделения переменных [3]. В работах [1] и [2] найдены напряжения в отдельных точках их концентрации.

Ниже эта задача решена с помощью вариационного метода, облегчающего ее доведение до численных результатов по всему полю контактной области концентрации напряжений. Рассмотрим в цилиндрических координатах z, r, ϑ нагружение поверхности ($z = 0$) упругого полупространства осесимметричным давлением:

$$p(r) = \frac{p_0 r_0^3 H(t)}{(r_0^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{p_0 H(t)}{(1 + r_*^2)^{3/2}} ;$$

где r - расстояние на поверхности $z = 0$ от центра нагрузки; p_0 - давление по ее оси (при $r = 0$); $r_* = r r_0^{-1}$ - относительное значение r; r_0 - параметр нагрузки, определяющий ее распределение на плоскости $z = 0$,

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t = 0 \\ 1 & \text{при} \quad t > 0 \end{cases}$$

Уравнения Ламе

$$\frac{\partial}{\partial r} Du + \theta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \theta_1 \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial r} = \frac{\theta}{G} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} ,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \theta D \frac{\partial w}{\partial r} + \theta_1 \frac{\partial}{\partial z} Du = \frac{\theta}{G} \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} . \qquad (1)$$

решаем при граничных условиях на поверхности $z = 0$ и при нулевых начальных условиях всюду, кроме поверхности $z = 0$, учитывая уравнение (2):
для нормальных напряжений

$$\sigma_z = 2G\theta_1 \left[(1-\nu) \frac{\partial w}{\partial z} + \nu Du \right]_{z=0} - p(r); \qquad (2)$$

для касательных напряжений

$$\tau_{rz} = G\left[\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right]_{z=0} = 0, \qquad (3)$$

где u, w - компоненты смещения по осям r, z; ρ - плотность среды; G - постоянная Ламе (модуль сдвига); ν - коэффициент Пуассона; t время;

$$D = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}; \quad \theta = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}; \quad \theta_1 = 1-\theta.$$

Предоставим функции u, w как суперпозицию двух решений: статического [3]

$$u_c = \frac{p_0 r_0^2}{2G}\left[\frac{rz}{(\omega^2+r^2)^{3/2}} + \frac{M}{r}\left(1 - \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+r^2}}\right)\right],$$

$$w_c = \frac{p_0 r_0^2}{2G}\left[\frac{\omega z}{(\omega^2+r^2)^{3/2}} + \frac{N}{\sqrt{\omega^2+r^2}}\right]$$

и динамического, стремящегося при $t \to \infty$ к нулю, которое будем искать в виде интегралов Фурье - Бесселя так, чтобы

$$u = u_c - \frac{p_0 r_0^2}{2G}\int_0^\infty \varphi(z,t)\, J_1(k,r)\, dr;$$

$$w = w_c - \frac{p_0 r_0^2}{2G}\int_0^\infty \psi(z,t)\, J_0(k,r)\, dr, \qquad (4)$$

где φ, ψ - искомые функции z и t; $J_0(k,r)$, $J_1(k,r)$ - цилиндрические функции первого рода; k - переменное преобразования Ханкеля;

$$\omega = z + r_0; \quad M = 2\nu - 1; \quad N = 2(1-\nu).$$

Тогда краевая задача (I)-(3) для функции φ и ψ принимает вид

$$A\varphi - \theta_1 k \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0;$$

$$B\psi + \theta_1 k \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \qquad (5)$$

с граничными условиями при $z = 0$

$$\left[(1-\nu)\frac{\partial \psi}{\partial z} + \nu k \varphi\right]_{z=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} - k\psi\right]_{z=0} = 0 \qquad (6)$$

и начальными условиями при $t = 0$

$$\varphi = (kz + M)e^{-k\omega}, \quad \psi = (kz + N)e^{-k\omega},$$

при $t = 0$, $z > 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0,$$

где

$$A = \theta \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 - \frac{\theta}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad B = \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \theta k^2 \frac{\theta}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Функции $\partial\varphi/\partial t$, $\partial\psi/\partial t$, определяющие производные $\partial u/\partial t$, $\partial w/\partial t$ на границе $z = 0$ должны удовлетворять условию, согласно которому ну импульсов при $t = 0$ скорость поверхности полупространства

$$\frac{\partial u(r,0,0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w(r,0,0)}{\partial t} = \frac{p(r)}{\rho c_0},$$

где

$$c_0 = \sqrt{\frac{G}{\theta \rho}}$$

есть скорость распространения продольной волны в рассматриваемой среде.

Задачу решаем вариационным методом, представив искомые функции в виде

$$\varphi = (kz + M)(1 + kmt)e^{-k\alpha} + \theta_2 kmt\, \chi e^{-k\beta} + (a_i kz + b_i \theta_3) kmt\, \chi e^{-k(imt + r_0)};$$

$$\psi = (kz + N)(1 + kmt)e^{-k\alpha} + 2\theta kz\, \chi e^{-k\beta} - (b_i kz + a_i) kmt\, \chi e^{-k(imt +$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

где a_i, b_i - коэффициенты, причем по повторяющимся значкам производится суммирование; m имеет смысл волновой скорости, представляемой с помощью безразмерного множителя m_0 в виде $m = m_0 c$; c $c_0\sqrt{\theta}$ рость поперечной волны;

$$\alpha = z + mt + r_0; \quad \beta = mt + r_0; \quad \theta_2 = \frac{1 - 2\nu}{\nu}; \quad \theta_3 = \frac{1 - \nu}{\nu}$$

$$\chi = \exp\left(-\frac{kz^2}{mt}\right)$$

В квадранте $0 \leqslant z \leqslant \infty$, $0 < t \leqslant \infty$ функция χ и все ее производ ограничены, в точках разрыва не определены и имеют конечные пределы, причем во внутренних точках двусторонние.

Функции φ и ψ удовлетворяют краевой задаче (5)-(7) и при их новке в (4) получим

$$u = \frac{p_0 r_0^2}{2\rho c^2} \left\{ \frac{rz}{(\omega^2 + r^2)^{3/2}} + \frac{M}{r} \left[1 - \frac{\omega}{(\omega^2 + r^2)^{1/2}} \right] - \frac{rz}{(\alpha^2 + r^2)^{3/2}} - \right.$$

$$-\frac{M}{r}\left[1-\frac{\alpha}{(\alpha^2+r^2)^{1/2}}\right]+\frac{3\alpha r z mt}{(\alpha^2+r^2)^{5/2}}-\frac{M r mt}{(\alpha^2+r^2)^{3/2}}-\frac{\theta_2 r mt}{(\beta^2+r^2)^{3/2}}+$$

$$+\frac{3a_i r z mt(imt+\gamma)}{\left[(imt+\gamma)^2+r^2\right]^{5/2}}-\frac{b_i\theta_3 r mt}{\left[(imt+\gamma)^2+r^2\right]^{3/2}}\Bigg\};$$

$$w=\frac{P_0 r_0^2}{2\rho c^2}\Bigg\{\frac{\omega z}{(\omega^2+r^2)^{3/2}}+\frac{N}{(\omega^2+r^2)^{1/2}}-\frac{\alpha z}{(\alpha^2+r^2)^{3/2}}-\frac{N}{(\alpha^2+r^2)^{1/2}}-$$

$$-\frac{(2\alpha^2+r^2)z mt}{(\alpha^2+r^2)^{5/2}}-\frac{N\alpha mt}{(\alpha^2+r^2)^{3/2}}-\frac{2\theta z\beta}{(\beta^2+r^2)^{3/2}}+\frac{b_i\left[2(imt+\gamma)^2+r^2\right]z mt}{\left[(imt+\gamma)^2+r^2\right]^{5/2}}$$

$$+\frac{a_i(imt+\gamma)mt}{\left[(imt+\gamma)^2+r^2\right]^{3/2}}\Bigg\}$$

Рассматривая в уравнениях (9) последовательность $\exp(-ikmt)$ как систему координатных функций для уравнений (5), по методу Бубнова - Галеркина получим

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\exp(-jkmt)\left(A\varphi-\theta_1 k\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)dz\,dt=0;$$

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\exp(-jkmt)\left(B\psi-\theta_1 k\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dz\,dt=0, \qquad (10)$$

$$(j=1,2,\ldots,n)$$

После интегрирования по z и t относительно значений a_i, b_i получается система из $2n$ уравнений:

$$g_{ji}\,a_i+h_{ji}\,b_i=R_j;\quad q_{ji}\,a_i+p_{ji}\,b_i=Q_j, \qquad (11)$$

где

$$g_{ji}=-\theta m_0^2 F_{ji}-\frac{1}{(i+j)^2}-\frac{1}{(i+j)^3};$$

$$h_{ji}=-\frac{3}{8}\theta_3\pi\left[\theta m_0^2 S_{ji}+\frac{1}{(i+j)^{5/2}}\right];$$

$$q_{ji}=\frac{3\theta}{8}\pi\left[m_0^2 S_{ji}+\frac{1}{(i+j)^{5/2}}\right];$$

$$p_{ji}=\theta m_0^2 F_{ji}+\frac{1-\theta_1\theta_3}{(i+j)^2}+\frac{\theta}{(i+j)^3};$$

$$R_j=\theta m_0^2(1+M)L_j-\frac{3}{8}\pi\theta_2\left[\frac{1}{(1+j)^{5/2}}+\theta m_0^2 S_{j1}\right];$$

$$Q_j = \theta m_0^2 (1+N) L_j - \frac{2\theta}{1+j} - \frac{\theta^2 + \theta_2 \theta_1}{(1+j)^2} - 2\theta^2 m_0^2 E_j ;$$

$$F_{ji} = \frac{i^2}{(i+j)^3} - \frac{2i}{(1+j)^2} + \frac{1}{i+j};$$

$$S_{ji} = \frac{i^2}{(i+j)^{5/2}} - \frac{2i}{(i+j)^{3/2}} + \frac{1}{(i+j)^{1/2}}$$

$$L_j = \frac{1}{1+j} + \frac{1}{(1+j)^2} ;$$

$$E_j = \frac{1}{(1+j)^2} - \frac{1}{1+j}$$

В таблице для $\nu = 0{,}3$ сопоставлены точные [I] и вычисленные для первого приближения ($n = 1$) при $m \quad c_1$ ($m_0 = 1{,}21$) и $m \quad c$ ($m_0 = 1$) значения наибольших касательных напряжений в функции от параметра $T = t c r_0^{-1}$ (при $T > z^* r_0^{-1}$) по оси нагрузки в точке их статического максимума

$$z = z^* = \frac{2(1+\nu)}{7-2\nu} r_0$$

из соотношения

$$\tau = G\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

При $m \quad c_1$ численное значение компоненты скорости смещения поверхности полупространства $\partial w / \partial t$ в первом приближении совпадает с точным, по формуле (6), что объясняется преобладающим здесь влиянием распространения продольных волн на процесс развития напряжений в массиве. Значения m_0 при $m = c_1$ для различных ν приведены ниже:

ν	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
m_0	1,298	1,116	1,018	0,959	0,925	0,902

Поскольку в реальных условиях гидроразрушения величина $c r_0^{-1}$ имеет порядок 10^{-6} c^{-1}, то численные значения T в таблице представляют собой выраженное в микросекундах время развития напряжений τ в точке на глубине $z \quad z^*$ от поверхности $z = 0$.

Задача Коши в рассматриваемом вариационном методе решения характеризуется наличием в подынтегральных выражениях системы (11) функций φ и ψ, не определенных на множестве меры нуль по Лебегу. Это связано с тем, что при дополнительном условии для выбранных функций $u|_{t=\infty} = u_c$, $w|_{t=\infty} = w_c$, производные $\partial\varphi/\partial t$ и $\partial\psi/\partial t$ при $t = 0$ на границе $z = 0$ в соотношении (7) не определены.

Значения τ для точного и приближенного решений в точке $z = z^*$, $r = 0$

T	Точное решение	Первое приближение ($n = 1$)		T	Точное решение	Первое приближение ($n = 1$)	
		при $m_0 = 1{,}21$ ($m = c_1$)	при $m_0 = 1{,}0$ ($m = c$)			при $m_0 = 1{,}21$ ($m = c_1$)	при $m_0 = 1{,}0$ ($m = c$)
1,0	0,368	0,108	0,141	9,0	0,263	0,256	0,258
2,0	0,264	0,168	0,191	10,0	0,268	0,258	0,260
3,0	0,263	0,203	0,217	11,0	0,268	0,260	0,263
4,0	0,263	0,223	0,233	12,0	0,268	0,263	0,263
5,0	0,263	0,236	0,242	15,0	0,268	0,265	0,265
6,0	0,263	0,244	0,249	20,0	0,268	0,267	0,267
7,0	0,263	0,249	0,253	25,0	0,268	0,268	0,268
8,0	0,263	0,253	0,256	30,0	0,268	0,268	0,268

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Асатур К.Г. Волновой процесс при нагружении упругого полупространства давлением струи // Известия вузов. Горный журнал. 1981. № 1.

2. Климова А.Н., Огурцов К.И. Об условии приемлемости квазистатических воздействий на границе упругого полупространства // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 6.

3. Огурцов К.И., Петрашень Г.И. Динамические задачи для упругого полупространства в случае осевой симметрии // Зап. ЛГУ. 1981. Вып. 24. № 148.